ตัวอย่าง 3.1

แรง 100 lb ในแนวดิ่งกระทำที่จุด A ให้หา

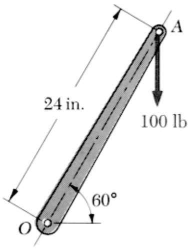
ก. โมเมนต์ของแรง 100 lb รอบ O

ข. ขนาดของแรงในแนวราบซึ่งกระทำที่จุด A โดยทำให้เกิดโมเมนต์รอบ O เท่าเดิม

ค. แรงที่น้อยที่สุดซึ่งกระทำที่จุด A แล้วทำให้เกิดโมเมนต์รอบ O เท่าเดิม

ง. แรงในแนวดิ่งขนาด 240 lb ต้องกระทำห่างจาก O เท่าใดจึงทำให้เกิดโมเมนต์รอบ O เท่าเดิม

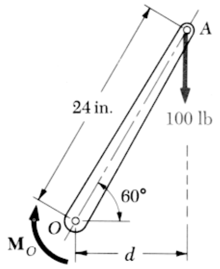
จ. มีแรงใดบ้างจากข้อ ข. ค. ง. สมมูล กับแรงเดิม



(Beer, 1988: 70)

วิธีทำ

ก. โมเมนต์ของแรง 100 lb รอบ O



(Beer, 1988: 70)

ระยะซึ่งลากจาก O ไปตั้งฉากกับแนวแรง 100 lb คือ

$$d = (24\text{ in})\cos 60^\circ = 12\text{ in}$$

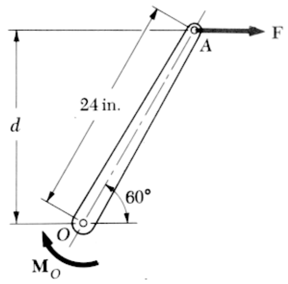
ขนาดของโมเมนต์รอบ O ของแรง 100 lb คือ

$$M_O = Fd = (100\text{ lb})(12\text{ in}) = 1200\text{ lb.in}$$

เนื่องจากแรงนี้พยายามหมุนวัตถุตามเข็มนาฬิการอบ O ค่าโมเมนต์นี้ก็คือเวกเตอร์ $\mathbf{M}_O$ ซึ่งมีแนวตั้งฉากกับระนาบของภาพดังกล่าว โดยมีทิศพุ่งชี้เข้าไปในกระดาษ

$\mathbf{M}_O = 1200$ lb.in ↻ **ตอบ**

ข. ขนาดของแรงในแนวราบซึ่งกระทำที่จุด A โดยทำให้เกิดโมเมนต์รอบ *O* เท่าเดิม



(Beer, 1988: 70)

ในกรณีนี้ระยะจาก O ไปตั้งฉากกับแนวแรงคือ

$$d = (24\ \text{in})\sin 60^\circ = 20.8\ \text{in}$$

และเนื่องจากโมเมนต์รอบ O ต้องเท่าเดิมคือเท่ากับ 1200 lb.in

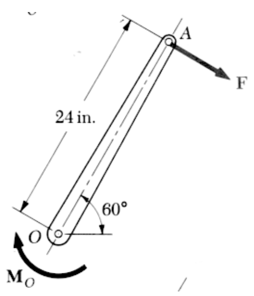
จาก $$M_O = Fd$$

$$1200\ \text{lb.in} = F(20.8\ \text{in})$$

$$F = 57.7\ \text{lb}$$

$\mathbf{F} = 57.7\ \text{lb} \rightarrow$ **ตอบ**

ค. แรงที่น้อยที่สุดซึ่งกระทำที่จุด A แล้วทำให้เกิดโมเมนต์รอบ *O* เท่าเดิม



(Beer, 1988: 70)

