# บทที่ 3

# วัตถุคงรูป : ระบบแรงซึ่งสมมูล

## ( Rigid Bodies : Equivalent Systems of forces )

### 3.1 คำนำ

ในบทนี้ จะกล่าวถึงผลของแรงที่กระทำต่อวัตถุคงรูป และการแทนระบบแรงใด ๆ ด้วยระบบแรงที่ง่าย ๆ ซึ่งสมมูลกับระบบแรงเดิม โดยใช้**หลักการส่งถ่ายแรง** (principle of transmissibility) ที่กล่าวว่า **ผลของแรงต่อวัตถุคงรูปจะยังคงเหมือนเดิม ถ้าแรงถูกเลื่อนไปตามแนวของแรงเดิม** นั่นคือ แรงที่กระทำต่อวัตถุคงรูปอาจแทนได้ด้วยเวกเตอร์ไถล

แนวคิดสำคัญสองประการที่เกี่ยวข้องกับผลของแรงต่อวัตถุคงรูป ได้แก่ **โมเมนต์ของแรงรอบจุด** และ **โมเมนต์ของแรงรอบแกน** การหาปริมาณเหล่านี้เกี่ยวข้องกับการคำนวณ **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** (vector product) และ **ผลคูณเชิงสเกลาร์** (scalar product)

สุดท้ายจะกล่าวถึง **แรงคู่ควบ** (couple) ซึ่งเป็นแรงคู่หนึ่งซึ่งขนานกัน มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน ซึ่งมีความสำคัญใน การแทนระบบแรงใด ๆ ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูป ด้วยระบบแรงซึ่งสมมูลโดยอาจประกอบด้วยแรงเดี่ยว 1 แรงและแรงคู่ควบ 1 คู่ เรียกว่า **ระบบแรงและแรงคู่ควบ** (force-couple system) ในกรณีระบบแรงร่วมจุด ระบบแรงร่วมระนาบ และระบบแรงขนาน สามารถแทนได้ด้วยแรงเดี่ยว 1 แรง เรียกว่า **แรงลัพธ์** (resultant) หรือ แทนได้ด้วยแรงคู่ควบ 1 คู่ เรียกว่า **แรงคู่ควบลัพธ์** (resultant couple)

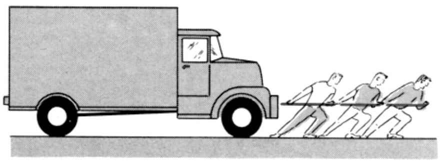
### 3.2 แรงภายนอกและแรงภายใน

แรงซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปอาจแบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม คือ

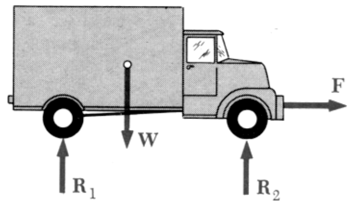
**1. แรงภายนอก** เป็นการกระทำของวัตถุหนึ่งต่อวัตถุคงรูปที่พิจารณา จะมีผลภายนอกต่อวัตถุคงรูปโดยทำให้วัตถุคงรูปเคลื่อนที่ หรือ อยู่นิ่ง

**2. แรงภายใน** เป็นแรงซึ่งยึดอนุภาคต่าง ๆ ที่รวมตัวกันเป็นวัตถุคงรูป ถ้าวัตถุคงรูปประกอบด้วยหลายชิ้นส่วน แรงภายในคือ แรงซึ่งยึดแต่ละชิ้นส่วนไว้ด้วยกัน

ตัวอย่างของแรงภายนอก พิจารณาแรงซึ่งกระทำต่อรถบรรทุกซึ่งเกิดจากคนดึงเชือกทางด้านหน้าของรถบรรทุก ดูรูปที่ 3.1 แรงภายนอกที่กระทำต่อรถบรรทุกแสดงไว้ใน แผนภาพวัตถุอิสระ ดูรูปที่ 3.2 พิจารณาน้ำหนักรถบรรทุกซึ่งแทนด้วยแรงเดี่ยว 1 แรง **W** จุดซึ่งแรงนี้กระทำเรียกว่า **ศูนย์ถ่วง** (center of gravity) ของรถบรรทุก น้ำหนัก **W** มีแนวโน้มทำให้รถบรรทุกเคลื่อนที่ลง นั่นคือทำให้รถบรรทุกตกลงถ้าไม่มีพื้นรองรับ ส่วนพื้นต้านการเคลื่อนที่ลงของรถบรรทุกด้วยแรงปฏิกิริยา $\mathbf{R}_1$ และ $\mathbf{R}_2$ แรงทั้งหมดซึ่งกระทำต่อรถบรรทุกนี้ ถือว่าเป็นแรงภายนอก



