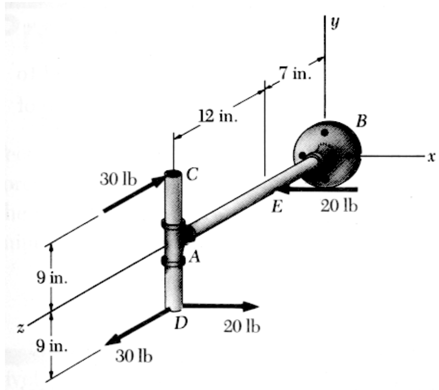
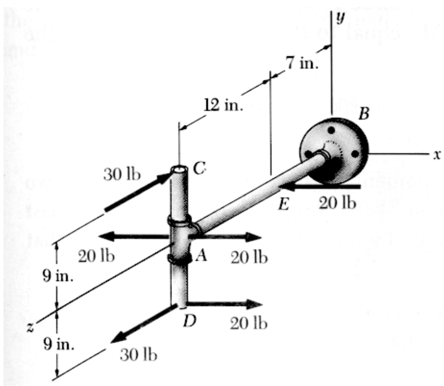
ตัวอย่าง 3.6

ให้หาองค์ประกอบของแรงคู่ควบเดี่ยวซึ่งสมมูลกับแรงคู่ควบ 2 คู่ดังแสดงในรูป



(Beer, 1988: 93)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 93)

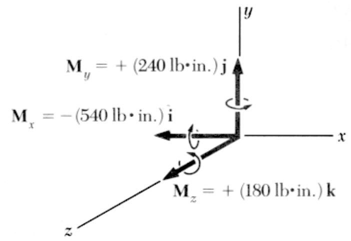
ใส่แรงคู่หนึ่งซึ่งมีขนาด 20 lb เท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน ที่ A ได้แรงคู่ควบใหม่ 2 คู่แทนคู่ควบจากแรง 20 lb เดิม โดยแรงคู่ควบใหม่จากแรง 20 lb คู่หนึ่งอยู่ในระนาบ xz และอีกคู่อยู่ในระนาบซึ่งขนานกับระนาบ xy

แรงคู่ควบใหม่ทั้ง 3 คู่ซึ่งสมมูลกับคู่ควบเดิม เขียนแทนด้วยเวกเตอร์แรงคู่ควบ M_x, M_y และ M_z มีทิศทางชี้ไปตามแกน x, y และ z ตามลำดับ โดยมีโมเมนต์ดังนี้

$$M_x = -(30\text{ lb})(18\text{ in}) = -540\text{ lb.in}$$
$$M_y = +(20\text{ lb})(12\text{ in}) = +240\text{ lb.in}$$
$$M_z = +(20\text{ lb})(9\text{ in}) = +180\text{ lb.in}$$

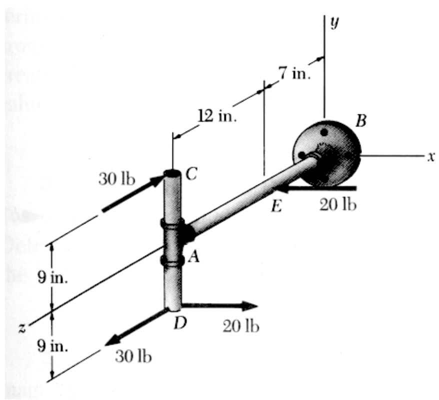
โมเมนต์ทั้งสามนี้แทนองค์ประกอบของคู่ควบเดี่ยว **M** ซึ่งสมมูลกับคู่ควบ 2 คู่เดิม และเขียนในรูปเวกเตอร์ ได้

$$\mathbf{M} = -(540\ \text{lb.in})\mathbf{i} + (240\ \text{lb.in})\mathbf{j} + (180\ \text{lb.in})\mathbf{k}$$ **ตอบ**



(Beer, 1988: 93)

วิธีทำอีกวิธี



(Beer, 1988: 93)

องค์ประกอบของแรงคู่ควบเดี่ยวที่สมมูล **M** อาจหาได้จากการคำนวณผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้ง 4 ที่กำหนดให้รอบจุดหนึ่งจุดใด ในกรณีนี้เลือกจุด D ได้ดังนี้

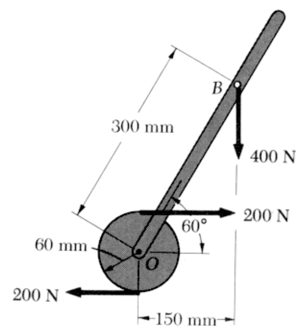
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (18\ \text{in})\mathbf{j} \times -(30\ \text{lb})\mathbf{k} + \left[(9\ \text{in})\mathbf{j} - (12\ \text{in})\mathbf{k}\right] \times (-20\ \text{lb})\mathbf{i}$$

ได้

$$\mathbf{M} = -(540\ \text{lb.in})\mathbf{i} + (240\ \text{lb.in})\mathbf{j} + (180\ \text{lb.in})\mathbf{k}$$ **ตอบ**

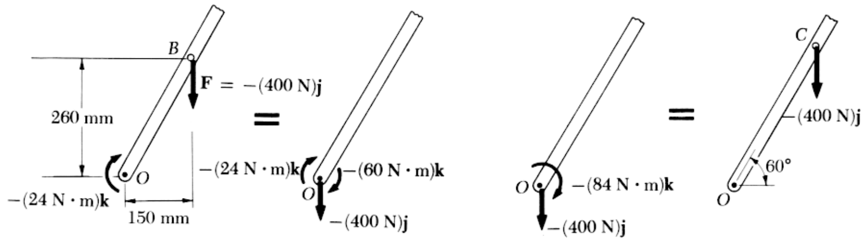
ตัวอย่าง 3.7

แทนที่แรงคู่ควบ 1 คู่และแรง 1 แรงดังรูป ด้วยแรงเดี่ยว 1 แรงซึ่งกระทำต่อคันโยก(lever) และให้หาระยะจากเพลา(shaft) ไปยังจุดซึ่งแรงนี้กระทำ



(Beer, 1988: 94)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 94)