จาก $$M_O = Fd$$

แรง F จะน้อยที่สุดเมื่อค่า d มากที่สุด

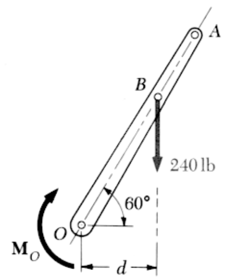
เลือกแรงซึ่งมีแนวกระทำตั้งฉากกับแนว OA ได้ d = 24 in ดังนั้น

$$1200\ \text{lb.in} = F(24\ \text{in})$$

$$F = 50\ \text{lb}$$

$\mathbf{F} = 50\ \text{lb}\ \searrow\ 30^\circ$ **ตอบ**

ง. แรงในแนวดิ่งขนาด 240 lb ต้องกระทำห่างจาก O เท่าใดจึงทำให้เกิดโมเมนต์รอบ O เท่าเดิม



(Beer, 1988: 70)

หาระยะ d จาก

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb.in} = (240 \text{ lb})d \qquad d = 5 \text{ in}$$

หาระยะซึ่งวัดจาก O ไปตามแนว OA จาก

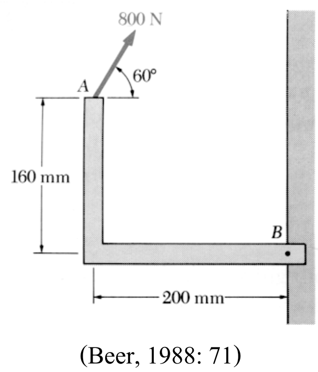
$$OB\cos 60^\circ = d$$

$OB = 10$ in **ตอบ**

ง. แรงจากข้อ ข. ค. ง. ไม่มีแรงใดสมมูลกับแรงเดิมเลย แม้ว่าแต่ละแรงจะให้ค่าโมเมนต์รอบ O เท่ากัน แต่เนื่องจากแต่ละแรงมีแรงองค์ประกอบในแกน x, y ต่างกัน พูดอีกนัยหนึ่งคือ แม้ผลของแรงแต่ละแรงจะทำให้วัตถุนี้หมุนในลักษณะที่เหมือนกัน แต่ แต่ละแรงดึงวัตถุนี้ในลักษณะที่แตกต่างกัน (แรงจะสมมูลกันก็ต่อเมื่อ 1.มีขนาดเท่ากัน 2. มีทิศทางเดียวกัน 3. มีโมเมนต์รอบจุดใด ๆ เท่ากัน)

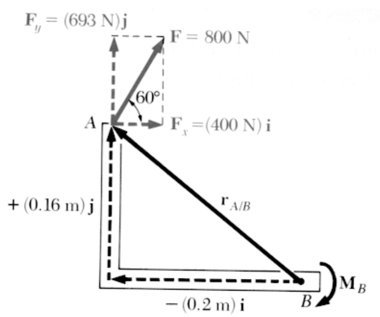
ตัวอย่าง 3.2

แรง 800 N กระทำต่อชุดโครงรับที่ยื่นออกมาจากกำแพง (bracket) ให้หาโมเมนต์รอบ B, $\mathbf{M}_B$ ซึ่งเกิดจากแรงนี้กระทำที่ A



(Beer, 1988: 71)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 71)

จาก $\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$

เมื่อ $\mathbf{r}_{A/B}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งลากจากจุด B ไปยัง A แยกแวคเตอร์ $\mathbf{r}_{A/B}$ ให้เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก (อยู่ในแกน x และ y)

$$\mathbf{r}_{A/B} = -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}$$

ทำนองเดียวกันแยกแรง $\mathbf{F}$ ให้เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก (อยู่ในแกน x และ y)

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = (800 \text{ N})\cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N})\sin 60^\circ \mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}$$