**รูปที่ 3.1** (Beer, 1988: 60)



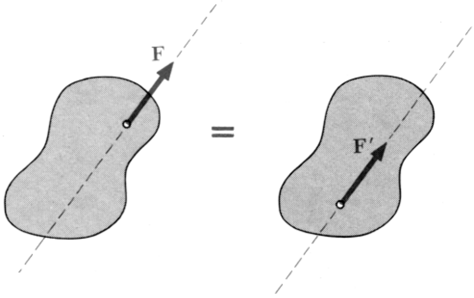

**รูปที่ 3.2** (Beer, 1988: 60)

คนดึงเชือกทำให้เกิดแรง **F** ซึ่งเป็นแรงภายนอกเช่นกัน จุดที่แรง **F** กระทำอยู่ที่ด้านหน้ารถ แรง **F** มีแนวโน้มทำให้รถบรรทุกเคลื่อนที่ไปข้างหน้าในแนวเส้นตรง และ ทำให้รถบรรทุกเคลื่อนที่ไปจริง ๆ เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกมาต้านการเคลื่อนที่ดังกล่าว (ในกรณีนี้ไม่คำนึงถึงแรงต้านทานการกลิ้ง) การเคลื่อนที่ไปข้างหน้านี้ของรถบรรทุกในขณะที่แนวเส้นตรงทั้งหมดยังคงขนานกันอยู่ (พื้นท้องรถยังคงอยู่ในแนวราบและผนังข้างตัวรถยังคงอยู่ในแนวดิ่ง) เรียกว่า **การเลื่อนขนาน** (translation) แรงอื่น ๆ ที่อาจทำให้รถบรรทุกเคลื่อนที่ยากขึ้น เช่น แรงที่เกิดจากแม่แรงที่วางไว้อยู่ใต้เพลาหน้าอาจทำให้รถบรรทุกหมุนรอบเพลาหลัง การเคลื่อนที่ลักษณะนี้ เรียกว่า **การหมุน** (rotation) ดังนั้นอาจสรุปได้ว่าแต่ละแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุคงรูป สามารถทำให้วัตถุคงรูปมีการเคลื่อนที่แบบ เลื่อนขนาน หรือ หมุน หรือ ทั้งสองแบบ

### 3.3 หลักการส่งถ่ายแรงและแรงที่สมมูล

หลักการส่งถ่ายแรง กล่าวว่า สภาวะสมดุลหรือการเคลื่อนที่ของวัตถุคงรูปจะยังคงเดิม ถ้าแรง **F** ที่กระทำต่อวัตถุที่จุดหนึ่งจุดใดของวัตถุคงรูป ถูกแทนด้วยแรง **F’** ซึ่งมีขนาดเท่ากันและทิศทาง

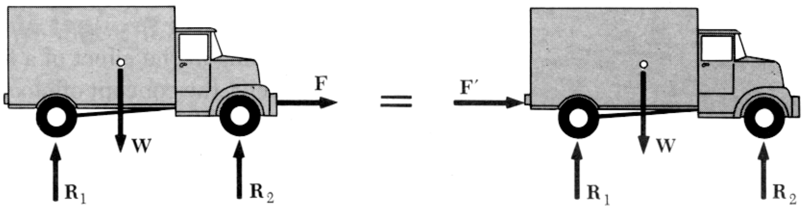
เหมือนกัน แต่กระทำที่จุดอื่นซึ่งอยู่ในแนวเส้นตรงของแนวแรงเดิม ดูรูปที่ 3.3 แรง **F** และ **F’** ซึ่งมีผลต่อวัตถุคงรูปเหมือนกัน เป็นแรงซึ่ง **สมมูลกัน** หลักการนี้ซึ่งกล่าวถึงความจริงที่ว่า การกระทำของแรงหนึ่งแรงใดอาจถูกส่งถ่ายไปตามแนวการกระทำของแรงนั้น มีพื้นฐานจากหลักฐานเชิงทดลอง




**รูปที่ 3.3** (Beer, 1988: 61)

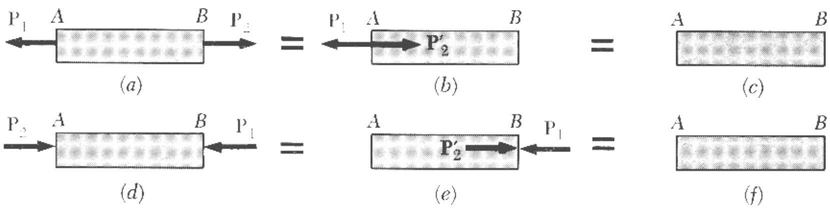
ดังได้กล่าวในบทที่ 2 ว่า แรงต่าง ๆ ที่กระทำต่ออนุภาคอาจแทนได้ด้วย เวกเตอร์ เวกเตอร์เหล่านี้ถูกระบุจุดซึ่งกระทำที่แน่นอน ซึ่งได้แก่อนุภาคนั้น ๆ เวกเตอร์เหล่านี้เรียกว่า เวกเตอร์ตรึง อย่างไรก็ตามในกรณีของแรงที่กระทำต่อวัตถุคงรูป จุดที่แรงกระทำไม่มีความสำคัญ ตราบเท่าที่แนวของการกระทำยังคงเหมือนเดิม นั่นคือแรงที่กระทำต่อวัตถุคงรูป อาจแทนได้ด้วยเวกเตอร์ไถล โดยเวกเตอร์นี้สามารถไถลไปตามแนวการกระทำของแรงเดิม โดยไม่ทำให้ผลภายนอกต่อวัตถุคงรูปเปลี่ยนไป

