บทที่ 2

สถิตศาสตร์ของอนุภาค

2.1 คำนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลของแรงซึ่งกระทำต่ออนุภาค โดยแรกสุดจะกล่าวถึงการแทนแรงตั้งแต่ 2 แรงขึ้นไปซึ่งกระทำต่ออนุภาค ด้วยแรงเดี่ยวหนึ่งแรงซึ่งมีผลเช่นเดียวกันกับระบบแรงเดิม แรงเดี่ยวซึ่ง**สมมูล**(equivalent) กับระบบแรงเดิมนี้เรียกว่า **แรงลัพธ์**(resultant) จากนั้นจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงทั้งหมดซึ่งกระทำต่ออนุภาคที่อยู่ใน**สภาวะสมดุล**(equilibrium) และใช้ความสัมพันธ์เหล่านั้นหาแรงบางแรงซึ่งกระทำต่ออนุภาค

ในส่วนแรกของบทนี้จะกล่าวถึงระบบ**แรงร่วมระนาบ** (แรงใน 2 มิติ) และในส่วนหลังจะกล่าวถึงระบบ**แรงในปริภูมิ** (แรงใน 3 มิติ)

ระบบแรง

คือการที่มีแรงตั้งแต่ 2 แรงขึ้นไป กระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุใด ๆ ภายใต้สภาวะที่กำหนด อาจแบ่งได้เป็น 2 ระบบใหญ่ ๆ ได้เป็น

1. **ระบบแรงร่วมระนาบ** (coplanar force system) แรงทั้งหมดในระบบอยู่ในระนาบเดียวกัน นั่นคือระบบแรงใน 2 มิตินั่นเอง
2. **ระบบแรงไม่ร่วมระนาบ** (non-coplanar force system) แรงทั้งหมดในระบบไม่อยู่ในระนาบเดียวกัน นั่นคือระบบแรงใน 3 มิตินั่นเอง

ระบบแรงยังอาจแบ่งเป็นระบบย่อย ๆ ได้เป็น

1. **ระบบแรงร่วมเส้นตรง** (collinear force system) แนวของแรงทั้งหมดในระบบอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
2. **ระบบแรงร่วมจุด** (concurrent force system) แนวของแรงทั้งหมดในระบบไปพบที่จุดเดียวกัน

3. **ระบบแรงไม่ร่วมจุด** (non-concurrent force system) แนวของแรงทั้งหมดในระบบไม่ไปพบที่จุดเดียวกัน
4. **ระบบแรงขนาน** (parallel force system) แนวของแรงทั้งหมดในระบบขนานกัน
5. **ระบบแรงไม่ขนาน** (non-parallel force system) แนวของแรงทั้งหมดในระบบไม่ขนานกันทั้งหมด

2.2 แรงลัพธ์ของระบบแรง

แรงลัพธ์ของระบบแรง คือ ระบบแรงซึ่งง่ายที่สุด ที่สามารถแทนระบบแรงเดิมได้โดยที่ไม่ทำให้ผลภายนอก ที่กระทำต่อวัตถุคงรูปเดิมเปลี่ยนไป แรงลัพธ์อาจเป็น

1. **แรงเดี่ยว** 1 แรง (a single force)
2. **แรงคู่ควบ** 1 คู่ (a couple) แรงคู่ควบได้แก่ แรง 2 แรง ซึ่งไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน มีขนาดเท่ากัน มีแนวขนานกัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน
3. แรงเดี่ยว 1 แรง และ แรงคู่ควบ 1 คู่

ผลของแรงที่กระทำต่อวัตถุ แบ่งออกได้เป็น 2 ประการ คือ

1. ผลภายนอก ได้แก่ การอยู่นิ่ง หรือ การเคลื่อนที่
2. ผลภายใน ได้แก่ **ความเค้น** (stress) และ**ความเครียด** (strain)

2.3 แรงลัพธ์ของแรง 2 แรงซึ่งกระทำต่ออนุภาค

แรงหนึ่งแรงใดซึ่งใช้แทน การกระทำของวัตถุหนึ่งต่ออีกวัตถุหนึ่ง จำเป็นต้องบอกคุณลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