จากสมการ (3.7) สำหรับผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะได้

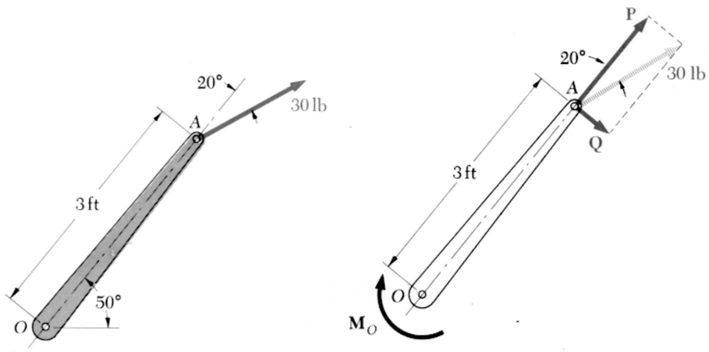
$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = \left[-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}\right] \times \left[(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}\right]$$
$$\mathbf{M}_B = -(138.6 \text{ N.m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N.m})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M}_B = -(202.6 \text{ N.m})\mathbf{k}$$

$\mathbf{M}_B = 203$ N.m **ตอบ**

นั่นคือโมเมนต์ $\mathbf{M}_B$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีแนวตั้งฉากระนาบของภาพนั้น และมีทิศทางชี้พุ่งเข้าไปในกระดาษ

ตัวอย่าง 3.3

แรง 30 lb กระทำต่อปลายคันโยก (lever) ที่ A ให้หาโมเมนต์ของแรงนี้รอบ O



(Beer, 1988: 71)

วิธีทำ

กรณีนี้แยกแรง 30 lb ให้เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก โดยมีแรงองค์ประกอบ 1 แรงอยู่ในแนว OA และแรงองค์ประกอบอีกแรงอยู่ในแนวตั้งฉากกับแนว OA แนวแรงองค์ประกอบซึ่งมีแนวผ่านจุดหมุน O ไม่ก่อให้เกิดโมเมนต์รอบจุดหมุน O นั้น นั่นคือโมเมนต์รอบ O เนื่องจากแรงซึ่งมีแนวแรงผ่านจุดหมุนมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะเหลือเฉพาะแรงองค์ประกอบซึ่งอยู่ในแนวตั้งฉากกับ OA ที่พยายามหมุนวัตถุนี้ตามเข็มนาฬิกา โดยจะทำให้เกิดโมเมนต์ซึ่งมีทิศทางชี้พุ่งเข้าไปในกระดาษในแนวตั้งฉากกับรูปภาพบนกระดาษ แสดงในรูปเครื่องหมายลบในปริมาณสเกลาร์

$$Q = (30\text{ lb})\sin 20^\circ = 10.26\text{ lb}$$

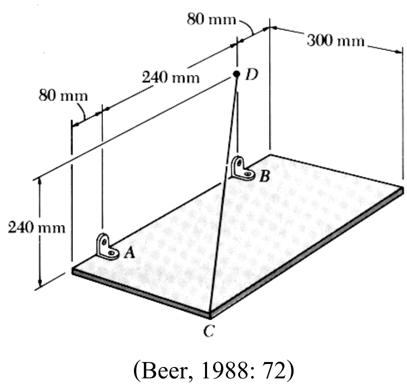
$$M_O = -Q(3\text{ ft}) = -(10.26\text{ lb})(3\text{ ft}) = -30.8\text{ lb.ft}$$

$$\mathbf{M}_O = 30.8\text{ lb.ft} \curvearrowright$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 3.4

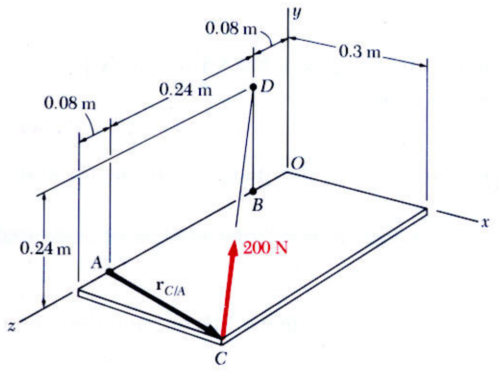
แผ่นเหล็กรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกรองรับด้วยชุดโครงรับ (bracket) ที่ยื่นออกมาจากกำแพง ที่ A และ B และด้วยเส้นลวด CD แรงดึงในเส้นลวดเท่ากับ 200 N