จากตัวอย่างรถบรรทุก แนวการกระทำของแรง **F** อยู่ในแนวราบ ผ่านทั้งทางด้านหน้าและด้านท้ายของรถบรรทุก ดูรูปที่ 3.4 ดังนั้นจากหลักการส่งถ่ายแรง อาจแทนแรง **F** ด้วยแรงซึ่งสมมูล **F’** กระทำที่ด้านท้ายรถ หรือ อาจกล่าวได้ว่า สภาวะการเคลื่อนที่ของรถบรรทุกจะไม่ถูกกระทบ และแรงภายนอกอื่น ๆ ทั้งหมดที่กระทำต่อรถบรรทุก ($\mathbf{W}$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$) ยังคงเหมือนเดิม ถ้าคนไปผลักที่ด้านท้ายรถ แทนการดึงที่ด้านหน้ารถ




**รูปที่ 3.4** (Beer, 1988: 61)

อย่างไรก็ตาม หลักการส่งถ่ายแรงและแนวคิดของแรงซึ่งสมมูลนั้นมีข้อจำกัด พิจารณาแท่งวัตถุ AB ถูกกระทำด้วยแรงในแนวแกนซึ่งเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน $\mathbf{P}_1$ และ $\mathbf{P}_2$ ดังรูปที่ 3.5(a) จากหลักการส่งถ่ายแรง แรง $\mathbf{P}_2$ อาจแทนด้วยแรง $\mathbf{P}_2$' ซึ่งมีขนาดและทิศทางและแนวการกระทำเหมือนเดิม แต่กระทำที่จุด A แทนที่จุด B ดูรูปที่ 3.5(b) แรง $\mathbf{P}_1$ และ $\mathbf{P}_2$' ซึ่งกระทำต่ออนุภาคเดียวกัน จะหักล้างกันหมดไป ดังนั้นระบบแรงเดิมในรูปที่ 3.5(a) จะสมมูลกับระบบซึ่งไม่มีแรงกระทำเลย **จากมุมมองของผลภายนอก**ต่อแท่งวัตถุ ดูรูปที่ 3.5(c)




**รูปที่ 3.5** (Beer, 1988: 62)

พิจารณาแท่งวัตถุ AB ถูกกระทำด้วยแรงในแนวแกนซึ่งเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน $\mathbf{P}_1$ และ $\mathbf{P}_2$ ดังรูปที่ 3.5(d) แรง $\mathbf{P}_2$ อาจแทนด้วยแรง $\mathbf{P}_2$' ซึ่งมีขนาดและทิศทางและแนวการกระทำเหมือนเดิม แต่กระทำที่จุด B แทนที่จุด A ดูรูปที่ 3.5(e) แรง $\mathbf{P}_1$ และ $\mathbf{P}_2$' ซึ่งกระทำต่ออนุภาคเดียวกัน จะหักล้างกันหมดไป ดังนั้นระบบแรงเดิมในรูปที่ 3.5(d) จะสมมูลกับระบบซึ่งไม่มีแรงกระทำเลย ดูรูปที่ 3.5(f)

จากมุมมองของกลศาสตร์ของวัตถุคงรูป ระบบที่แสดงในรูปที่ 3.5(a) และ 3.5(d) ต่างก็สมมูลกัน แต่**แรงภายในและการเปลี่ยนรูป**ที่เกิดขึ้นในระบบทั้งสองแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด แท่งวัตถุในรูปที่ 3.5(a) ถูกดึงให้ยืดตัวเล็กน้อยถ้ามันไม่คงรูปอย่างสมบูรณ์ ส่วนแท่งวัตถุในรูปที่ 3.5(d) ถูกอัดให้หดตัวเล็กน้อยถ้ามันไม่คงรูปอย่างสมบูรณ์ ดังนั้นในขณะที่หลักการส่งถ่ายแรงสามารถใช้ได้อย่างอิสระในการหาสภาพการเคลื่อนที่หรือสมดุลของวัตถุคงรูป และคำนวณหาแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุคงรูปได้ **ควรหลีกเลี่ยง**การใช้หลักการส่งถ่ายแรงหรือใช้อย่างระมัดระวัง **ในการหาแรงภายในและการเปลี่ยนรูปของวัตถุ**

**3.4 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์**

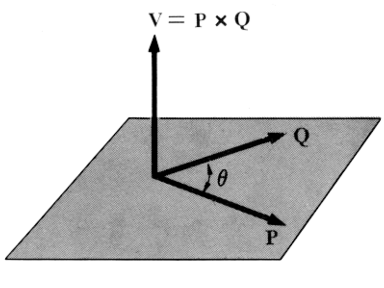
เพื่อให้เข้าใจผลของแรงต่อวัตถุคงรูปดีขึ้น จะได้แนะนำแนวคิดเกี่ยวกับ โมเมนต์ของแรงรอบจุด แนวคิดนี้จะเข้าใจได้ชัดเจนขึ้นและสามารถนำไปใช้อย่างมีประสิทธิผล ถ้าใช้เครื่องมือเชิงคณิตศาสตร์ โดยการให้นิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์