1. จุดที่แรงนั้นกระทำ
2. ขนาดของแรงนั้น
3. แนวและทิศทางของแรงนั้น

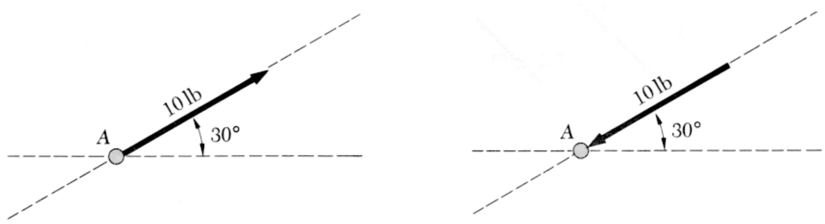
อนุภาคในที่นี้ไม่จำกัดเฉพาะวัตถุซึ่งมีขนาดเล็กมากเพียงอย่างเดียว อาจเป็นวัตถุซึ่งมีขนาดรูปร่างใด ๆ ก็ได้ แต่ขนาดรูปร่างดังกล่าวไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงผลภายนอกของวัตถุ นั่นคือแรง

ต่าง ๆ ซึ่งกระทำที่จุดต่าง ๆ บนวัตถุอาจถูกพิจารณาให้มีจุดกระทำร่วมกันที่จุดเดียวกัน โดยใช้หลักการส่งถ่ายแรง จุดที่แรงทั้งหมดถูกส่งถ่ายแรงไปกระทำที่จุดเดียวกันนั้น ถือว่าเป็น อนุภาค

ขนาดของแรงแทนได้ด้วยความยาวของเส้นตรงโดยใช้มาตราส่วนที่เหมาะสม ในทางวิศวกรรมขนาดของแรงในระบบหน่วยระหว่างชาติ มีหน่วยที่นิยมใช้คือ นิวตัน (N) และกิโลนิวตัน (kN) ส่วนในระบบหน่วยของอเมริกัน ใช้ ปอนด์ (lb) และกิโลปอนด์ (kip หรือ k)

แนวของการกระทำหรือแนวของแรง แทนได้ด้วยแนวของเส้นตรง ซึ่งบอกเป็นค่ามุมซึ่งแนวเส้นตรงดังกล่าวทำมุมกับ**แกนอ้างอิงตรึง** (fixed axis)

ทิศทางของแรงแทนด้วยหัวลูกศร และ จุดที่แรงกระทำแทนด้วยจุดปลายลูกศร ดูรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 (Beer, 1988: 15)

2.4 การรวมแรงหรือเวกเตอร์

แรงลัพธ์ของแรง 2 แรง ซึ่งมีแนวของแรงมาพบที่จุดเดียวกัน จะเป็นไปตามกฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งกฎนี้พิสูจน์ได้มาจากการทดลอง

ขนาดของแรงลัพธ์ จะเป็นสัดส่วนกับความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีความยาวด้านทั้งสองเป็นสัดส่วนกับขนาดของแรงทั้งสอง

ขนาดของแรงลัพธ์ R อาจหาได้จากวิธีกราฟิก โดยการเขียนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้ขนาดของแรงทั้ง 2 แทนด้วยความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามมาตราส่วนที่เหมาะสม ขนาดแรงลัพธ์หาได้จากการวัดความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น

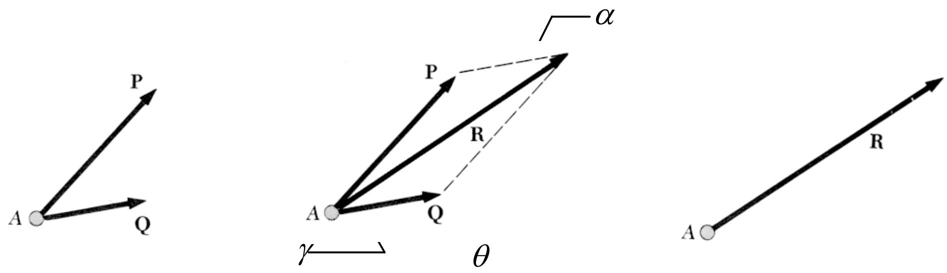
หรืออาจคำนวณหาขนาดของแรงลัพธ์ด้วยวิธีตรีโกณมิติ โดยใช้**กฎของโคไซน์** (law of cosines)