ให้หาโมเมนต์รอบ A เนื่องจากแรงซึ่งเกิดจากเส้นลวด CD กระทำที่จุด C



(Beer, 1988: 72)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 72)

โมเมนต์ $\mathbf{M}_A$ เนื่องจากแรงซึ่งเกิดจากเส้นลวด CD กระทำที่จุด C เขียนในรูปผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \qquad (1)$$

เมื่อ $\mathbf{r}_{C/A}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งซึ่งลากจากจุด A ไปยัง C แยกเวกเตอร์ $\mathbf{r}_{C/A}$ ให้เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก (อยู่ในแกน x และ y)

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.08\text{ m})\mathbf{k} \qquad (2)$$

และ $\mathbf{F}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 200 N มีแนวกระทำไปตาม CD ให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\lambda = \overrightarrow{CD}/CD$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วยมีทิศทางไปตามแนว CD เขียนได้เป็น

$$\mathbf{F} = F\lambda = (200\text{ N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \qquad (3)$$

แยกเวกเตอร์ $\overrightarrow{CD}$ ให้เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก ได้

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.24\text{ m})\mathbf{j} - (0.32\text{ m})\mathbf{k} \qquad CD = 0.50\text{ m}$$

แทนค่าลงใน (3) ได้

$$\mathbf{F} = \frac{200\ \text{N}}{0.50\ \text{m}}\left[-(0.3\ \text{m})\mathbf{i} + (0.24\ \text{m})\mathbf{j} - (0.32\ \text{m})\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{F} = -(120\ \text{N})\mathbf{i} + (96\ \text{N})\mathbf{j} - (128\ \text{N})\mathbf{k} \qquad (4)$$

แทนค่า $\mathbf{r}_{C/A}$ และ $\mathbf{F}$ จาก (2) และ (4) ลงใน (1) และจากสมการ (3.7) ได้

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = \left[(0.3\ \text{m})\mathbf{i} + (0.08\ \text{m})\mathbf{k}\right] \times \left[-(120\ \text{N})\mathbf{i} + (96\ \text{N})\mathbf{j} - (128\ \text{N})\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{M}_A = (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i})$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68\ \text{N.m})\mathbf{i} + (28.8\ \text{N.m})\mathbf{j} + (28.8\ \text{N.m})\mathbf{k}$$ **ตอบ**

อีกวิธี เขียนในรูปดีเทอร์มิแนนต์

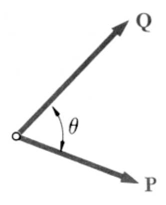
$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68\ \text{N.m})\mathbf{i} + (28.8\ \text{N.m})\mathbf{j} + (28.8\ \text{N.m})\mathbf{k}$$ **ตอบ**

3.9 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์

คำนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ **P** และ **Q** คือ ผลคูณของขนาดของแรง **P** และ **Q** และโคไซน์ของมุมระหว่าง **P** และ **Q** ดูรูปที่ 3.18 เขียนในรูป $\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q}$ ได้

$$\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q} = PQ\cos\theta \qquad (3.24)$$



รูปที่ 3.18 (Beer, 1988: 76)

ผลที่ได้ออกมานี้เป็นปริมาณสเกลาร์ และเนื่องจากสัญลักษณ์เป็น **จุด** จึงเรียกอีกอย่างว่า **ผลคูณจุด** (dot product)

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. สมบัติการสลับที่ สมบัติข้อนี้แตกต่างจากสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \bullet \mathbf{P} \qquad (3.25)$$