ให้ เวกเตอร์ **V** เป็น ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ **P** และ **Q**
เวกเตอร์ **V** ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขดังนี้

1. แนวการกระทำของ **V** ต้องตั้งฉากกับระนาบซึ่งประกอบขึ้นจาก **P** และ **Q** ดูรูปที่ 3.6
2. ขนาดของ **V** จะเท่ากับผลคูณของขนาดของ **P** และ **Q** และค่า sin ของมุม $\theta$ ซึ่งเป็นมุมระหว่างแนวของ **P** และ **Q** โดย $\theta \le 180^\circ$ จะได้

$$V = PQ\sin\theta \qquad (3.1)$$

3. ทิศทางของ **V** หาได้จาก กฎมือขวา ในกรณี $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ ให้เริ่มจาก **P** ใช้มือขวา นิ้ว 4 นิ้วชี้ไปตามทิศทางของ **P** แล้วจากนั้นกำนิ้วมือทั้ง 4 เข้าหาทิศทางของ **Q** โดยให้นิ้วมือทั้ง 4 นั้นหมุนงอไปตามค่ามุม $\theta$ จาก **P** ไปยัง **Q** ด้วยมุมซึ่งน้อยกว่า 180 องศา จะได้ทิศทางของ **V** พุ่งชี้ไปตามทิศทางการชี้ของนิ้วหัวแม่มือขวา (ข้อสังเกต แกน x, y และ z ซึ่งแสดงในบทที่ 2 เป็นไปตามกฎมือขวานี้เช่นกัน)




**รูปที่ 3.6** (Beer, 1988: 62)

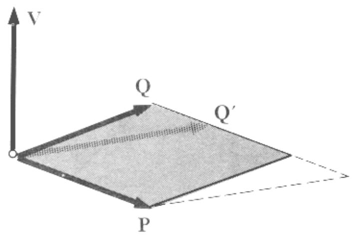
ถ้าเวกเตอร์ **V** เป็นไปตามภายใต้เงื่อนไขทั้ง 3 ข้อดังกล่าว เวกเตอร์ **V** เป็นผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ **P** และ **Q** ซึ่งเขียนเป็นนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ได้เป็น

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \tag{3.2}$$

เนื่องจากการใช้สัญลักษณ์ คูณ (cross) ทำให้มีชื่อเรียกอีกอย่างว่า **ผลคูณไขว้** (cross product)

จากสมการ (3.1) ถ้า **P** และ **Q** มีทิศทางไปในทิศทางเดียวกัน $(\theta = 0^\circ)$ หรือมีทิศทางตรงข้ามกันกัน $(\theta = 180^\circ)$ จะทำให้ผลคูณเชิงเวกเตอร์มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก $\sin 0^\circ$ และ $\sin 180^\circ$ มีค่าเท่ากับศูนย์

ขนาด $V$ จาก $V = PQ\sin\theta$ คือขนาดของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีด้าน 2 ด้านแทนขนาดของ **P** และ **Q** นั่นเอง ดูรูปที่ 3.7




**รูปที่ 3.7** (Beer, 1988: 63)

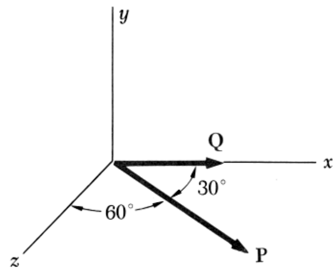
ดังนั้นผลคูณเชิงเวกเตอร์ $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ จะยังคงมีค่าเท่าเดิมถ้าแทนที่ **Q** ด้วย **Q’** ซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกันกับ **P** และ **Q** และแนวที่ลากผ่านหัวลูกศรของเวกเตอร์ **Q** และ **Q’** ขนานกับแนวของ **P** เขียนได้เป็น

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q'} \tag{3.3}$$

จากเงื่อนไขข้อ 3 ทิศทางของ **V** เป็นไปตามกฎมือขวา ทำให้ผลคูณเชิงเวกเตอร์ สลับที่ไม่ได้ (not commutative) นั่นคือ $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ และจากการหาทิศทางของ **V** จาก $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ จะพบว่ามีทิศทางตรงข้ามกับ $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ นั่นคือ

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -(\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) \tag{3.4}$$

ยกตัวอย่าง เช่น ต้องการคำนวณหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ โดย $\mathbf{P}$ มีขนาดเท่ากับ 6 และอยู่ในระนาบ zx และทำมุมกับแกน x เท่ากับ $30^\circ$ ส่วน $\mathbf{Q}$ มีขนาดเท่ากับ 4 มีทิศทางไปในแนวแกน x ดูรูปที่ 3.8