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\theta$$

ทิศทางของแรงลัพธ์ R หาได้จาก**กฎของไซน์** (law of sines)

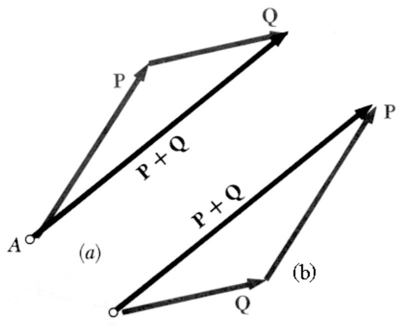
$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{P}{\sin\gamma} = \frac{Q}{\sin\alpha}$$

ข้อสังเกต กรณีรวมแรงหรือเวกเตอร์ในระบบแรงร่วมจุด แนวของแรงลัพธ์จะต้องผ่านจุดซึ่งแรงทั้งหลายในระบบไปพบกัน ดูรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 (Beer, 1988: 15)

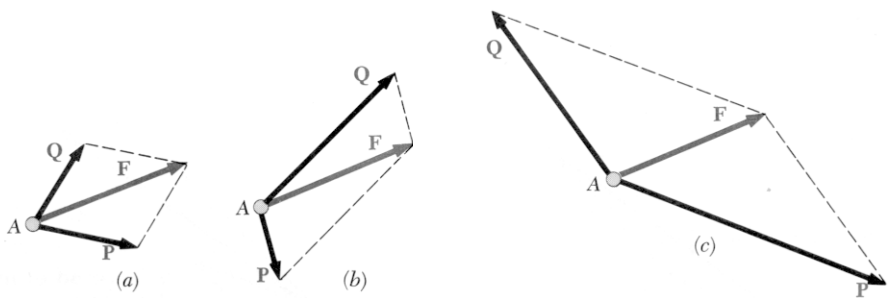
จากกฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ยังสามารถขยายเป็นกฎรูปสามเหลี่ยม โดยขนาดและแนวทิศทางของแรงลัพธ์สามารถหาได้จากการนำแรง **P** และแรง **Q** มาต่อกันในลักษณะ**หัวต่อท้าย** (tip-to-tail) คือนำหัวลูกศรซึ่งแทนแรง **P** ต่อเข้ากับปลายลูกศรซึ่งแทนแรง **Q** ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ **R** หาได้จากการลากเส้นตรงจากปลายลูกศรซึ่งแทนแรง **P** ไปยังหัวลูกศรซึ่งแทนแรง **Q** เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยม ดูรูปที่ 2.3(a) แสดงการหาแรงลัพธ์ **R** จาก **P** + **Q** ส่วนในรูปที่ 2.3(b) แสดงการหาแรงลัพธ์ **R** จาก **Q** + **P** จะเห็นว่า **P** + **Q** เท่ากับ **Q** + **P**



รูปที่ 2.3 (Beer, 1988: 17)

2.5 การแยกแรงให้เป็นแรงองค์ประกอบ (Resolution of a force into components)

จากแรงเดี่ยว 1 แรงสามารถแยกให้เป็นแรงองค์ประกอบ 2 แรงเป็นคู่ได้หลายคู่ ดูรูปที่ 2.4

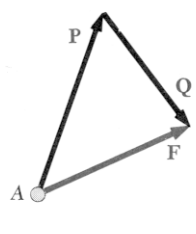


รูปที่ 2.4 (Beer, 1988: 19)