แทนแรงและแรงคู่ควบด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลที่ O ด้วยการย้ายแรง $\mathbf{F} = -(400N)\mathbf{j}$ ไปยัง O พร้อมทั้งเพิ่มโมเมนต์ของแรงคู่ควบ **M** ซึ่งเท่ากับโมเมนต์รอบ O ของแรงเมื่ออยู่จุดเดิม

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} = \left[(0.150\text{ m})\mathbf{i} + (0.260\text{ m})\mathbf{j}\right] \times (-400\text{ N})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_O = -(60\text{ N.m})\mathbf{k}$$

รวมโมเมนต์นี้เข้ากับโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $-(24\text{ N.m})\mathbf{k}$ ซึ่งเกิดจากแรงคู่ควบ 200-N จะได้โมเมนต์ของแรงคู่ควบ $-(84\text{ N.m})\mathbf{k}$ กำจัดแรงคู่ควบที่ได้นี้โดยการเลื่อนให้ **F** ไปกระทำที่จุด C ซึ่งทำให้เกิดโมเมนต์เท่ากับโมเมนต์ที่ต้องการกำจัด

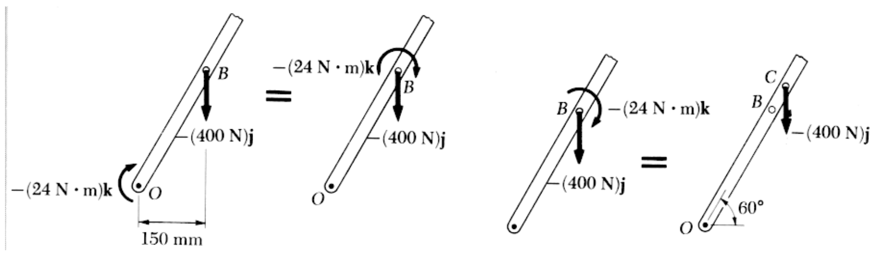
$$-(84\text{ N.m})\mathbf{k} = \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F}$$
$$= \left[(OC)\cos 60^\circ \mathbf{i} + (OC)\sin 60^\circ \mathbf{j}\right] \times (-400\text{ N})\mathbf{j}$$
$$= -(OC)\cos 60^\circ \left(400\text{ N}\right)\mathbf{k}$$

นั่นคือ

$$(OC)\cos 60^\circ = 0.210\text{ m} = 210\text{ mm}$$

$OC = 420$ mm **ตอบ**

วิธีทำอีกวิธี



(Beer, 1988: 94)

เนื่องจากผลจากแรงคู่ควบไม่ขึ้นกับตำแหน่งหรือจุดซึ่งแรงคู่ควบกระทำ ดังนั้นสามารถเลื่อนโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $-(24\text{ N.m})\mathbf{k}$ ไปยังจุด **B** ซึ่งอยู่ในระนาบเดิมหรือระนาบซึ่งขนานกับระนาบเดิม จะได้ระบบแรงและแรงคู่ควบกระทำที่จุด **B**

กำจัดแรงคู่ควบได้โดยการเลื่อนให้ **F** ไปกระทำที่จุด **C** ซึ่งทำให้เกิดโมเมนต์เท่ากับโมเมนต์ซึ่งต้องการกำจัด

$$-(24\text{ N.m})\mathbf{k} = \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F}$$
$$= -(BC)\cos 60^\circ \left(400\text{ N}\right)\mathbf{k}$$

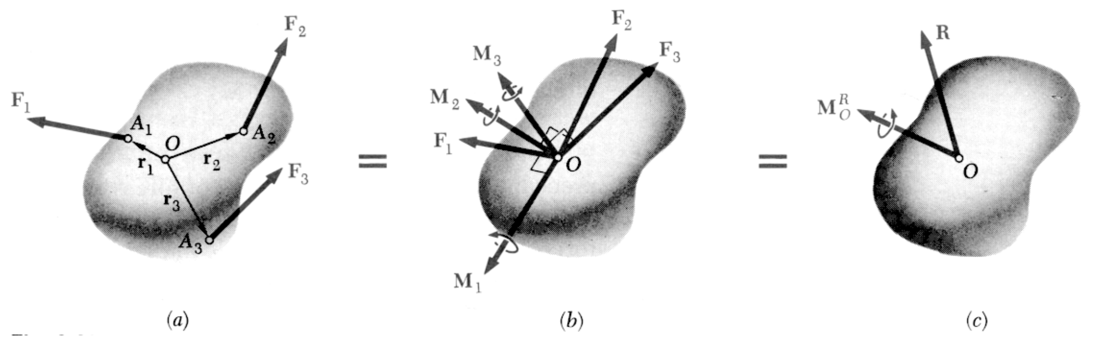
ได้

$$(BC)\cos 60^\circ = 0.060\text{ m} = 60\text{ mm}$$
$$BC = 120\text{ mm}$$
$$OC = OB + BC = 300\text{ mm} + 120\text{ mm}$$

$OC = 420$ mm **ตอบ**

3.17 การลดระบบแรงซึ่งประกอบด้วยแรงหลายแรงให้เหลือแรง 1 แรงและแรงคู่ควบ 1 คู่

พิจารณาระบบแรง $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปหนึ่งที่จุด A_1, A_2, A_3 ตามลำดับ และมี $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง ดูรูปที่ 3.40(a)



รูปที่ 3.40 (Beer, 1988: 99)

$\mathbf{F}_1$ สามารถเคลื่อนจาก $\mathbf{A}_1$ ไปยัง O ซึ่งเป็นจุดที่กำหนดให้ได้ โดยเพิ่มโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $\mathbf{M}_1$ เท่ากับ $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ ซึ่งเท่ากับโมเมนต์ของแรง $\mathbf{F}_1$ กระทำที่จุดเดิมรอบจุด O เข้าไปในระบบแรงเดิม

ในทำนองเดียวกัน $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ จะสามารถเคลื่อนไปที่ O ได้ โดยเพิ่ม $\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ เข้าไปในระบบแรงเดิม ดูรูปที่ 3.40(b)

