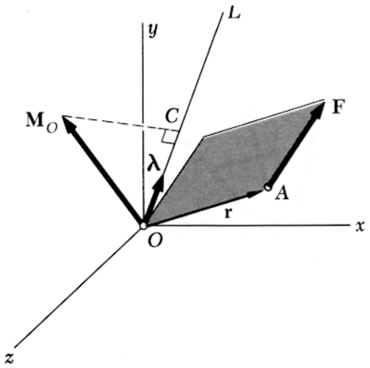
3.11 โมเมนต์ของแรงรอบแกนที่กำหนดให้

พิจารณาโมเมนต์ $\mathbf{M}_O$ ซึ่งเกิดจากแรง $\mathbf{F}$ กระทำต่อวัตถุคงรูปรอบจุด O ให้ OL เป็นแกนซึ่งผ่านจุด O ดูรูปที่ 3.26



รูปที่ 3.26 (Beer, 1988: 80)

นิยามของโมเมนต์ M_{OL} ซึ่งเกิดจากแรง $\mathbf{F}$ กระทำรอบแกน OL ก็คือภาพฉาย OC ของโมเมนต์ $\mathbf{M}_O$ บนแกน OL ให้ $\boldsymbol{\lambda}$ เป็น เวกเตอร์หนึ่งหน่วย มีทิศทางไปตามแนว OL
จากสมการ (3.36) และ (3.11) จะได้

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (3.42)$$

ซึ่งแสดงว่าโมเมนต์ M_{OL} ของแรง $\mathbf{F}$ รอบแกน OL เป็น สเกลาร์ ซึ่งเกิดจากผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ ของ $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}$ และ $\mathbf{F}$ และอาจเขียนในรูปดีเทอร์มิแนนต์ ได้

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.43)$$

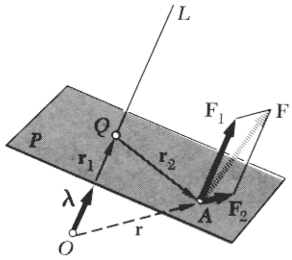
เมื่อ

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = โคไซน์บอกทิศทางของแกน OL

x, y, z = พิกัดของจุดซึ่งแรง $\mathbf{F}$ กระทำ

F_x, F_y, F_z = แรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉากของแรง $\mathbf{F}$

นัยสำคัญเชิงกายภาพของโมเมนต์ M_{OL} ของแรง **F** รอบแกน OL จะเห็นได้ชัดเจนขึ้นถ้าแยกแรง **F** เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉากเป็น $\mathbf{F}_1$ และ $\mathbf{F}_2$ โดยให้ $\mathbf{F}_1$ ขนานกับ OL และ $\mathbf{F}_2$ อยู่ในระนาบ P ซึ่งตั้งฉากกับ OL ดูรูปที่ 3.27



รูปที่ 3.27 (Beer, 1988: 80)

ในทำนองเดียวกัน แยกแรง **r** เป็น $\mathbf{r}_1$ และ $\mathbf{r}_2$ เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก แทนค่า **F** และ **r** ลงในสมการ (3.42) ได้

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet \left[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \right]$$
$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2)$$

จะพบว่า ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ ทั้งหมด เท่ากับ **ศูนย์** ยกเว้นเทอมสุดท้าย

$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = 0$ เพราะ $\mathbf{r}_1 // \mathbf{F}_1$ ($\theta = 0^\circ$, cross กันเป็น sin, sin0° = 0)

$\boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) = 0$ เพราะ $\boldsymbol{\lambda} \perp (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2)$ ($\theta = 90^\circ$, dot กันเป็น cos, cos90° = 0)

$\boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) = 0$ เพราะ $\boldsymbol{\lambda} \perp (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1)$ ($\theta = 90^\circ$, dot กันเป็น cos, cos90° = 0)

จะได้

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \qquad (3.44)$$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ มีแนวตั้งฉากกับระนาบ P และแทนด้วยโมเมนต์ของแรงองค์ประกอบ $\mathbf{F}_2$ ของแรง **F** รอบจุด Q ที่ซึ่งแนวแกน OL มาตัดกับระนาบ P ดังนั้นปริมาณสเกลาร์ M_{OL} จะเป็น **บวก** ถ้า $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ มีทิศทางพุ่งไปทางเดียวกับแกน OL และจะเป็น **ลบ**

เมื่อมีทิศทางตรงข้ามกัน ซึ่งปริมาณนี้จะเป็นตัววัดความพยายามของ $\mathbf{F}_2$ ที่จะทำให้วัตถุคงรูปหมุนรอบแกน OL

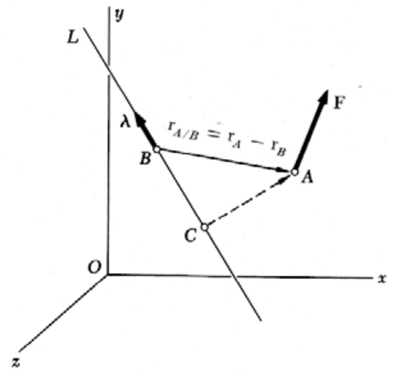
เนื่องจากแรงองค์ประกอบ $\mathbf{F}_1$ ของแรง **F** ไม่มีแนวโน้มที่จะทำให้วัตถุคงรูปนี้หมุนรอบแกน OL จึงสรุปได้ว่า โมเมนต์ M_{OL} ของแรง **F** รอบแกน OL ใช้วัดแนวโน้มหรือความพยายามของแรง **F** ที่จะทำให้วัตถุคงรูปนั้นมีการเคลื่อนที่หมุนรอบแกนตรึง OL