**รูปที่ 3.8** (Beer, 1988: 63)

จากนิยามของผลคูณเชิงเวกเตอร์ จะได้ทิศทางของ **V** อยู่ในแนวแกน y และมีทิศทางพุ่งชี้ขึ้นไปตามทิศทางของแกน y และขนาดของ **V** จะได้จาก

$$V = PQ\sin\theta$$

$$V = (6)(4)\sin 30^\circ = 12 \text{ มีทิศทางพุ่งชี้ขึ้น}$$ **ตอบ**

**สมบัติการแจกแจง** (distributive property) **ใช้ได้**สำหรับผลคูณเชิงเวกเตอร์ นั่นคือ

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \tag{3.5}$$

**สมบัติการเปลี่ยนหมู่** (associative property) **ใช้ไม่ได้** สำหรับผลคูณเชิงเวกเตอร์ นั่นคือ

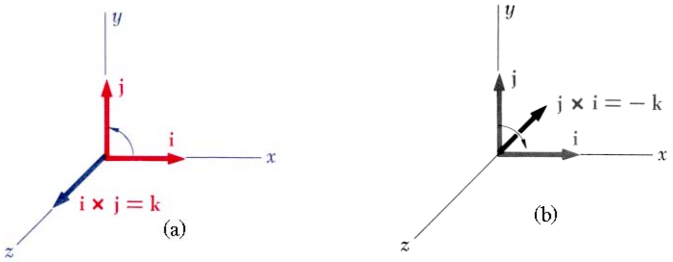
$$(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S) \tag{3.6}$$

### 3.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก

การหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสำหรับแต่ละคู่ระหว่าง $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ พิจารณาผลคูณ $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ ดูรูปที่ 3.9(a) จากกฎมือขวาจะได้ทิศทางของผลคูณพุ่งชี้ไปตามแกน z และขนาดของผลคูณเท่ากับ $1 \times 1 \sin 90^\circ$ เท่ากับ 1 หน่วย นั่นก็คือผลคูณของ $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ นั่นเอง ในทำนองเดียวกัน

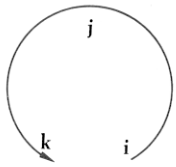
$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$ ดูรูปที่ 3.9(b) ส่วนในกรณี $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0}$ เนื่องจาก **i** อยู่ในทิศทางเดียวกัน $\theta=0^\circ$ จะได้ $\sin 0^\circ=0$ สรุปได้ว่า

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=0 & \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0} & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0 \end{array} \tag{3.7}$$




**รูปที่ 3.9** (Beer, 1988: 65)

นั่นคือผลคูณเชิงเวกเตอร์จะเป็น **บวก** เมื่อการเรียงลำดับของตัวคูณวนทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 3.10




**รูปที่ 3.10** (Beer, 1988: 65)

มิฉะนั้นค่าของผลคูณเชิงเวกเตอร์จะเป็น **ลบ**

จะเป็นการง่ายขึ้น ที่จะแสดงผลคูณเชิงเวกเตอร์ **V** ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ **P** และ **Q** ในรูปของเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก โดยแยก **P** และ **Q** เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ ดังนี้

$$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k} \qquad \text{และ} \qquad \mathbf{Q}=Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}$$

ให้ **V** เป็น ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ **P** และ **Q** ได้

$$\mathbf{V}=\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=\left(P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}\right)\times\left(Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}\right)$$

ใช้สมบัติการแจกแจง ได้

$$\mathbf{V} = \left(P_yQ_z - P_zQ_y\right)\mathbf{i} + \left(P_zQ_x - P_xQ_z\right)\mathbf{j} + \left(P_xQ_y - P_yQ_x\right)\mathbf{k} \qquad (3.8)$$

ขนาดของเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉากของ **V** ในแกน x, y, z คือ

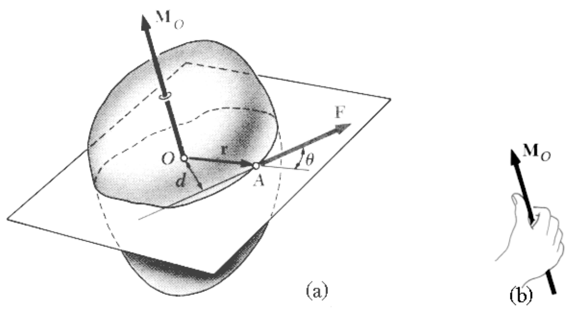
$$\begin{aligned} V_x &= P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y &= P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z &= P_xQ_y - P_yQ_x \end{aligned} \qquad (3.9)$$

ในสมการ (3.8) เทอมทางขวามืออาจหาได้มาจากการกระจาย **ดีเทอร์มิแนนต์** (determinant) และผลคูณเชิงเวกเตอร์ **V** สามารถเขียนในรูปซึ่งจำได้ง่ายดังนี้