เนื่องจากในขณะนี้ แรงทั้งหมดมากระทำที่จุดเดียวกัน จึงสามารถรวมกันแบบเวกเตอร์ และให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็น $\mathbf{R}$ ทำนองเดียวกัน $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ ก็สามารถรวมกันแบบเวกเตอร์และให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นเวกเตอร์แรงคู่ควบเดี่ยว $\mathbf{M}_O^R$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ระบบของแรงใด ๆ ไม่ว่าจะซับซ้อนแค่ไหน จะสามารถลดลงให้เหลือเป็นเพียงระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูล 1 ระบบ กระทำที่จุดซึ่งกำหนดให้ O

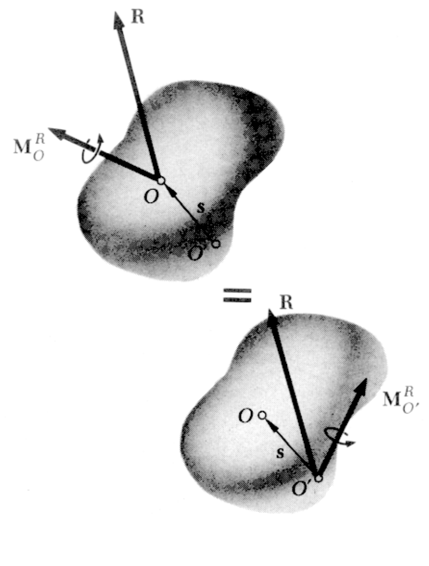
ข้อสังเกต แม้ว่า เวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ จะตั้งฉากกับแรงแต่ละแรงซึ่งทำให้โมเมนต์นั้นเกิดขึ้น แต่แรงลัพธ์ $\mathbf{R}$ และเวกเตอร์แรงคู่ควบลัพธ์ $\mathbf{M}_O^R$ ไม่จำเป็นจะต้องตั้งฉากกัน ดูรูปที่ 3.40(c)

ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูล เขียนเป็นสมการได้

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (3.52)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า แรงลัพธ์ $\mathbf{R}$ ได้จากการรวมแรงทั้งหมดในระบบ ส่วนโมเมนต์ลัพธ์ $\mathbf{M}_O^R$ ได้จากการรวมโมเมนต์รอบ O ของแรงทั้งหมดในระบบ โดยการรวมแรงและโมเมนต์ต้องเป็นแบบเวกเตอร์

ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งกระทำที่จุด O ใด ๆ สามารถถูกลดให้เป็นระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งกระทำที่จุด O' ใด ๆ ได้ โดยแรงลัพธ์ $\mathbf{R}$ ยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ส่วนเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_{O'}^R$ จะเท่ากับผลรวมของเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ กับโมเมนต์รอบ O' เนื่องจาก $\mathbf{R}$ กระทำที่จุด O ดูรูปที่ 3.41



รูปที่ 3.41 (Beer, 1988: 100)

จะได้

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \qquad (3.53)$$

ในทางปฏิบัติ การลดระบบแรงใด ๆ ให้เหลือเป็นแรงเดี่ยว 1 แรง $\mathbf{R}$ กระทำที่ O และแรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ จะแสดงให้อยู่ในรูปองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก โดยการแยกแรง $\mathbf{F}$ และเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ให้อยู่ในแกน x, y, z ดังนี้

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.54}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.55}$$

แทนค่า **r** และ **F** ลงในสมการ (3.52) และจากการแยกตัวประกอบของ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ จะได้ **R** และ $\mathbf{M}_O^R$ ในรูป

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O^R = \mathbf{M}_x^R\mathbf{i} + \mathbf{M}_y^R\mathbf{j} + \mathbf{M}_z^R\mathbf{k} \tag{3.56}$$

แรงองค์ประกอบ R_x, R_y, R_z แทนผลรวมของแรงองค์ประกอบในระบบทั้งหมดในแกน x, y, z ตามลำดับ และเป็นการวัดแนวโน้มของระบบแรง ซึ่งพยายามกระทำให้วัตถุคงรูปเคลื่อนที่แบบเลื่อนขนานในแนวแกน x, y, z

ในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์องค์ประกอบ $\mathbf{M}_x^R, \mathbf{M}_y^R, \mathbf{M}_z^R$ แทนผลรวมของโมเมนต์ซึ่งเกิดจากแรงทั้งหมดในระบบกระทำรอบแกน x, y, z และใช้วัดแนวโน้มของระบบแรงซึ่งพยายามกระทำให้วัตถุคงรูปหมุนรอบแกน x, y, z

ถ้าต้องการหาขนาดและทิศทางของแรง **R** และ $\mathbf{M}_O^R$ หาได้จากความสัมพันธ์ในสมการ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \text{และ} \quad \cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R}$$

3.18 ระบบซึ่งสมมูลของแรงหลายแรง

จากหัวข้อที่แล้ว จะเห็นว่าระบบแรงใด ๆ ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปหนึ่งอาจถูกลดเป็นระบบแรงและแรงคู่ควบกระทำที่จุดซึ่งกำหนดให้ O ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลนี้มีผลต่อวัตถุคงรูปเช่นเดิม

ระบบแรง 2 ระบบจะสมมูลกันถ้าระบบแรงทั้ง 2 ระบบนั้นสามารถลดลงให้เหลือเป็นระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งเหมือนกัน ที่จุดซึ่งกำหนดให้ O

จากสมการ (3.52) ระบบแรง 2 ระบบคือ $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ และ $\mathbf{F}_1^{'}, \mathbf{F}_2^{'}, \mathbf{F}_3^{'}$ จะสมมูลกันก็ต่อเมื่อ ผลรวมของแรงและผลรวมของโมเมนต์รอบจุด O ซึ่งกำหนดให้ ของแรงทั้งหมดในทั้ง 2 ระบบนั้นมีค่าเท่ากัน ซึ่งเขียนในรูปทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}^{'} \quad \text{และ} \quad \sum \mathbf{M}_O = \sum \mathbf{M}_O^{'} \tag{3.57}$$

แยกแรงและโมเมนต์ในสมการ (3.57) ให้อยู่ในรูปแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก จะได้เงื่อนไขซึ่งจะทำให้ระบบแรง 2 ระบบ ซึ่งกระทำต่อวัตถุคงรูปสมมูลกัน ดังนี้

$$\begin{array}{lll} \sum F_x = \sum F_x^{'} & \sum F_y = \sum F_y^{'} & \sum F_z = \sum F_z^{'} \\ \sum M_x = \sum M_x^{'} & \sum M_y = \sum M_y^{'} & \sum M_z = \sum M_z^{'} \end{array} \tag{3.58}$$