ซึ่งเป็นไปตามนิยามของโมเมนต์ของแรงรอบแกน ที่กล่าวว่า โมเมนต์ของ **F** รอบแกนพิกัดใด มีค่าเท่ากับโมเมนต์องค์ประกอบของ $\mathbf{M}_O$ รอบแกนนั้น แทนค่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ของ $\boldsymbol{\lambda}$ ในสมการ (3.42) จะได้นิพจน์ซึ่งให้ค่าโมเมนต์ของ **F** รอบแกนพิกัดมีค่าเท่ากับนิพจน์ที่ได้ในหัวข้อ 3.8 สำหรับโมเมนต์องค์ประกอบของ $\mathbf{M}_O$ ของ **F** รอบ O

$$
\begin{aligned}
M_x &= yF_z - zF_y \\
M_y &= zF_x - xF_z \\
M_z &= xF_y - yF_x
\end{aligned}
\qquad (3.18)
$$

สังเกตว่า มีเพียงแต่แรงองค์ประกอบ $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ และ $\mathbf{F}_z$ ของแรง **F** ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูป เป็นตัววัดแนวโน้มของแรง **F** ที่จะเคลื่อนวัตถุในแนวแกน x, y และ z ส่วนโมเมนต์ $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ และ $\mathbf{M}_z$ ของแรง **F** รอบแกนพิกัด เป็นตัววัดแนวโน้มของแรง **F** ที่จะหมุนวัตถุคงรูปรอบแกนพิกัด x, y และ z ตามลำดับ

ในกรณีทั่วไป โมเมนต์ของแรง **F** ซึ่งกระทำที่จุด A รอบแกนใด ๆ ซึ่งแกนนั้นไม่ผ่านจุดกำเนิด ให้จุด B เป็นจุดใด ๆ บนแกน BL ที่กำหนด ดูรูปที่ 3.28



รูปที่ 3.28 (Beer, 1988: 81)

สามารถหา ภาพฉายของโมเมนต์ $\mathbf{M}_B$ บนแกน BL ซึ่งเกิดจากแรง $\mathbf{F}$ กระทำรอบ B ได้ดังนี้

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \bullet (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

เมื่อ $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ แทนเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางพุ่งจาก B ไปยัง A
เขียน M_{BL} ในรูปดีเทอร์มิแนนต์ ได้

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

เมื่อ

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = โคไซน์บอกทิศทางของแกน BL

$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$

F_x, F_y, F_z = แรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉากของแรง $\mathbf{F}$

จากการสังเกตจะพบว่าผลที่ได้จะไม่ขึ้นกับการเลือกตำแหน่งของจุด B นั่นคือสามารถเลือกให้จุด B อยู่บนตำแหน่งใด ๆ บนแกน BL ที่กำหนด เช่นเลือกจุดใหม่บนแกน BL เป็นจุด C ต้องการหาโมเมนต์ M_{CL} จะได้

$$M_{CL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet \left[(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F} \right]$$
$$M_{CL} = \boldsymbol{\lambda} \bullet \left[(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \right] + \boldsymbol{\lambda} \bullet \left[(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F} \right]$$

แต่เนื่องจากเวกเตอร์ $\boldsymbol{\lambda}$ และ $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน นั่นคือ $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ และ $\mathbf{F}$ จะอยู่ในระนาบเดียวกัน เมื่อ $(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}$ จะได้เวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากระนาบนี้ $\boldsymbol{\lambda} \bullet \left[(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F} \right] = 0$ เพราะ $\boldsymbol{\lambda} \perp (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}$ เนื่องจาก dot กันเป็น $\cos$, $\cos 90^\circ = 0$ ซึ่งผลที่ได้เหมือนเดิมกับสมการ (3.45)

ตัวอย่าง 3.5

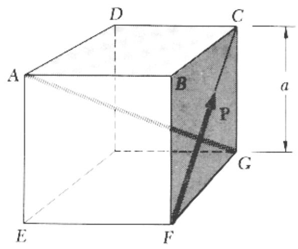
กล่องลูกบาศก์ด้านเท่า a ถูกกระทำด้วยแรง **P** ให้หาโมเมนต์เนื่องจาก **P**

ก. รอบ A

ข. รอบขอบ AB

ค. รอบเส้นทแยงมุม AG

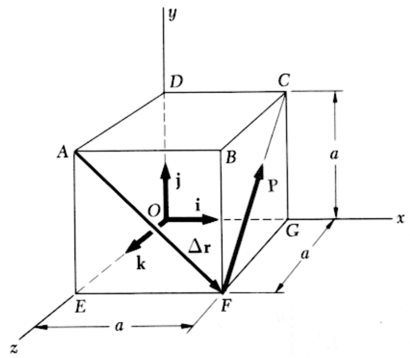
ง. ใช้ผลจาก ค. หาระยะตั้งฉากจาก AG ไปยัง FC



(Beer, 1988: 82)

วิธีทำ

ก. โมเมนต์รอบ A



(Beer, 1988: 82)

กำหนดแกน x, y, z ดังรูป แยกแรง **P** เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก และแยกเวกเตอร์ $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$ ซึ่งลากจาก A ไปยัง F เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก ได้

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$
$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