2. สมบัติการแจกแจง สมบัติข้อนี้เหมือนกับสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$\mathbf{P} \bullet (\mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2}) = \mathbf{P} \bullet \mathbf{Q_1} + \mathbf{P} \bullet \mathbf{Q_2} \qquad (3.26)$$

สมมติให้ $\mathbf{P}$ มีแนวทิศทางชี้ไปตามแกน y ดูรูปที่ 3.19 ให้ $\mathbf{Q}$ เป็นผลรวมของ $\mathbf{Q}_1$ และ $\mathbf{Q}_2$ และให้มุม θ_y เป็นมุมที่ $\mathbf{Q}$ ทำกับแกน y จากสมการ (3.26) จะได้

$$\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q_1} + \mathbf{P} \bullet \mathbf{Q_2} = \mathbf{P} \bullet \mathbf{Q} = PQ\cos\theta_y = PQ_y \qquad (3.27)$$

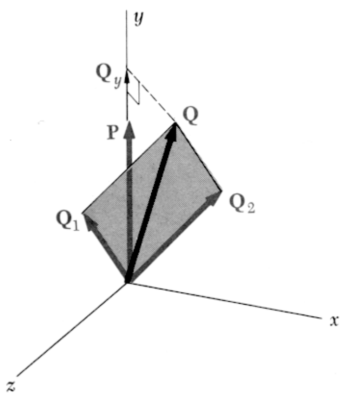
เมื่อ Q_{y} เป็นองค์ประกอบในแกน y ของ $\mathbf{Q}$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการ (3.26) อาจเขียนได้เป็น

$$\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q_1} + \mathbf{P} \bullet \mathbf{Q_2} = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \qquad (3.28)$$

3. สมบัติการแจกแจง ไม่มี

$(\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q}) \bullet \mathbf{S}$ ไม่มีความหมายเนื่องจาก $\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q}$ ผลที่ได้เป็น สเกลาร์ ซึ่งไม่สามารถนำไป dot กับ เวกเตอร์ได้



รูปที่ 3.19 (Beer, 1988: 76)

จากนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์ เมื่อนำมาใช้กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะได้ผลดังนี้

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\bullet\mathbf{i}=\mathbf{1} & \mathbf{j}\bullet\mathbf{j}=\mathbf{1} & \mathbf{k}\bullet\mathbf{k}=\mathbf{1} \\ \mathbf{i}\bullet\mathbf{j}=\mathbf{0} & \mathbf{j}\bullet\mathbf{k}=\mathbf{0} & \mathbf{k}\bullet\mathbf{i}=\mathbf{0} \end{array} \tag{3.29}$$

ดังนั้นถ้าให้ **P** และ **Q** อยู่ในรูปแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก ดังนี้

$$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q}=Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}$$

เมื่อ

$$\mathbf{P}\bullet\mathbf{Q}=\left(P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}\right)\bullet\left(Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}\right)$$

จะได้

$$\mathbf{P}\bullet\mathbf{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z \tag{3.30}$$

ในกรณี $\mathbf{P}\bullet\mathbf{P}$ จะได้

$$\mathbf{P}\bullet\mathbf{P}=P_x^2+P_y^2+P_z^2=P^2 \tag{3.31}$$

การประยุกต์

1. หาค่ามุมระหว่างเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

ให้ **P** และ **Q** อยู่ในรูปแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก ดังนี้

$$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q}=Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}$$

จากสมการ (3.24) และ (3.30) จะได้

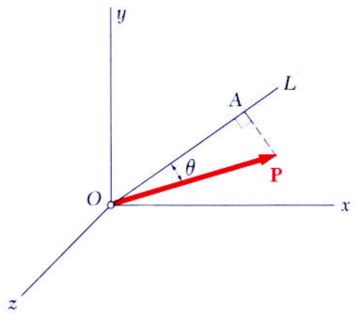
$$PQ\cos\theta=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$$

$$\cos\theta=\frac{P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z}{PQ} \tag{3.32}$$