สมการเหล่านี้แสดงให้เห็นว่าระบบของแรง 2 ระบบจะสมมูลกัน ถ้าระบบของทั้งสองนั้นพยายามกระทำต่อวัตถุคงรูปให้ เกิดการเคลื่อนที่แบบเลื่อนขนานในแกน x, y, z เหมือนกัน และ เกิดการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกน x, y, z เหมือนกัน

3.19 การลดระบบของแรงในลักษณะอื่น

ในกรณีที่ลดระบบของแรงในหัวข้อ 3.17 ให้เหลือเป็นแรงเดี่ยว $\mathbf{R}$ และเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ ถ้าแรง $\mathbf{R} = 0$ จะเหลือเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ เท่านั้น นั่นคือระบบแรงใด ๆ อาจจะลดให้เหลือเป็นแรงคู่ควบ 1 คู่ ซึ่งเรียกว่า **แรงคู่ควบลัพธ์** ของระบบแรงนั้น

จากการสำรวจเงื่อนไขที่จะลดระบบแรงใด ๆ ให้เหลือแรงเดี่ยว 1 แรง พิจารณาจากหัวข้อ 3.16 ที่ว่า ระบบแรงและแรงคู่ควบที่ O อาจแทนได้ด้วยแรงเดี่ยว 1 แรง $\mathbf{R}$ กระทำในแนวใหม่ที่กำหนดให้ถ้า $\mathbf{R}$ และ $\mathbf{M}_O^R$ ตั้งฉากกัน สรุปได้ว่าระบบของแรงซึ่งอาจลดเป็นแรงเดี่ยวหรือแรงลัพธ์ 1 แรงได้ ถ้าแรง $\mathbf{R}$ และเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ ตั้งฉากกัน เงื่อนไขนี้ไม่สามารถใช้ได้ทั่วไปในระบบแรง 3 มิติ จะใช้ได้ในกรณี 3 มิติเฉพาะถ้าระบบแรงนั้นเป็น ระบบแรงร่วมจุด หรือ ระบบแรงในระนาบเดียวกัน หรือ ระบบแรงขนานกัน

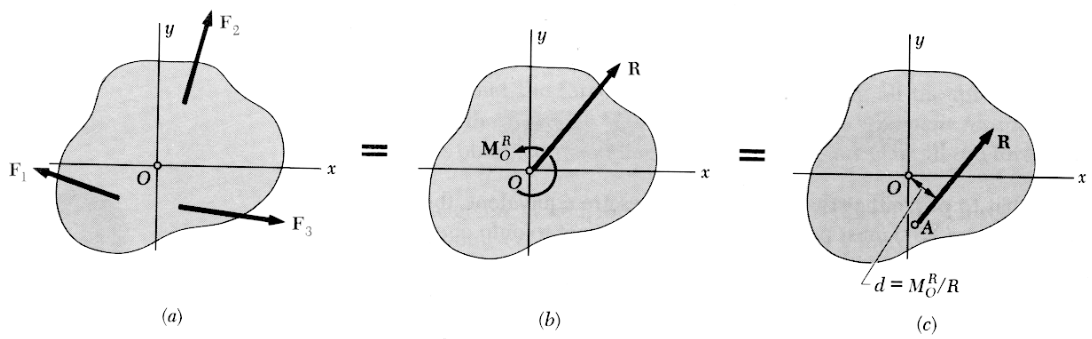
1. กรณีระบบแรงร่วมจุด

แรงทั้งหมดสามารถรวมกันโดยตรงออกมาเป็นแรงลัพธ์ $\mathbf{R}$ ได้เสมอ ดูบทที่ 2

2. กรณีระบบแรงในระนาบเดียวกัน

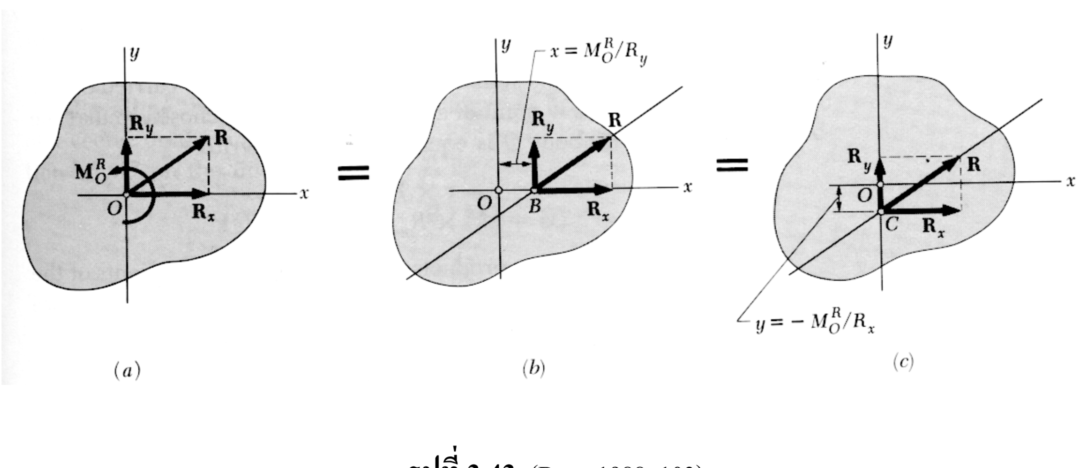
ผลรวม **R** ของแรงในระบบจะอยู่ในระนาบเดียวกับแรงทั้งหลายในระนาบนั้น ดูรูปที่ 3.42(a) ในขณะที่โมเมนต์ของแต่ละแรงรอบจุด O ใด ๆ ผลรวมที่ได้จะเป็นโมเมนต์ลัพธ์ $\mathbf{M}_O^R$ ซึ่งตั้งฉากกับระนาบนั้น ดูรูปที่ 3.42(b)

จากระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งกระทำที่ O ซึ่งประกอบด้วย **R** และ $\mathbf{M}_O^R$ ซึ่งตั้งฉากกัน สามารถลดให้เหลือแรงเดี่ยว 1 แรง **R** ได้โดยการเลื่อน **R** ไปในระนาบนั้นจนกระทั่งโมเมนต์เนื่องจากแรง **R** รอบจุด O เท่ากับ $\mathbf{M}_O^R$ ระยะจาก O ไปยัง **R** นี้หาได้จาก $d = \dfrac{M_O^R}{R}$ ดูรูปที่ 3.42(c)



รูปที่ 3.42 (Beer, 1988: 102)

จากหัวข้อ 3.17 สังเกตว่า การลดระบบของแรงจะง่ายขึ้นถ้าแรงต่าง ๆ ถูกแยกให้เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก ดังนั้นแรงในระบบแรงและแรงคู่ควบที่ O จึงแสดงให้อยู่ในรูปแรงองค์ประกอบ ดูรูปที่ 3.43(a)



รูปที่ 3.43 (Beer, 1988: 103)

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad M_z^R = M_O^R = \sum M_O \qquad (3.59)$$

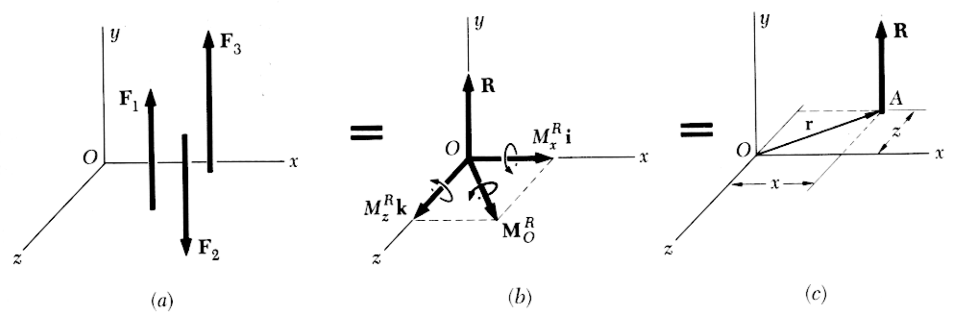
ในการลดให้เหลือแรงเดี่ยว 1 แรง **R** นั้น ต้องให้โมเมนต์ซึ่งเกิดจาก **R** รอบ *O* เท่ากับ $\mathbf{M}_O^R$ กำหนดให้ x, y เป็นพิกัดของจุด A ซึ่งแรง **R** กระทำ จากหัวข้อ 3.8 จะได้

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

ซึ่งแทนสมการเส้นตรงของแนวการกระทำของ **R**
อาจจะหา x และ y ได้โดยตรงจากความรู้ที่ว่า $\mathbf{M}_O^R$ ต้องเท่ากับโมเมนต์รอบ *O* เนื่องจากแรงองค์ประกอบ **R** ในแกน y เมื่อ **R** กระทำที่จุด B ดูรูปที่ 3.43(b) และต้องเท่ากับโมเมนต์รอบ *O* เนื่องจากแรงองค์ประกอบ **R** ในแกน x เมื่อ **R** กระทำที่จุด C ดูรูปที่ 3.43(c)

3. กรณีระบบแรงขนานกัน

สมมติให้แรงทั้งหมดขนานกันในแกน y ดูรูปที่ 3.44(a) แรงลัพธ์ **R** ย่อมขนานกับแกน y ด้วยเช่นกัน นอกจากนี้เนื่องจากโมเมนต์ของแรงซึ่งกำหนดให้ต้องตั้งฉากกับแรงนั้น โมเมนต์ลัพธ์รอบ *O* ของแต่ละแรงในระบบ $\mathbf{M}_O^R$ จะอยู่ในระนาบ zx ดังนั้นระบบแรงและแรงคู่ควบที่จุด *O* จะประกอบด้วยแรง **R** และเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ ซึ่งตั้งฉากกัน ดูรูปที่ 3.44(b) ระบบแรงดังกล่าวอาจจะลดเหลือเป็นแรงเดี่ยว **R** ดูรูปที่ 3.44(c) หรือถ้า **R** = 0 อาจจะลดเหลือเป็นแรงคู่ควบเดี่ยว 1 คู่ $\mathbf{M}_O^R$



รูปที่ 3.44 (Beer, 1988: 103)

ในทางปฏิบัติ ระบบแรงและแรงคู่ควบที่จุด O จะแสดงในรูปแรงองค์ประกอบเป็น

$$R_y = \sum F_y \qquad M_x^R = \sum M_x \qquad M_z^R = \sum M_z \tag{3.60}$$

การลดระบบแรงให้เหลือแรงเดี่ยว 1 แรงอาจทำได้โดยย้าย **R** ให้ไปกระทำที่จุดใหม่ A(x, 0, z) โดยเลือกตำแหน่งของจุด A ซึ่งทำให้เกิดโมเมนต์เนื่องจาก **R** รอบ O มีค่าเท่ากับ $\mathbf{M}_O^R$ เขียนได้เป็น

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y \mathbf{j} = M_x^R \mathbf{i} + M_z^R \mathbf{k}$$

จากการคำนวณผลคูณเชิงเวกเตอร์ และ แก้สมการจากค่าสัมประสิทธิ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ของสมการข้างต้น จะได้สมการเชิงสเกลาร์ ซึ่งแสดงค่าพิกัดของ A ดังนี้

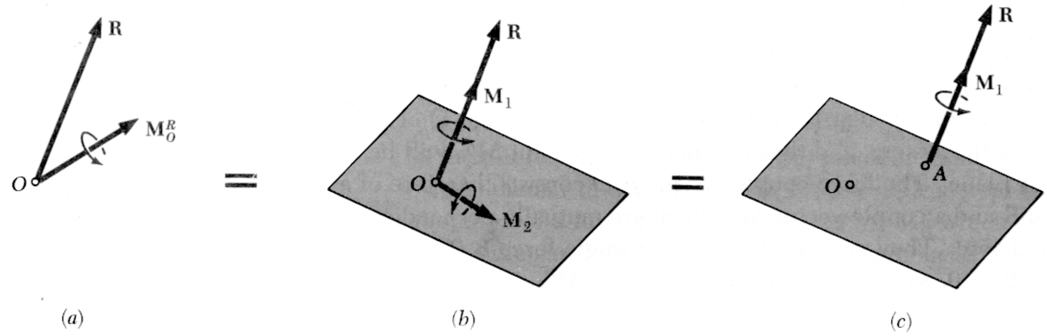
$$-zR_y = M_x^R \qquad xR_y = M_z^R$$

สมการนี้แสดงว่า โมเมนต์ของ **R** รอบแกน x และ z ต้องเท่ากับค่า M_x^R และ M_z^R ตามลำดับ