โมเมนต์ของ **P** รอบ A ได้แก่

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \qquad \textbf{ตอบ}$$

ข. โมเมนต์รอบ AB

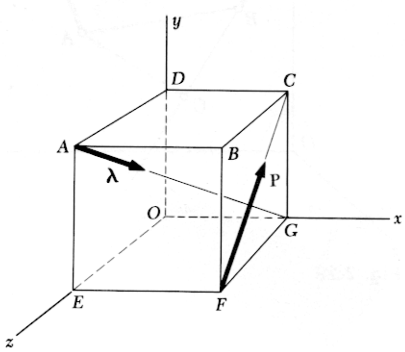
ภาพฉายของ $\mathbf{M}_A$ บน AB เขียนได้ดังนี้

$$M_{AB} = \mathbf{i} \bullet \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \bullet (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \qquad \textbf{ตอบ}$$

จะเห็นว่าเนื่องจากแกน AB ขนานกับแกน x โมเมนต์ M_{AB} จะเท่ากับ โมเมนต์องค์ประกอบของ $\mathbf{M}_A$ ในแกน x นั่นเอง

ค. โมเมนต์รอบเส้นทแยง AG



(Beer, 1988: 82)

โมเมนต์ของ **P** รอบ AG หาได้จากภาพฉายของ $\mathbf{M}_A$ บน AG
ให้ $\boldsymbol{\lambda}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในแนว AG จะได้

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{(a\mathbf{i}-a\mathbf{j}-a\mathbf{k})}{a\sqrt{3}} = \left(1/\sqrt{3}\right)(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

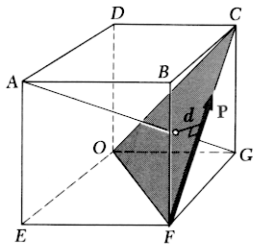
และ

$$M_{AG} = \lambda \bullet \mathbf{M}_A = \left(1/\sqrt{3}\right)(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}) \bullet (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$
$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1-1-1)$$
$$M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \qquad \textbf{ตอบ}$$

อีกวิธีหนึ่ง เขียนในรูปดีเทอร์มิแนนต์

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

ง. ระยะตั้งฉากจาก AG ถึง FC



(Beer, 1988: 82)

สังเกตว่า $\mathbf{P} \perp AG$ ซึ่งตรวจสอบได้จาก $\mathbf{P} \bullet \boldsymbol{\lambda}$ ถ้าเท่ากับ **ศูนย์** แสดงว่า $\mathbf{P} \perp \boldsymbol{\lambda}$ หรือ $\mathbf{P} \perp AG$ นั่นเอง

$$\mathbf{P} \bullet \boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \bullet \left(1/\sqrt{3}\right)(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P/\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

ดังนั้นโมเมนต์ $M_{AG} = -Pd$ เมื่อ d เป็นระยะตั้งฉากจาก AG ถึง FC โมเมนต์ M_{AG} มีเครื่องหมายลบเพราะทิศทางของ M_{AG} ตรงข้ามกับ $\boldsymbol{\lambda}$ จาก ข้อ ค. รู้ค่า M_{AG} แล้ว
ดังนั้น

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6}$$

$d = a/\sqrt{6}$ **ตอบ**

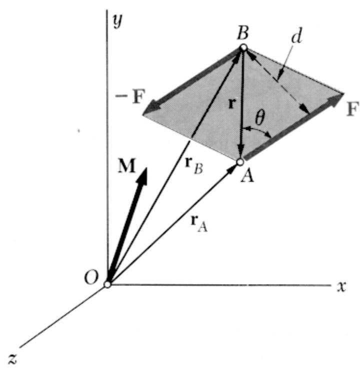
3.12 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ

แรง 2 แรง **F** และ **-F** มีขนาดเท่ากัน มีแนวกระทำที่ขนานกัน ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และมีทิศทางตรงข้ามกัน เรียกว่า **แรงคู่ควบ** ดูรูปที่ 3.29

รูปที่ 3.29 (Beer, 1988: 86)

แม้ว่าผลรวมของแรงองค์ประกอบของแรงคู่นี้ในทิศทางใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ **ศูนย์** แต่ผลรวมของโมเมนต์ของแรงคู่นี้รอบจุดใด ๆ **ไม่เท่ากับศูนย์** แรงคู่นี้จะไม่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่แบบเลื่อนขนาน แต่จะมีแนวโน้มทำให้วัตถุหมุน

ให้ $\mathbf{r}_A$ และ $\mathbf{r}_B$ เป็น เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดซึ่งแรง **F** และ **-F** กระทำ ดูรูปที่ 3.30



รูปที่ 3.30 (Beer, 1988: 86)

จะพบว่าผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งสองนี้รอบจุด O คือ

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \left(-\mathbf{F}\right) = \left(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B\right) \times \mathbf{F}$$

ให้ $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$ เมื่อ $\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์เชื่อมต่อระหว่างจุดทั้งสองซึ่งเป็นตำแหน่งที่แรงทั้งสองกระทำ

จะสรุปได้ว่าผลรวมของโมเมนต์ของแรง **F** และ **-F** รอบ O สามารถแทนได้ด้วยเวกเตอร์

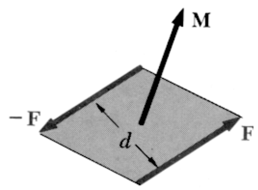
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (3.47)$$

เวกเตอร์ **M** นี้ เรียกว่า**โมเมนต์ของแรงคู่ควบ** ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีแนวตั้งฉากกับระนาบซึ่งประกอบขึ้นจากแรง 2 แรงนั้น และขนาดของเวกเตอร์นี้คือ

$$M = rF\sin\theta = Fd \qquad (3.48)$$

เมื่อ d เป็นระยะตั้งฉากกับแนวแรง **F** และ **-F** ทิศทางของ **M** หาได้จาก **กฎมือขวา**