2. หาภาพฉาย (projection) ของเวกเตอร์หนึ่งบนแกนที่กำหนด

ให้ **P** ทำมุมกับแกนเส้นตรง OL เป็นมุม θ ดูรูปที่ 3.20 ภาพฉายของ **P** บนแกน OL ถูกนิยามเป็นสเกลาร์ดังนี้

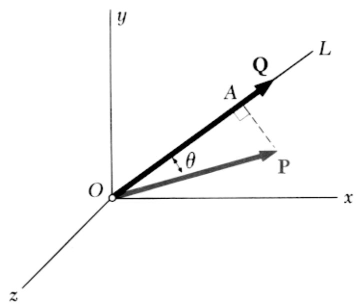
$$P_{OL} = P\cos\theta \tag{3.33}$$



รูปที่ 3.20 (Beer, 1988: 78)

จะเห็นว่า ภาพฉาย P_{OL} มีค่าเท่ากับ **ค่าสัมบูรณ์** (absolute value) ของความยาวเส้นตรง OA และจะมีค่าเป็น **บวก** เมื่อ OA มีทิศทางพุ่งชี้ไปทางเดียวกับแกน OL นั่นคือเมื่อ θ เป็นมุมแหลม ในทางตรงข้ามจะมีค่าเป็น **ลบ** ส่วนในกรณีที่ **P** และ OL ทำมุมกัน 90° ภาพฉาย ของ **P** บน OL เท่ากับ **ศูนย์** เนื่องจาก $\cos 90^\circ = 0$

พิจารณา เวกเตอร์ Q ซึ่งมีแนวทิศทางชี้ไปตามแนว OL ดูรูปที่ 3.21



รูปที่ 3.21 (Beer, 1988: 78)

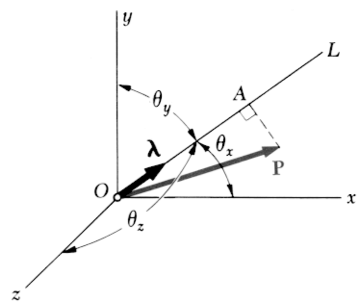
ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ **P** และ **Q** เขียนได้เป็นดังนี้

$$\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q} = PQ\cos\theta = P_{OL}Q \tag{3.34}$$

จากสมการ (3.34) เขียนใหม่ ได้

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \bullet \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{Q} \tag{3.35}$$

ในกรณีที่เวกเตอร์ในแนว OL เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\boldsymbol{\lambda}$ ดูรูปที่ 3.22



รูปที่ 3.22 (Beer, 1988: 78)

สมการ (3.35) เขียนได้เป็น

$$P_{OL} = \mathbf{P} \bullet \boldsymbol{\lambda} \tag{3.36}$$

เมื่อแยกแรง **P** และ $\boldsymbol{\lambda}$ เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก โดยเวกเตอร์องค์ประกอบของ $\boldsymbol{\lambda}$ ในแนวแกน x, y, z มีค่าเท่ากับโคไซน์บอกทิศทางของ OL จะได้

$$P_{OL} = P_x\cos\theta_x + P_y\cos\theta_y + P_z\cos\theta_z \tag{3.37}$$

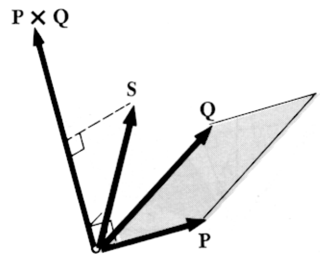
เมื่อ $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ เป็นมุมซึ่งแกน OL ทำกับแกนพิกัดฉาก

3.10 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ (Triple Scalar Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ **S**, **P** และ **Q** นิยาม ได้ดังนี้