มี 2 กรณีคือที่น่าสนใจ คือ

1. รู้ขนาดและแนวทิศทางของแรงองค์ประกอบ 1 แรง (แรง P) และรู้ขนาดและแนวทิศทางของแรงลัพธ์ F

ขนาดและทิศทางของแรงองค์ประกอบอีก 1 แรง (แรง **Q**) หาได้จากกฎรูปสามเหลี่ยม โดยการต่อหัวลูกศรแรง **P** ไปยังหัวลูกศรของแรงลัพธ์ **F** ใช้หลัก $\mathbf{Q} = (\mathbf{-P}) + \mathbf{F}$ ดูรูปที่ 2.5

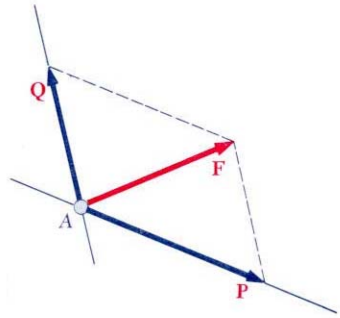


รูปที่ 2.5 (Beer, 1988: 19)

2. รู้แนวทิศทางของแรงองค์ประกอบทั้งสอง และรู้ขนาดและแนวทิศทางของแรงลัพธ์ F

ใช้กฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเขียนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยลากเส้นจากหัวลูกศรของแรงลัพธ์ **F** ให้ขนานกับแนวแรงองค์ประกอบทั้งสอง ไปตัดแนวแรงองค์ประกอบที่จุดใด จะได้ขนาดของแรงองค์ประกอบทั้งสอง ขนาดของแรงองค์ประกอบอาจหาได้จากการวัดขนาดความยาวเส้นตรงตามมาตราส่วน หรือ คำนวณจากวิธีตรีโกณมิติ

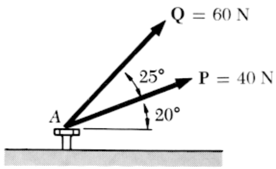
ดูรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 (Beer, 1988: 19)

ตัวอย่าง 2.1

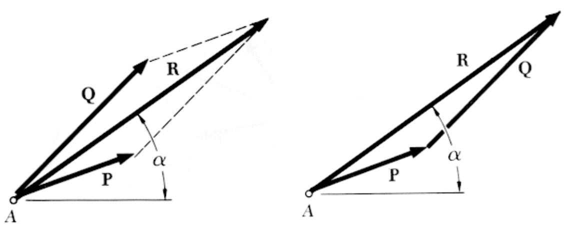
แรง 2 แรง **P** และ **Q** กระทำต่อสลักเกลียว (bolt) A ให้หาแรงลัพธ์ของแรงทั้งสอง



(Beer, 1988: 20)

วิธีกราฟิก

ใช้กฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เขียนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมีความยาวด้านเท่ากับขนาดของแรง **P** และ **Q** ตามมาตราส่วนที่เหมาะสม ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์หาได้จากการวัด ได้ผลคือ



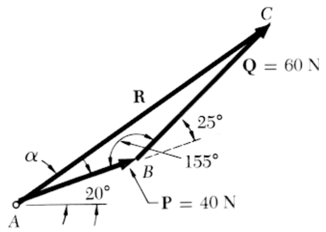
(Beer, 1988: 20)

R = 98 N, $\alpha = 35^\circ$ $\mathbf{R} = 98$ N $\measuredangle$ 35° **ตอบ**

ใช้กฎรูปสามเหลี่ยม เขียนแรง **P** และ **Q** ในลักษณะหัวต่อท้าย ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ได้จากการวัด ได้คำตอบเหมือนกัน

วิธีตรีโกณมิติ

ใช้กฎรูปสามเหลี่ยม โดยรู้ด้าน 2 ด้านและมุม 1 มุม ใช้กฎของโคไซน์



(Beer, 1988: 20)

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$

$$R^2 = (40\text{ N})^2 + (60\text{ N})^2 - 2(40\text{ N})(60\text{ N})\cos 155^\circ$$

$$R = 97.73\text{ N}$$

ใช้กฎของไซน์เพื่อหามุม A

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \qquad \frac{\sin A}{60\text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97.73\text{ N}} \qquad (1)$$