เนื่องจากเวกเตอร์ **r** ในสมการ (3.47) ไม่ขึ้นกับจุด O ซึ่งเป็นจุดกำเนิดของแกนพิกัด นั่นคือ โมเมนต์ของแรง **F** และ **-F** จะมีค่าเท่าเดิมแม้จะคำนวณรอบจุดอื่น ซึ่งหมายความว่าโมเมนต์ **M** ของแรงคู่ควบเป็น **เวกเตอร์อิสระ** ซึ่งอาจจะให้กระทำที่จุดใด ๆ ก็ได้ ดูรูปที่ 3.31

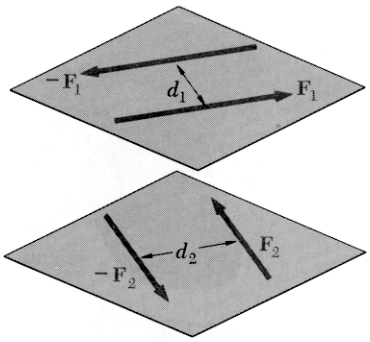


รูปที่ 3.31 (Beer, 1988: 87)

จากนิยามของ โมเมนต์ของแรงคู่ควบ ผลที่ตามมาคือ แรงคู่ควบ 2 คู่ คู่หนึ่งเป็น $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ และอีกคู่เป็น $\mathbf{F}_2$ และ $-\mathbf{F}_2$ จะมีโมเมนต์เท่ากันถ้า

$$F_1d_1 = F_2d_2 \qquad (3.49)$$

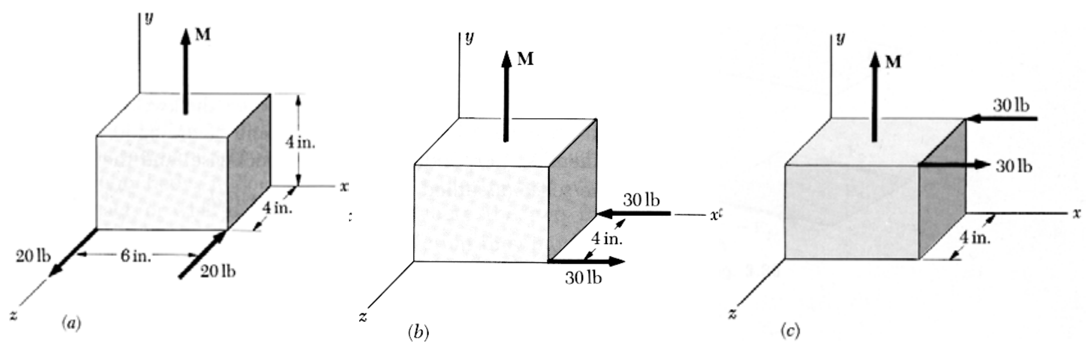
และคู่ควบทั้งสองอยู่ในระนาบเดียวกันหรืออยู่ในระนาบซึ่งขนานกัน และมีทิศทางเหมือนกัน ดูรูปที่ 3.32



รูปที่ 3.32 (Beer, 1988: 87)

3.13 แรงคู่ควบซึ่งสมมูลกัน (Equivalent Couples)

พิจารณาแรงคู่ควบ 3 คู่ ซึ่งกระทำต่อกล่องใบเดียวกันตามลำดับ ดูรูปที่ 3.33 จะเห็นว่าแรงคู่ควบจะพยายามทำให้กล่องหมุนเท่านั้น และเนื่องจากแรงคู่ควบทั้ง 3 คู่มีโมเมนต์ **M** เท่ากัน (มีทิศทางเดียวกัน และขนาดเท่ากัน M = 120 lb.in) ทำให้พอที่จะคาดคะเนได้ว่าแรงคู่ควบทั้ง 3 คู่ย่อมกระทำให้เกิดผลต่อกล่องนี้เหมือนกัน



รูปที่ 3.33 (Beer, 1988: 87)

สามารถที่จะพิสูจน์ว่าระบบแรงสมมูลกันได้โดยใช้กฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในการรวมแรง และหลักการส่งถ่ายแรง

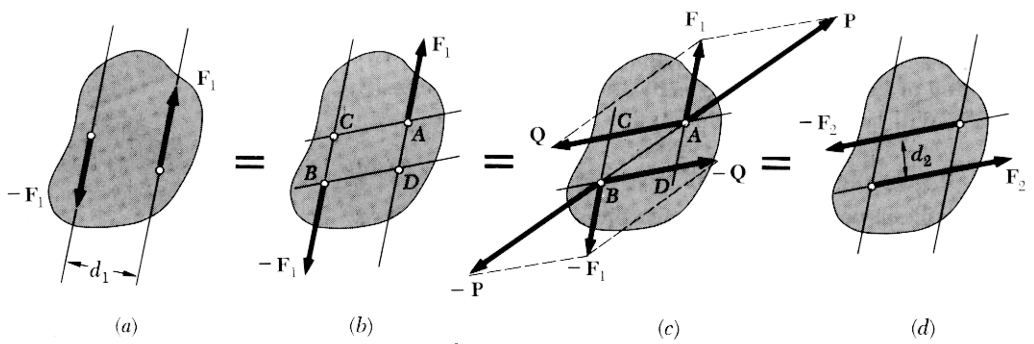
ระบบแรง 2 ระบบจะสมมูลกันหรือมีผลต่อวัตถุคงรูปเหมือนกัน ถ้าสามารถแปลงจากระบบหนึ่งให้ไปเป็นอีกระบบหนึ่งได้