3.20 การลดระบบแรงเป็นระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน (a wrench)

ในกรณีทั่วไปของระบบแรงใน 3 มิติ ระบบแรงและแรงคู่ควบที่จุด O ซึ่งประกอบด้วยแรง **R** และเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ ซึ่งไม่ตั้งฉากกันและไม่เท่ากับ**ศูนย์**ทั้งคู่ ดูรูปที่ 3.45(a) ดังนั้นระบบแรงจึง**ไม่สามารถ**ลดให้เหลือแรงเดี่ยว 1 แรง หรือแรงคู่ควบ 1 คู่ได้ อย่างไรก็ตามเวกเตอร์แรงคู่ควบอาจจะถูกแทนได้ด้วยเวกเตอร์แรงคู่ควบอีก 2 คู่ซึ่งได้จากการแยก $\mathbf{M}_O^R$ ให้เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ $\mathbf{M}_1$ มีทิศทางในแนวแรง **R** และเวกเตอร์องค์ประกอบ $\mathbf{M}_2$ ในระนาบซึ่งตั้งฉากกับ **R** ดูรูปที่ 3.45(b)

เวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_2$ และแรง **R** ซึ่งตั้งฉากกัน สามารถแทนได้ด้วยแรงเดี่ยว 1 แรง **R** ซึ่งกระทำในแนวกระทำใหม่ ดังนั้นระบบแรงเดิมจะถูกลดเหลือเป็นแรง **R** และเวกเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_1$ ดูรูปที่ 3.45(c) นั่นคือลดเหลือแรง **R** และ แรงคู่ควบ 1 คู่ซึ่งกระทำอยู่ในระนาบซึ่งตั้งฉากกับ **R** ทำให้โมเมนต์มีแนวการกระทำในแนว **R**



รูปที่ 3.45 (Beer, 1988: 104)

ระบบแรงแบบนี้เรียกว่า **ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน** (a wrench) เพราะเกิดผลร่วมกันระหว่างแรงผลักและแรงบิด ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับการกระทำใน **ไขควง** (wrench)

แนวการกระทำของ **R** เรียกว่า **แกนของไขควง** (axis of the wrench) และอัตราส่วน $p = \dfrac{M_1}{R}$ เรียกว่า **pitch of the wrench**

ดังนั้น ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน ประกอบด้วยเวกเตอร์สองตัวร่วมแนวกระทำเดียวกัน คือแรง R และเวกเตอร์แรงคู่ควบ

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \tag{3.61}$$

จากสมการ (3.35) ซึ่งใช้หาภาพฉายของเวกเตอร์ในแนวแกนที่กำหนดให้ จะได้ ภาพฉายของ $\mathbf{M}_O^R$ ในแนว **R** คือ

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \bullet \mathbf{M}_O^R}{R}$$

และ pitch of the wrench

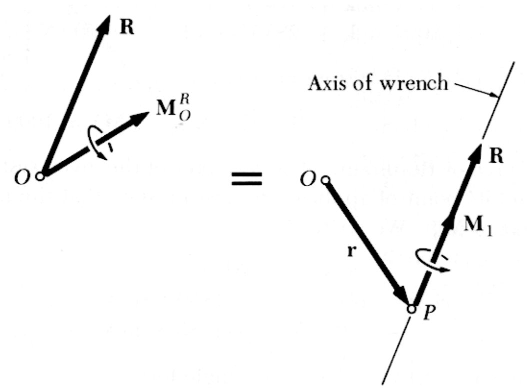
$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \bullet \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.62}$$

ในการนิยามแกนของไขควง อาจเขียนความสัมพันธ์ซึ่งเกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ตำแหน่ง **r** ของจุด P ใด ๆ ที่อยู่บนแกนของไขควง ให้แรงลัพธ์ **R** และเวกเตอร์คู่ควบ $\mathbf{M}_1$ กระทำที่ P ดูรูปที่ 3.46 แล้วแสดงให้เห็นว่าโมเมนต์รอบ O ของระบบแรงและแรงคู่ควบนี้เท่ากับ โมเมนต์ลัพธ์ของระบบแรงเดิม ดังนี้

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.63}$$

จากสมการ (3.61) ได้

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.64}$$



รูปที่ 3.46 (Beer, 1988: 105)

ในกรณีพิเศษ ถ้า **R** และ $\mathbf{M}_O^R$ ต่างเท่ากับ **ศูนย์** ระบบแรงนั้นจะไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุคงรูปซึ่งถูกกระทำด้วยระบบแรงนั้น และเรียกวัตถุคงรูปนั้นว่าอยู่ใน**สภาวะสมดุล**

ตัวอย่าง 3.8

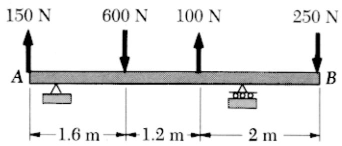
คาน 4.80 m ถูกกระทำด้วยแรงดังรูป ให้แทนระบบแรงที่กำหนดให้เป็น

ก. ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่ **A**

ข. ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่ **B**

ค. แรงเดี่ยว 1 แรง หรือ แรงลัพธ์

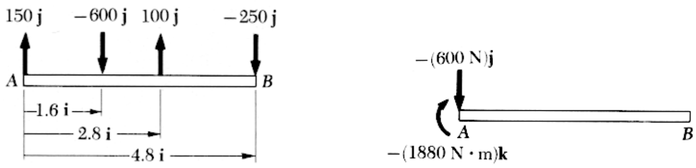
ข้อสังเกต เนื่องจากระบบที่กำหนดให้ไม่ได้รวมแรงปฏิกิริยามาให้ด้วย ซึ่งจะเป็นผลให้คานนี้จะยังไม่สมดุลภายใต้ระบบแรงที่กำหนดมาให้