แก้สมการ (1) ได้

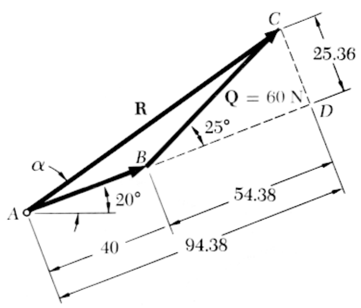
$$\sin A = \frac{(60\text{ N})\sin 155^\circ}{97.73\text{ N}}$$

$$A = 15.04^\circ \qquad \alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ$$

แสดงคำตอบด้วยเลขนัยสำคัญ 3 ตัว

$\mathbf{R} = 97.7\text{ N} \measuredangle 35.0^\circ$ **ตอบ**

วิธีตรีโกณมิติอีกวิธีหนึ่ง เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD แล้วคำนวณ



(Beer, 1988: 20)

$$CD = (60\text{ N})\sin 25^\circ = 25.36\text{ N}$$
$$BD = (60\text{ N})\cos 25^\circ = 54.38\text{ N}$$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD จะได้

$$\tan A = \frac{25.36\text{ N}}{94.38\text{ N}} \qquad A = 15.04^\circ$$
$$R = \frac{25.36\text{ N}}{\sin A} \qquad R = 97.73\text{ N}$$

และ $\alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ$

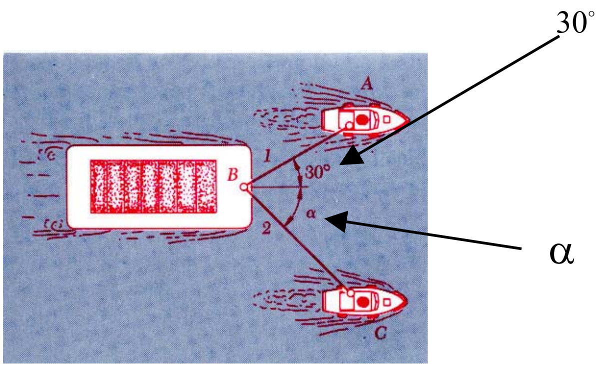
$\mathbf{R} = 97.7\text{ N} \measuredangle 35.0^\circ$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 2.2

เรือบรรทุกสิ่งของ (barge) ลำหนึ่ง ถูกลากจูงโดยเรือลาก (tugboat) 2 ลำ ถ้าแรงลัพธ์ของแรงทั้งสองซึ่งเกิดจากการลากจูงของเรือทั้งสอง มีค่าเท่ากับ 5000 lb มีแนวกระทำอยู่ในแนวแกนของเรือบรรทุกสิ่งของ ให้หา

ก. แรงดึงในแต่ละเส้นเชือก เมื่อ $\alpha = 45^\circ$

ข. ค่าของมุม α ซึ่งทำให้แรงดึงในเส้นเชือกเส้นที่ 2 มีค่าน้อยที่สุด



(Beer, 1988: 21)

ก. แรงดึงในแต่ละเส้นเชือก เมื่อ $\alpha = 45^\circ$

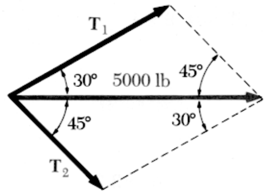
วิธีกราฟิก ใช้กฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ค่าที่รู้แล้วคือ

ขนาดของแรงลัพธ์เท่ากับ 5000 lb แนวทิศทางของแรงลัพธ์มีทิศทางไปทางขวาอยู่ในแนวแกนของเรือบรรทุกสิ่งของ