วิธีการแปลงระบบแรง มีหลายวิธีเช่น

1. แทนที่ 2 แรงซึ่งกระทำต่ออนุภาคเดียวกันนั้นด้วย แรงลัพธ์ของแรงทั้ง 2 นั้น
2. แยกแรงหนึ่งแรงใดให้เป็นแรงองค์ประกอบ 2 แรง
3. กำจัด 2 แรงซึ่งกระทำต่ออนุภาคเดียวกัน ซึ่งมีขนาดเท่าแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน
4. ใส่แรง 2 แรงซึ่งมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน ให้กระทำต่ออนุภาคเดียวกัน
5. ย้ายแรงไปตามแนวกระทำของแรงนั้น (กฎการส่งถ่ายแรง)

การพิสูจน์ว่า แรงคู่ควบ 2 คู่ ซึ่งมีโมเมนต์เท่ากันจะสมมูลกัน

พิจารณาแรงคู่ควบ 2 คู่ ซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกัน แรงคู่ควบคู่แรกประกอบด้วย $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ ซึ่งมีขนาด F_1 และมีระยะฉากระหว่างกัน d_1 ดูรูปที่ 3.34(a) แรงคู่ควบคู่ที่สองประกอบด้วย $\mathbf{F}_2$ และ $-\mathbf{F}_2$ ซึ่งมีขนาด F_2 และระยะฉากระหว่างกัน d_2 ดูรูปที่ 3.34(d)



รูปที่ 3.34 (Beer, 1988: 88)

ให้ แรงคู่ควบ $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ มีโมเมนต์เท่ากับ แรงคู่ควบ $\mathbf{F}_2$ และ $-\mathbf{F}_2$ โดย

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{3.49}$$

เพื่อจะพิสูจน์ว่าแรงคู่ควบทั้งสองสมมูลกัน จะต้องแสดงให้เห็นว่าสามารถแปลงแรงคู่ควบคู่แรกให้ไปเป็นแรงคู่ควบคู่ที่สอง โดยแปลงระบบแรงในรูปที่ 3.34(a) ให้อยู่ในรูปที่ 3.35(d)

ให้จุด A, B, C, D เป็นจุดซึ่งแนวของแรงคู่ควบทั้ง 2 คู่ ตัดกัน

1. เลื่อน $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ ไปตามแนวแรงเดิมจนถึงจุด A และ B ตามลำดับ (ใช้หลักการส่งถ่ายแรง) ดูรูปที่ 3.34(b)

2. แตกแรง $\mathbf{F}_1$ เป็นแรงองค์ประกอบ 2 แรง โดยให้แรงองค์ประกอบ **P** อยู่ในแนว AB และแรงองค์ประกอบ **Q** อยู่ในแนว AC ดูรูปที่ 3.34 (c)

3. ในทำนองเดียวกัน, แตกแรง $-\mathbf{F}_1$ เป็นแรงองค์ประกอบ 2 แรง โดยให้แรงองค์ประกอบ **-P** อยู่ในแนว AB และแรงองค์ประกอบ **-Q** อยู่ในแนว BD

4. แรง **P** และ **-P** มีขนาดเท่ากันอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน สามารถเลื่อนให้ **P** และ **-P** จนกระทั่งมีจุดซึ่งกระทำร่วมกัน ทำให้หักล้างกันไป

5. ดังนั้นจะเหลือแรงคู่ควบ **Q** และ **-Q** นั่นคือเราสามารถแปลงแรงคู่ควบ $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ มาอยู่ในรูปนี้ได้

6. โมเมนต์ของแรงคู่ควบ **Q** และ **-Q** อาจคำนวณได้จากโมเมนต์ของ **Q** รอบจุด B และในทำนองเดียวกันโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ ก็คือ โมเมนต์ของ $\mathbf{F}_1$ รอบจุด B

7. จากทฤษฎีของวาริยอง โมเมนต์ของ $\mathbf{F}_1$จะเท่ากับผลรวมของโมเมนต์ของแรงองค์ประกอบ **P** และ **Q** ซึ่งเป็นแรงองค์ประกอบของ $\mathbf{F}_1$ แต่เนื่องจากโมเมนต์ของ **P** รอบจุด B เท่ากับ **ศูนย์**

8. ดังนั้นโมเมนต์ของแรงคู่ควบ **Q** และ **-Q** ต้องเท่ากับโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ จากสมการ 3.49 เขียนได้เป็น

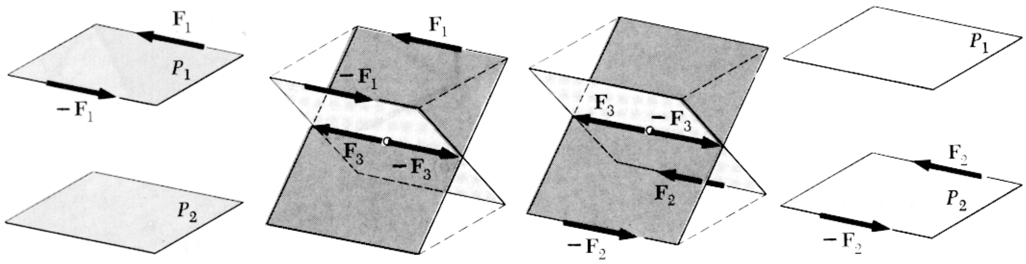
$$Qd_2 = F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad \text{และ} \quad Q = F_2$$