(Beer, 1988: 106)

วิธีทำ

ก. ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่ A



(Beer, 1988: 106)

ประกอบด้วยแรง **R** และแรงคู่ควบ $\mathbf{M}_A^R$
ดังนี้

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}$$

$$= (150\text{ N})\mathbf{j} - (600\text{ N})\mathbf{j} + (100\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{j} = -(600\text{ N})\mathbf{j}$$

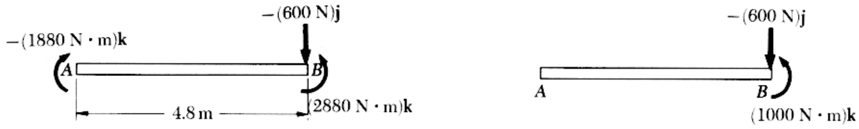
$$\mathbf{M}_A^R = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j})$$

$$= -(1880\text{ N.m})\mathbf{k}$$

ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่ **A** คือ $\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow$ และ $\mathbf{M}_A^R = 1880\text{ N.m}\circlearrowright$ **ตอบ**

ข. ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่ B



(Beer, 1988: 106)

ประกอบด้วยแรง **R** และแรงคู่ควบ $\mathbf{M}_B^R$ ดังนี้

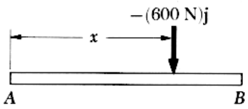
แรง $\mathbf{R} = -(600\text{ N})\mathbf{j}$ ไม่เปลี่ยนแปลง

ส่วน $\mathbf{M}_B^R$ หาได้จาก ผลที่ได้จาก ข้อ ก.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R} \\ &= -(1880\text{ N.m})\mathbf{k} + (-4.8\text{ m})\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} \\ &= -(1880\text{ N.m})\mathbf{k} + (2880\text{ N.m})\mathbf{k} = +(1000\text{ N.m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่ B คือ $\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow$ และ $\mathbf{M}_B^R = 1000\text{ N.m}$ ↺ **ตอบ**

ค. แรงเดี่ยว 1 แรง หรือ แรงลัพธ์



(Beer, 1988: 106)

แรงลัพธ์ของระบบต้องเท่ากับ **R** และจุดซึ่งกระทำจะต้องทำให้เกิดโมเมนต์รอบ A มีค่าเท่ากับ $\mathbf{M}_A^R$ เขียนได้เป็น

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

$$x\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} = -(1880\text{ N.m})\mathbf{k}$$

$$-x(600\text{ N})\mathbf{k} = -(1880\text{ N.m})\mathbf{k}$$

ได้

$$x = 3.13\text{ m}$$

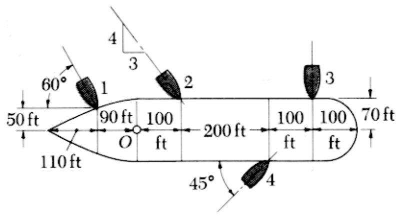
นั่นคือ แรงเดี่ยวซึ่งสมมูลกับระบบนี้คือ $\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow$ $x = 3.13\text{ m}$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 3.9

เรือลากจูง (tugboat) 4 ลำ กระทำต่อเรือเดินสมุทรลำหนึ่งแต่ละลำใช้แรง 5000 lb ด้วยทิศทางดังรูป ให้หา

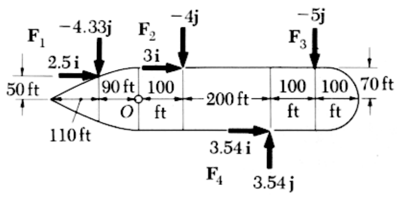
ก. ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่เสากระโดงเรือด้านหน้า

ข. ตำแหน่งซึ่งเรือลากจูง เพียง 1 ลำ ที่มีกำลังมากขึ้น จะผลักดันให้เกิดผลต่อเรือเดินสมุทรลำนี้เหมือนกับเรือลากจูง 4 ลำเดิม



(Beer, 1988: 107)

ก. ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่เสากระโดงเรือด้านหน้า *O*



(Beer, 1988: 107)

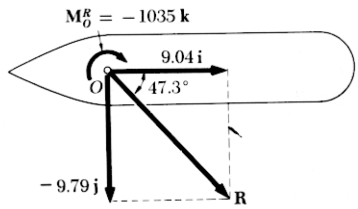
แยกแรงทุกแรงให้เป็นแรงองค์ประกอบ 2 แรงซึ่งตั้งฉากกัน (ใช้หน่วยกิโลปอนด์ ,kip) ระบบแรงที่ได้ต้องประกอบด้วยแรง **R** และแรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} \\
&= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\
&= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j} \\
\mathbf{M}_O^R &= \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
&= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.5\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times \left(3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}\right) \\
&\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j}) + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\
&= (390 - 125 - 400 - 210 - 2000 + 1062 + 248)\mathbf{k} \\
&= -1035\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ ระบบแรงและแรงคู่ควบสมมูลที่ O ได้แก่

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_O^R = -(1035 \text{ kip.ft})\mathbf{k}$$

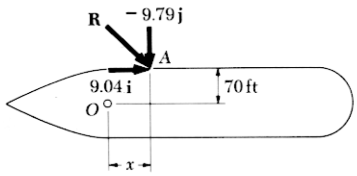
หรือ $\mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \; 47.3^\circ \qquad \mathbf{M}_O^R = 1035 \text{ kip.ft}$ **ตอบ**



(Beer, 1988: 107)

หมายเหตุ ทุกแรงในระบบนี้อยู่ในระนาบเดียวกัน ผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งหมดต้องตั้งฉากกับระนาบนี้ และโมเมนต์ของแต่ละแรงองค์ประกอบสามารถหาได้จากผลคูณของขนาดของแรงนั้นกับระยะตั้งฉากจาก O พร้อมทั้งกำหนดเครื่องหมายบวกสำหรับโมเมนต์ทวนเข็ม และลบสำหรับโมเมนต์ตามเข็ม

ข. ตำแหน่งซึ่งเรือลากจูง เพียง 1 ลำ ที่มีกำลังมากขึ้น จะผลักดันให้เกิดผลต่อเรือเดินสมุทรลำนี้เหมือนกับเรือลากจูง 4 ลำเดิม