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (3.10)$$

### 3.6 โมเมนต์ของแรงรอบจุด

พิจารณาแรง **F** ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปหนึ่ง ดูรูปที่ 3.11 แรง **F** แทนด้วยเวกเตอร์ซึ่งบอกทั้งขนาดและทิศทาง ผลของแรงต่อวัตถุคงรูปนี้ขึ้นกับตำแหน่งของจุด A ซึ่งแรงกระทำ ตำแหน่งของจุด A บอกด้วยเวกเตอร์ **r** ซึ่งลากจากจุด *O* ซึ่งเป็นจุดอ้างอิงตรึงไปยังจุด A เรียกเวกเตอร์ **r** นี้ว่า **เวกเตอร์ตำแหน่ง** (position vector) ของ A โดย **r** และ **F** อยู่ในระนาบเดียวกัน ดูรูปที่ 3.11(a)




**รูปที่ 3.11** (Beer, 1988: 66)

นิยามของ โมเมนต์ของแรง **F** รอบ $O$ คือ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ **r** และ **F** ดังนี้

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

จากนิยามของผลคูณเชิงเวกเตอร์ ทำให้ โมเมนต์ $\mathbf{M}_O$ มีแนวกระทำตั้งฉากกับระนาบซึ่งประกอบขึ้นจาก **r** และ **F** และจากกฎมือขวาจะได้ทิศทางของ $\mathbf{M}_O$ พุ่งชี้ขึ้นโดยมี $\theta$ เป็นมุมระหว่าง **r** และ **F** จะได้ขนาดของ $\mathbf{M}_O$ ซึ่งเป็นโมเมนต์ของแรง **F** รอบ $O$ ดังนี้

$$M_O = rF\sin\theta = Fd \tag{3.12}$$

เมื่อ d เป็นระยะตั้งฉากจาก $O$ ไปยังแนวแรง **F**

เนื่องจากแนวโน้มของแรง **F** ที่ทำให้วัตถุคงรูปหมุนรอบแกนตรึงซึ่งตั้งฉากกับแนวแรง ขึ้นกับระยะของ **F** จากแกนนั้น และยังขึ้นกับขนาดของแรง **F** ด้วยเช่นกัน สังเกตว่า ขนาดของ $\mathbf{M}_O$ เป็นตัววัดแนวโน้มของแรง **F** ที่ทำให้วัตถุคงรูปหมุนรอบแกนตรึงซึ่งชี้ไปตาม $\mathbf{M}_O$

ในระบบหน่วยระหว่างชาติ หน่วยของแรงเป็นนิวตัน (N) และหน่วยของระยะทางเป็นเมตร (m) หน่วยของโมเมนต์จึงเป็น **นิวตัน-เมตร** (N.m)
ในระบบหน่วยของอเมริกัน หน่วยของแรงเป็น ปอนด์ (lb) และหน่วยของระยะทางเป็นฟุต (ft) หน่วยของโมเมนต์จึงเป็น **ปอนด์-ฟุต** (lb-ft)

ข้อสังเกต โมเมนต์ $\mathbf{M}_O$ ของแรงใด ๆ รอบจุดหนึ่ง จะขึ้นกับ ขนาด แนวกระทำและทิศทางของแรงนั้น แต่ไม่ขึ้นกับจุดหรือตำแหน่งจริง ๆ ที่แรงนั้นกระทำ

แนวแรง **F** ต้องอยู่ในระนาบซึ่งผ่าน $O$ และระนาบนั้นต้องตั้งฉากกับโมเมนต์ $\mathbf{M}_O$ ระยะ d จาก $O$ ต้องเท่ากับ $M_O/F$ และทิศทางของ $\mathbf{M}_O$ เป็นตัวกำหนดว่าแนวกระทำของแรง **F** จะอยู่ทางด้านใดของจุด $O$

จากหลักการส่งถ่ายแรง ที่กล่าวว่า แรงสองแรง **F** และ **F’** จะสมมูลกัน(นั่นคือมีผลต่อวัตถุคงรูปเหมือนกัน) ถ้าแรงทั้งสองมีขนาดเท่ากัน มีทิศทางเดียวกัน และมีแนวการกระทำแนวเดียวกัน

หลักการนี้อาจกล่าวใหม่ได้ว่า แรงสองแรง **F** และ **F’** จะสมมูลกัน ก็ต่อเมื่อ แรงทั้งสองเท่ากัน(มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน) และมีโมเมนต์รอบจุด $O$ ใด ๆ เท่ากัน

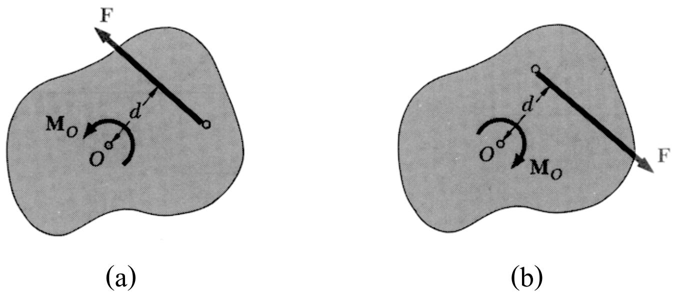
ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ แรงสองแรงจะสมมูลกัน เป็นดังนี้

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \qquad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O' \tag{3.13}$$