9. ดังนั้นแรง **Q** และ **-Q** จะเท่ากับแรง $\mathbf{F}_2$ และ $-\mathbf{F}_2$ ตามลำดับ และ แรงคู่ควบในรูปที่ 3.34(a) จะสมมูลกันแรงคู่ควบในรูปที่ 3.34(d)

คราวนี้ พิจารณาแรงคู่ควบ 2 คู่ ซึ่งอยู่ในระนาบ P_1 และ P_2 ซึ่งเป็นระนาบซึ่งขนานกัน ดูรูปที่ 3.35(a) และ 3.35(d)

ต้องการพิสูจน์ว่า แรงคู่ควบทั้ง 2 คู่จะสมมูลกันถ้าแรงคู่ควบทั้งคู่มีโมเมนต์เท่ากัน

สมมติให้แรงคู่ควบทั้ง 2 คู่ ประกอบขึ้นด้วยแรงซึ่งมีขนาด F เท่ากันและมีแนวกระทำขนานกันดังรูปที่ 3.35(a) และ 3.35(d)



(a) (b) (c) (d)

รูปที่ 3.35 (Beer, 1988: 89)

ถ้าสามารถแปลงให้แรงคู่ควบในระนาบ P_1 ไปเป็นแรงคู่ควบในระนาบ P_2 ได้ ก็แสดงว่าแรงคู่ควบคู่นี้สมมูลกัน

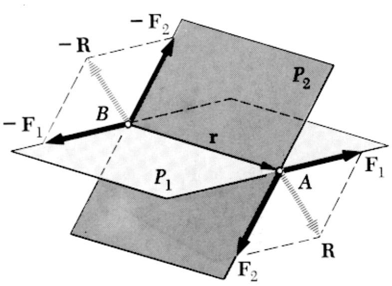
วิธีการแปลง

1. พิจารณาระนาบซึ่งประกอบขึ้นจาก $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_2$ และระนาบซึ่งประกอบขึ้นจาก $-\mathbf{F}_1$ และ $\mathbf{F}_2$ ดูรูปที่ 3.35(b)
2. ใส่แรง $\mathbf{F}_3$ ซึ่งเท่ากับ $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_3$ ซึ่งเท่ากับ $-\mathbf{F}_1$ ลงบนแนวซึ่งระนาบ 2 ระนาบข้างต้นตัดกัน
3. แรงคู่ควบซึ่งเกิดจาก $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_3$ อาจถูกแทนด้วยแรงคู่ควบซึ่งเกิดจาก $\mathbf{F}_3$ และ $-\mathbf{F}_2$ เนื่องจากแรงคู่ควบทั้ง 2 คู่มีโมเมนต์เท่ากันและอยู่ในระนาบเดียวกัน
4. ในทำนองเดียวกัน แรงคู่ควบ $-\mathbf{F}_1$ และ $\mathbf{F}_3$ อาจถูกแทนได้ด้วยแรงคู่ควบ $-\mathbf{F}_3$ และ $\mathbf{F}_2$
5. กำจัดแรง $\mathbf{F}_3$ และ $-\mathbf{F}_3$ ออกไป เนื่องจากมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน กระทำอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
6. จะเหลือแรงคู่ควบ $\mathbf{F}_2$ และ $-\mathbf{F}_2$ ดังรูปที่ 3.35(d) ในระนาบ P_2

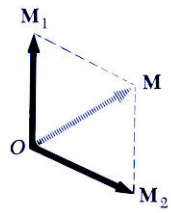
ดังนั้นสรุปได้ว่า แรงคู่ควบ 2 คู่ ซึ่งมีโมเมนต์เท่ากันจะสมมูลกัน ไม่ว่าจะอยู่ในระนาบเดียวกันหรืออยู่คนละระนาบซึ่งขนานกัน นั่นคือเมื่อแรงคู่ควบกระทำต่อวัตถุคงรูป ตำแหน่ง ขนาดและทิศทางของแรงคู่ควบนั้นไม่มีนัยสำคัญ สิ่งเดียวที่เกี่ยวข้องคือ ขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงคู่ควบนั้น นั่นคือแรงคู่ควบซึ่งมีโมเมนต์เหมือนกันจะก่อให้เกิดผลต่อวัตถุคงรูปเหมือนกัน

3.14 การรวมแรงคู่ควบ

พิจารณาระนาบ P_1 และ P_2 ซึ่งตัดกัน มีแรงคู่ควบ 2 คู่กระทำในระนาบ P_1 และ P_2 ตามลำดับ ดูรูปที่ 3.36



(a)



(b)

รูปที่ 3.36 (Beer, 1988: 90)

ให้แรงคู่ควบในระนาบ P_1 ประกอบด้วยแรง $\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_1$ ซึ่งตั้งฉากกับแนวเส้นตรง AB ซึ่งระนาบทั้ง 2 ตัดกัน และให้กระทำที่จุด A และ B ทำนองเดียวกันให้แรงคู่ควบใน P_2 ประกอบด้วยแรง $\mathbf{F}_2$ และ $-\mathbf{F}_2$ กระทำที่ A และ B ตามลำดับโดยตั้งฉากกับแนว AB จะพบว่าแรงลัพธ์ $\mathbf{R}$ ของ $\mathbf{F}_1$ และ $\mathbf{F}_2$ และ $-\mathbf{R}$ ของ $-\mathbf{F}_1$ และ $-\mathbf{F}_2$ เกิดเป็นแรงคู่ควบขึ้น 1 คู่ ให้ $\mathbf{r}$ เป็น เวกเตอร์เชื่อมต่อจากจุด B ไปยัง A

จากนิยามของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $\mathbf{M}$ จะได้

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

และจากทฤษฎีของวาริยองได้

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

แต่พจน์แรกในนิพจน์ข้างต้นแทนโมเมนต์ $\mathbf{M}_1$ ของคู่ควบในระนาบ P_1 และพจน์ที่สองแทน $\mathbf{M}_2$ ของคู่ควบในระนาบ P_2 ดังนั้น

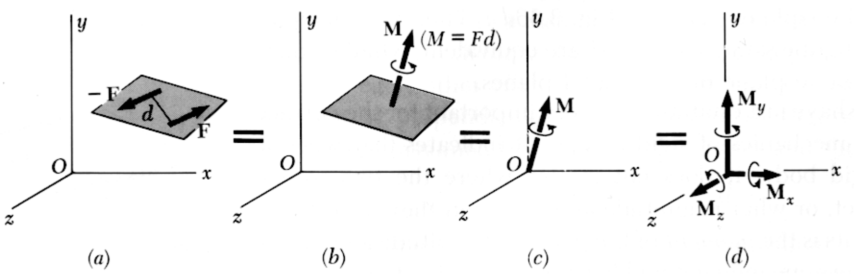
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \qquad (3.50)$$

สรุปได้ว่า ผลรวมแบบเวกเตอร์ของโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $\mathbf{M}_1$ และ $\mathbf{M}_2$ จะเท่ากับ โมเมนต์ของแรงคู่ควบ **M** 1 คู่ ดูรูปที่ 3.36(b)

3.15 แรงคู่ควบแทนได้ด้วยเวกเตอร์

จากหัวข้อ 3.13 แรงคู่ควบซึ่งมีค่าโมเมนต์เหมือนกัน จะสมมูลกันไม่ว่าแรงคู่ควบเหล่านั้นจะกระทำบนระนาบเดียวกัน หรือระนาบซึ่งขนานกัน

ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องเขียนตัวแรงจริง ๆ ซึ่งทำให้เกิดแรงคู่ควบ เพื่อแสดงผลของการกระทำต่อวัตถุคงรูป ดูรูปที่ 3.37(a) เพียงแต่เขียนลูกศรซึ่งแทนขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงคู่ควบนั้นก็เป็นการเพียงพอ ดูรูปที่ 3.37(b)



รูปที่ 3.37 (Beer, 1988: 90)

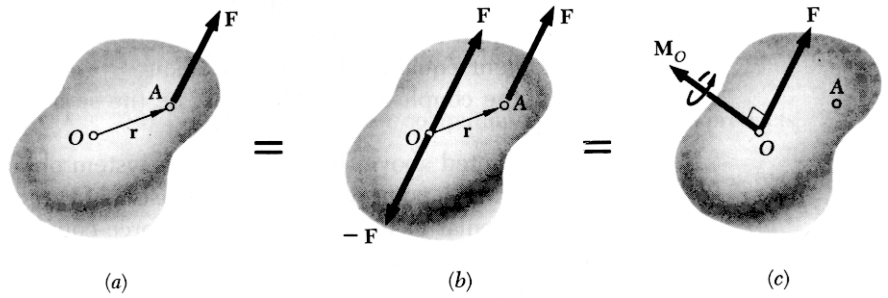
จากหัวข้อ 3.14 พบว่าผลรวมของแรงคู่ควบ 2 คู่ จะได้ผลออกมาเป็น แรงคู่ควบ 1 คู่ ซึ่งก็คือโมเมนต์ **M** ของแรงลัพธ์ของแรงคู่ควบอาจหาออกมาได้จากการรวมแบบเวกเตอร์ของโมเมนต์ $\mathbf{M}_1$ และ $\mathbf{M}_2$ ของแรงคู่ควบ 2 คู่ ดังนั้นแรงคู่ควบจะเป็นไปตามกฎของการรวมเวกเตอร์ และลูกศรในรูปที่ 3.37(b) ซึ่งแทนแรงคู่ควบในรูปที่ 3.37(a) นั้นก็คือ เวกเตอร์หนึ่งเวกเตอร์นั่นเอง

เวกเตอร์ซึ่งแทนแรงคู่ควบเรียกว่า **เวกเตอร์แรงคู่ควบ** (couple vector)

เวกเตอร์แรงคู่ควบนี้ก็เหมือนกับโมเมนต์ของแรงคู่ควบคือเป็น เวกเตอร์อิสระ ซึ่งตำแหน่งของจุดกระทำ อาจเลือกให้กระทำที่จุดกำเนิดก็ได้(ถ้าต้องการ) ดูรูปที่ 3.37(c) และเวกเตอร์แรงคู่ควบ **M** ยังอาจแยกออกเป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$ ในตามแกน x, y, z ได้อีกด้วย รูปที่ 3.37(d) ซึ่งใช้แทนแรงคู่ควบซึ่งกระทำในระนาบ yz, zx และ xy ตามลำดับ

3.16 การแยกแรง 1 แรงใด ๆ ให้เป็นแรง 1 แรงกระทำที่ O และแรงคู่ควบ 1 คู่

พิจารณาแรง **F** ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปที่ A ซึ่งตำแหน่ง A นี้นิยามด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง **r** ดูรูปที่ 3.38(a)



รูปที่ 3.38 (Beer, 1988: 91)