ทิศทางของแรง $\mathbf{T}_1$ ทำมุมกับแกนเรือบรรทุกสิ่งของเป็นมุม 30°

ทิศทางของแรง $\mathbf{T}_2$ ทำมุมกับแกนเรือบรรทุกสิ่งของเป็นมุม 45°

เขียนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามมาตราส่วน ผลที่ได้คือ ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนานทั้ง 2 ด้านจะแทนขนาดของแรงดึงในเส้นเชือกทั้ง 2 จากการวัดความยาวแล้วแปลงกลับเป็นแรง ได้

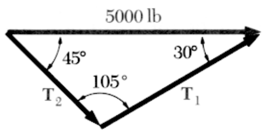


(Beer, 1988: 21)

$T_1 = 3700$ lb $\qquad T_2 = 2600$ lb **ตอบ**

วิธีตรีโกณมิติ

ใช้กฎรูปสามเหลี่ยม โดยการเขียน T_1 และ T_2 ในลักษณะที่หัวลูกศรของ T_2 ต่อเข้าที่ปลายลูกศรของ T_1 แรงลัพธ์ 5000 lb ลากจากปลายลูกศรของ T_2 ไปยังหัวลูกศรของ T_1 เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในวิธีแรก แล้วใช้กฎของไซน์ หาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมที่เหลือทั้ง 2 ด้าน ซึ่งจะแทนขนาดของแรง T_1 และ T_2



(Beer, 1988: 21)

$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5000 \text{ lb}}{\sin 105^\circ}$$

$$T_1 = \frac{5000 \text{ lb}}{\sin 105^\circ}\sin 45^\circ = 3660 \text{ lb} \qquad T_2 = \frac{5000 \text{ lb}}{\sin 105^\circ}\sin 30^\circ = 2590 \text{ lb}$$

$T_1 = 3660$ lb $\qquad T_2 = 2590$ lb **ตอบ**

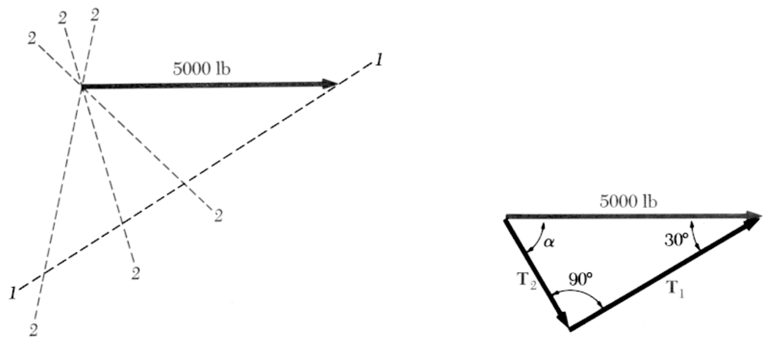
ข. ค่าของมุม α ซึ่งทำให้แรงดึงในเส้นเชือกเส้นที่ 2 (T_2) มีค่าน้อยที่สุด

สิ่งที่รู้ ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ 5000 lb และทิศทางของ T_1

ต้องการหาขนาดของ T_2 ที่น้อยที่สุด และทิศทางของ T_2 ที่น้อยที่สุด(ค่ามุม α)

เขียนขนาดและทิศทางของ 5000 lb จากนั้นเขียนแนวของแรง T_1 (แนว 1-1)

จากปลายลูกศรของแรง 5000 lb แนวแรงของ T_2 ที่อาจเป็นไปได้คือ แนว 2-2 แต่แนวซึ่งทำให้ด้านของรูปสามเหลี่ยมแทนแรง T_2 มีขนาดเล็กที่สุด คือแนวซึ่งตั้งฉากกับแนว 1-1



(Beer, 1988: 21)

ดังนั้นค่าของมุม $\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ขนาดของแรง T_2 ซึ่งน้อยที่สุด คือ

$$T_2 = (5000 \text{ lb})\sin 30^\circ = 2500 \text{ lb}$$

และขนาดของแรง T_1 ซึ่งสัมพันธ์กัน คือ

$$T_1 = (5000 \text{ lb})\cos 30^\circ = 4330 \text{ lb}$$

$T_2 = 2500 \text{ lb} \quad \alpha = 60^\circ$ **ตอบ**