**ปัญหาซึ่งเกี่ยวข้องเฉพาะ 2 มิติ**

ในการประยุกต์เกี่ยวกับโครงสร้าง 2 มิติ ได้แก่โครงสร้างซึ่งสมมติให้มีเฉพาะความกว้างและความยาวเท่านั้น เนื่องจากมีความหนาน้อยมากเมื่อเทียบกับความกว้างและยาว ดังนั้นจึงพิจารณาให้แรงต่าง ๆ กระทำอยู่ในระนาบของโครงสร้างนั้น ซึ่งระนาบดังกล่าวอาจแทนได้ด้วยแผ่นกระดาษหรือแผ่นกระดานดำ

พิจารณาแผ่นพื้นคงรูป ซึ่งถูกกระทำโดยแรง **F** ดูรูปที่ 3.12 โมเมนต์ของแรง **F** รอบจุด $O$ ในระนาบของแผ่นนี้ เขียนแทนได้ด้วยเวกเตอร์ $\mathbf{M}_O$ ซึ่งมีแนวกระทำตั้งฉากกับระนาบนี้ มีขนาดเท่ากับ $Fd$ ในกรณีรูปที่ 3.12(a) ทิศทางของ $\mathbf{M}_O$ จะพุ่งชี้ออกมาจากกระดาษ ส่วนกรณีรูปที่ 3.13(b) ทิศทางของ $\mathbf{M}_O$ จะพุ่งชี้เข้าไปในกระดาษ ในกรณีรูปที่ 3.12(a) แรง **F** กระทำในแนวทิศทางทวนเข็มนาฬิการอบจุด $O$ ส่วนในกรณีรูปที่ 3.12(b) แรง **F** กระทำในแนวทิศทางตามเข็มนาฬิการอบจุด $O$




**รูปที่ 3.12** (Beer, 1988: 67)

เนื่องจากโมเมนต์ของแรง **F** ซึ่งกระทำในระนาบใด ๆ จะมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบนั้น ดังนั้นเพียงแต่บอกขนาดและทิศทาง(พุ่งชี้ขึ้นหรือลง) ของโมเมนต์ของแรง **F** ก็เพียงพอ นั่นคืออาจกำหนดเครื่องหมาย **บวก** สำหรับโมเมนต์ของแรง **F** ซึ่ง**หมุนทวนเข็ม** แสดงว่าทิศทางของ

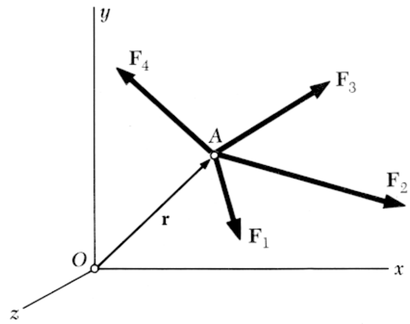
โมเมนต์พุ่งชี้ขึ้นมาจากกระดาษ และกำหนดเครื่องหมาย **ลบ** สำหรับโมเมนต์ของแรง **F** ซึ่ง **หมุนตามเข็ม** แสดงว่าทิศทางของโมเมนต์พุ่งเข้าไปในกระดาษ

**3.7 ทฤษฎีของวาริยอง (Varignon's Theorem)**

จากสมบัติการแจกแจงของผลคูณของเวกเตอร์ อาจใช้หา โมเมนต์ของแรงลัพธ์ซึ่งเกิดจากระบบแรงร่วมจุด ให้แรง $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots$ กระทำที่จุด A เดียวกัน และให้ **r** เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด A ดูรูปที่ 3.13 จะได้

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \ldots \qquad (3.14)$$

สรุปได้ว่า โมเมนต์ของแรงลัพธ์ซึ่งเกิดจากระบบแรงร่วมจุดหลายแรง เท่ากับ ผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งหลายนั้นรอบจุด *O* เดียวกัน

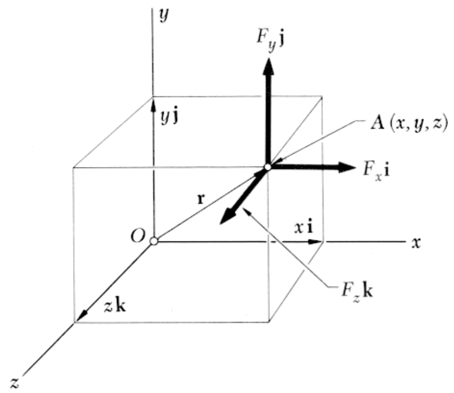



**รูปที่ 3.13** (Beer, 1988: 68)

**3.8 โมเมนต์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก**

โดยทั่วไปในการหาโมเมนต์ของแรงใด ๆ ในปริภูมิ จะเป็นการง่ายถ้าแยกแรงนั้นและ เวกเตอร์ตำแหน่ง ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก ในแกน x, y, z

ให้โมเมนต์ $\mathbf{M}_O$ เป็นโมเมนต์รอบ $O$ ที่เกิดจากแรง **F** ซึ่งมีแรงองค์ประกอบ $F_x, F_y, F_z$ กระทำที่จุด A โดยจุด A มีพิกัด x, y, z ดูรูปที่ 3.14 จะเห็นว่าองค์ประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่ง **r** จะเท่ากับค่าพิกัด x, y, z ของจุด A นั่นเอง เขียนได้เป็น