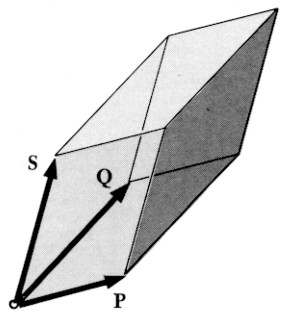
$$\mathbf{S}\bullet(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) \tag{3.38}$$

$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ จะได้เวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับระนาบซึ่งประกอบขึ้นจาก **P** และ **Q** ซึ่งมีขนาดจะเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งเกิดจาก **P** และ **Q** ดูรูปที่ 3.23



รูปที่ 3.23 (Beer, 1988: 79)

จากสมการ (3.34) ชี้ให้เห็นว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ของ **S** และ $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ อาจหาได้จากการคูณขนาดของ $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ (นั่นคือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งเกิดจาก **P** และ **Q**) คูณด้วย ภาพฉายของ **S** ในแนวซึ่งตั้งฉากกับระนาบของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น ผลที่ได้จากผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ นี้จะเท่ากับปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelepiped) ซึ่งประกอบขึ้นจากเวกเตอร์ **S**, **P** และ **Q** โดยเป็นค่าสัมบูรณ์ ดูรูปที่ 3.24



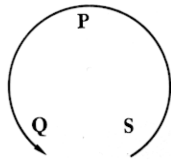
รูปที่ 3.24 (Beer, 1988: 79)

เครื่องหมายของผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ จะเป็น **บวก** ถ้า **S**, **P** และ **Q** เป็นไปตามกฎมือขวา และจะมีค่าเป็น **ศูนย์** ถ้า **S**, **P** และ **Q** อยู่ในระนาบเดียวกัน

เนื่องจากค่าปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่ขึ้นกับลำดับของเวกเตอร์ทั้งสาม ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ ซึ่งเกิดจาก **S**, **P** และ **Q** สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ 6 ลักษณะโดยจะให้ค่าสัมบูรณ์ที่เท่ากัน แม้ว่าเครื่องหมายอาจจะต่างกัน ดังนี้

$$\mathbf{S}\bullet(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{P}\bullet(\mathbf{Q}\times\mathbf{S})=\mathbf{Q}\bullet(\mathbf{S}\times\mathbf{P})=-\mathbf{S}\bullet(\mathbf{Q}\times\mathbf{P})=-\mathbf{P}\bullet(\mathbf{S}\times\mathbf{Q})=-\mathbf{Q}\bullet(\mathbf{P}\times\mathbf{S}) \quad (3.39)$$

การจัดเรียงตามลำดับทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 3.25 จะทำให้ได้เครื่องหมาย **บวก** จากการสังเกตจะพบว่าเครื่องหมายของ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์จะคงเป็น **บวก** เหมือนเดิม ถ้าลักษณะจากจัดลำดับของเวกเตอร์ทั้งสามเป็นแบบ**การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม** (circular permutation) และจากสมการ (3.39) ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ อาจนิยามด้วย $\mathbf{S}\bullet(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$ หรือ $\left(\mathbf{S}\times\mathbf{P}\right)\bullet\mathbf{Q}$ ก็ได้เช่นกัน



รูปที่ 3.25 (Beer, 1988: 79)

จากสมการ (3.30) และให้ $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{V}$ จะได้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ **S** และ **V** ดังนี้

$$\mathbf{S}\bullet(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{S}\bullet\mathbf{V}=S_xV_x+S_yV_y+S_zV_z$$

แทนค่าเวกเตอร์องค์ประกอบของ **V** จากสมการ (3.9) ได้

$$\mathbf{S}\bullet(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=S_x\left(P_yQ_z-P_zQ_y\right)+S_y\left(P_zQ_x-P_xQ_z\right)+S_z\left(P_xQ_y-P_yQ_x\right) \quad (3.40)$$

นิพจน์นี้อาจเขียนอยู่ในรูปของการกระจายดีเทอร์มิแนนต์ ดังนี้

$$\mathbf{S}\bullet(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$