ถ้าต้องการให้มีแรงกระทำที่จุด O แม้ว่าจะสามารถเลื่อน **F** ไปตามแนวกระทำเดิมตามหลักการส่งถ่ายแรง แต่ก็ไม่สามารถเลื่อนแรง **F** ไปยังจุด O ซึ่งไม่ได้อยู่ในแนวกระทำของแรง **F** ได้ ถ้าปราศจากการปรับเปลี่ยนลักษณะการกระทำของแรง **F** ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปนั้น

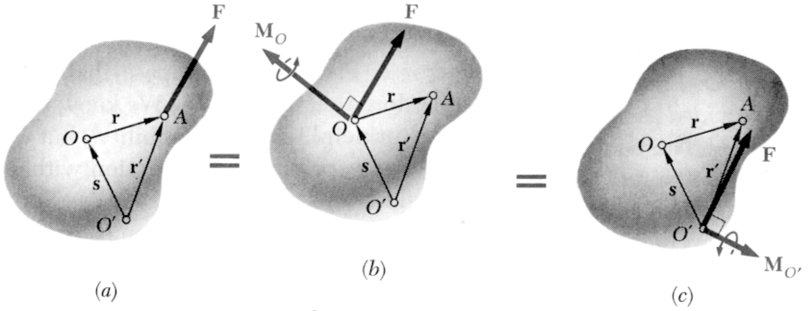
เราสามารถใส่แรง 2 แรงให้กระทำที่จุด O โดยให้แรงหนึ่งเป็น **F** และอีกแรงเป็น **-F** ซึ่งผลที่กระทำต่อวัตถุคงรูปนี้ยังคงเหมือนเดิม ดูรูปที่ 3.38(b) ทำให้ได้แรง **F** กระทำที่จุด O และแรง 2 แรงที่มีลักษณะเป็นแรงคู่ควบ 1 คู่ ซึ่งมีโมเมนต์รอบ O, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

ดังนั้นแรง **F** ใด ๆ ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปหนึ่ง อาจถูกย้ายไปให้กระทำที่จุด O ได้ โดยการเพิ่มแรงคู่ควบเข้าไป 1 คู่ ซึ่งมีโมเมนต์เท่ากับโมเมนต์ของแรง **F** รอบจุด O นั้น

แรงคู่ควบซึ่งพยายามกระทำต่อวัตถุคงรูปหนึ่งในลักษณะซึ่งทำให้เกิดการหมุนรอบ O เหมือนกับแรง **F** ซึ่งพยายามกระทำต่อวัตถุนั้นก่อนที่จะถูกย้ายไปยังจุด O แรงคู่ควบนั้นสามารถแทนได้ด้วย เวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O$ ซึ่งตั้งฉากกับระนาบซึ่งประกอบขึ้นจาก **r** และ **F**

เนื่องจาก $\mathbf{M}_O$ เป็นเวกเตอร์อิสระ จึงสามารถให้กระทำที่จุดใด ๆ ก็ได้ แต่เพื่อความสะดวกจะให้เวกเตอร์แรงคู่ควบกระทำที่จุด O พร้อมด้วยแรง **F** การรวมกันอยู่ในลักษณะนี้เรียกว่า **ระบบแรงและแรงคู่ควบ** (force-couple system) ดูรูปที่ 3.38(c)

ถ้าให้ **F** ย้ายจาก A ไปยังจุดอื่น *O*' ดูรูปที่ 3.39(a) และ 3. 39(c) ให้โมเมนต์ $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r'} \times \mathbf{F}$ เป็นโมเมนต์ของ **F** รอบจุด *O*' แล้ว จะได้ระบบแรงและแรงคู่ควบระบบใหม่ซึ่งประกอบด้วย **F** และเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_{O'}$ รอบจุด *O*'



รูปที่ 3.39 (Beer, 1988: 92)

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของ **F** รอบจุด *O* และจุด *O*' เป็นดังนี้

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r'} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

หรือ

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \tag{3.51}$$

เมื่อ **s** เป็นเวกเตอร์เชื่อมต่อจุด *O*' ไปยัง *O*

นั่นคือ โมเมนต์ $\mathbf{M}_{O'}$ ของ **F** รอบ *O*' หาได้จากการรวมโมเมนต์ $\mathbf{M}_O$ ของแรง **F** รอบ *O* กับผลคูณเชิงเวกเตอร์ $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ ซึ่งแทนโมเมนต์รอบ *O*' ของแรง **F** ซึ่งกระทำที่จุด *O* จากผลที่ได้นี้สรุปได้ว่า ในการย้ายระบบแรงและแรงคู่ควบจาก *O* ไปยัง *O*' ดูรูปที่ 3. 39(b) และ 3. 39(c) นั้น เวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O$ สามารถย้ายไปที่ *O*' ได้อย่างอิสระ แต่จะต้องเพิ่ม $\mathbf{M}_O$ ด้วยเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ ซึ่งเป็นโมเมนต์ของแรง **F** รอบ *O*' (จากเดิมซึ่ง **F** กระทำที่จุด *O*) ดังนั้น เวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_{O'}$ ต้องเท่ากับผลรวมของ $\mathbf{M}_O$ และ $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$

ในทางกลับกัน ก็สามารถเปลี่ยนระบบแรงและแรงคู่ควบระบบหนึ่งให้กลับมาเป็นแรงเดี่ยว 1 แรง ซึ่งสมมูลกับระบบนั้นได้ ซึ่งทำได้โดยย้าย **F** ไปในระนาบซึ่งตั้งฉากกับ $\mathbf{M}_O$ จนกระทั่งโมเมนต์รอบจุด *O* เท่ากับ เวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O$ ซึ่งต้องการกำจัดไป