**รูปที่ 3.14** (Beer, 1988: 68)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.16}$$

แทนค่า **r** และ **F** จากสมการ (3.15) และ (3.16) ลงในสมการ (3.11)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \tag{3.17}$$

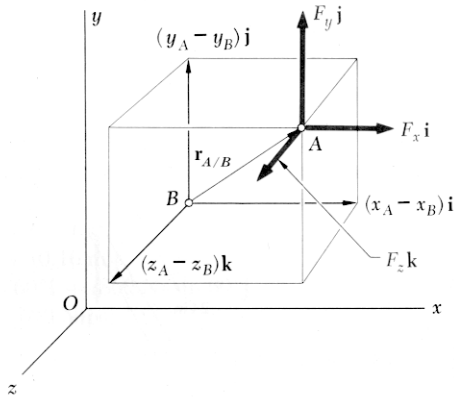
เขียนโมเมนต์องค์ประกอบ $M_x, M_y, M_z$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

อาจเขียน $\mathbf{M}_O$ ในรูปของ **ดีเทอร์มิแนนต์** ดังนี้

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

**การคำนวณหาโมเมนต์ $\mathbf{M}_B$ รอบจุด B** เนื่องจากแรง **F** ซึ่งกระทำที่จุด A ดูรูปที่ 3.15 ในกรณีนี้เวกเตอร์ตำแหน่งเป็น เวกเตอร์ที่ลากจาก B ไปยัง A เวกเตอร์นี้เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของ A สัมพัทธ์กับ B แทนด้วย $\mathbf{r}_{A/B}$ จะเห็นว่า $\mathbf{r}_{A/B}$ อาจหาได้จาก $\mathbf{r}_A$ ลบด้วย $\mathbf{r}_B$




**รูปที่ 3.15** (Beer, 1988: 69)

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{3.20}$$

เขียนในรูปดีเทอร์มิแนนต์

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

เมื่อ $x_{A/B}, y_{A/B}, z_{A/B}$ แทนองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\mathbf{r}_{A/B}$ โดย

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

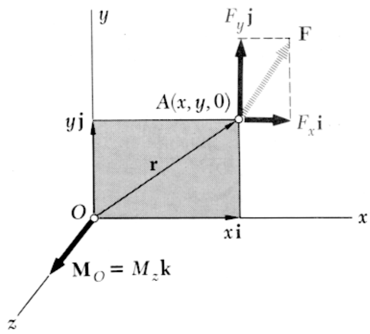
**ในกรณีของปัญหาซึ่งเกี่ยวข้องกับ 2 มิติเท่านั้น** แรง **F** อาจสมมติให้อยู่ในระนาบ xy ดูรูปที่ 3.16 โดยให้ $z = 0$ และ $F_z = 0$ จากสมการ (3.19) ได้

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

โมเมนต์ของแรง **F** รอบ $O$ มีแนวตั้งฉากกับระนาบของรูป แสดงเป็นปริมาณ สเกลาร์ ได้ดังนี้

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \tag{3.22}$$

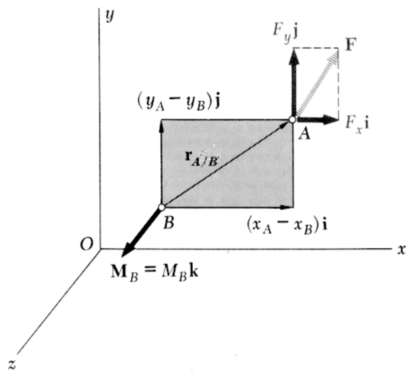
ตามที่เคยให้ข้อสังเกตว่า ค่าบวกของ $M_O$ ชี้ว่าเวกเตอร์ $\mathbf{M}_O$ พุ่งชี้ออกมาจากกระดาษ(แรง **F** มีแนวโน้มหมุนวัตถุทวนเข็มนาฬิการอบ $O$) และ ค่าลบ ชี้ว่าเวกเตอร์ $\mathbf{M}_O$ พุ่งชี้เข้าหากระดาษ (แรง **F** มีแนวโน้มหมุนวัตถุตามเข็มนาฬิการอบ $O$)




**รูปที่ 3.16** (Beer, 1988: 69)

ในการคำนวณหาโมเมนต์รอบ B ($x_B$, $y_B$) ของแรงซึ่งอยู่ในระนาบ xy และกระทำที่ A ($x_A$, $y_A$) ดูรูปที่ 3.17 ให้ $z_{A/B} = 0$ และ $F_z = 0$ จากสมการ (3.21) และตรวจสอบว่าเวกเตอร์ มีแนวตั้งฉากกับกับระนาบ xy แสดงเป็นปริมาณ สเกลาร์ ได้ดังนี้

$$M_B = \left(x_A - x_B\right)F_y - \left(y_A - y_B\right)F_x \tag{3.23}$$




**รูปที่ 3.17** (Beer, 1988: 69)