(Beer, 1988: 107)

แรงซึ่งกระทำโดยเรือลากจูงลำเดียวจะต้องเท่ากับ $\mathbf{R}$ และจุดตำแหน่งซึ่ง $\mathbf{R}$ กระทำคือ A ต้องทำให้เกิดโมเมนต์รอบ O เท่ากับ $\mathbf{M}_O^R$

เนื่องจากผลจาก $\mathbf{M}_O^R$ พยายามทำให้เรือเดินสมุทรหมุนตามเข็ม (มีเครื่องหมายเป็นลบ) จึงสมมุติให้จุด A มีตำแหน่งดังรูป โดย

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

จาก $$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

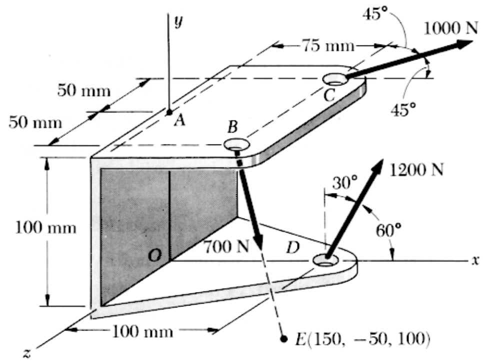
ได้ $$(x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) = -1035\mathbf{k}$$

$$-x(9.79)\mathbf{k} - 636\mathbf{k} = -1035\mathbf{k}$$

$x = 41.1$ ft **ตอบ**

ตัวอย่าง 3.10

เคเบิล 3 เส้นยึดติดกับ bracket ดังรูป ให้แทนแรงเนื่องจากเคเบิลทั้ง 3 นี้ ด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบที่ A



(Beer, 1988: 108)

วิธีทำ

หาเวคเตอร์ซึ่งเชื่อมต่อ A กับจุดอื่น ๆ ซึ่งแรงกระทำ และแยกแรงทั้งหมดเป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก

สังเกตว่า $\mathbf{F}_B = (700\text{ N})\lambda_{AB}$ เมื่อ

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

ใช้หน่วย เมตร และ นิวตัน ได้

$$\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} \quad -707\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} \qquad \mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1039\mathbf{j}$$

ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลที่ A ประกอบด้วย แรง 1 แรง $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}$ และแรงคู่ควบ 1 คู่ $\mathbf{M}_A^R = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$

แรง **R** หาได้จากการบวกลบกันตามเครื่องหมายของแรงต่าง ๆ ในแกนเดียวกัน

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D = (1607\text{ N})\mathbf{i} + (439\text{ N})\mathbf{j} - (507\text{ N})\mathbf{k}$$

การคำนวณหา $\mathbf{M}_A^R$ จะสะดวกและง่ายขึ้นโดยเขียน $\mathbf{M}_A^R = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ อยู่ในรูปดีเทอร์มิแนนต์ดังนี้

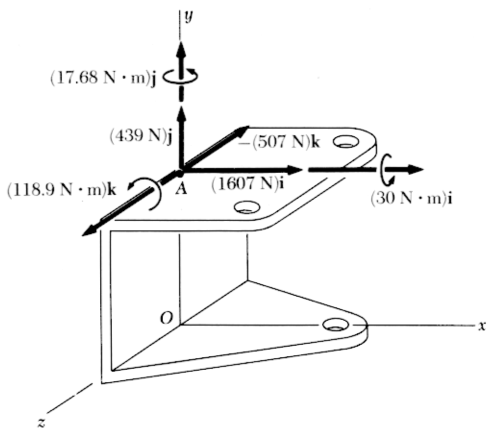
$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} \quad -45\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -700 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\mathbf{k}$$

รวมโมเมนต์ในแกนเดียวกันตามเครื่องหมาย บวก และ ลบ ได้

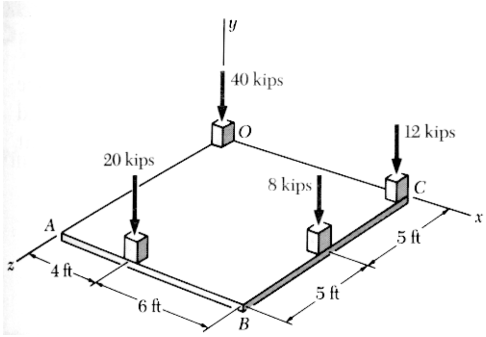
$$\mathbf{M}_A^R = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30\text{ N.m})\mathbf{i} + (17.68\text{ N.m})\mathbf{j} + \left(118.9\text{ N.m}\right)\mathbf{k}$$ **ตอบ**



(Beer, 1988: 108)

ตัวอย่าง 3.11

ฐานรากสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขนาด 10 ft x 10 ft รองรับเสา 4 ต้นซึ่งออกแรงกระทำต่อฐานรากดังรูป ให้หาขนาดและจุดกระทำของแรงลัพธ์ของระบบแรงที่กำหนดให้



(Beer, 1988: 109)

วิธีทำ

ลดระบบแรงให้เหลือเป็นระบบแรงและแรงคู่ควบกระทำที่จุดกำเนิด O ซึ่งประกอบด้วยแรง $\mathbf{R}$ และ $\mathbf{M}_O^R$ ดังนี้

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดต่าง ๆ ซึ่งแรงในระบบที่กำหนดให้กระทำ เขียนในรูปตารางได้ดังนี้

r, ft	**F**, kips	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kip.ft
0	-40**j**	0
10**i**	-12**j**	-120**k**
10**i** + 5**k**	-8**j**	40**i** - 80**k**
4**i** + 10**k**	-20**j**	200**i** - 80**k**
	R = -80**j**	$\mathbf{M}_O^R$ = 240**i** – 280**k**

เนื่องจากแรง $\mathbf{R}$ และเวคเตอร์แรงคู่ควบ $\mathbf{M}_O^R$ ตั้งฉากกัน ระบบแรงและแรงคู่ควบนี้สามารถจะลดให้เหลือแค่แรงเดี่ยว $\mathbf{R}$ 1 แรง โดยตำแหน่งที่ $\mathbf{R}$ กระทำใหม่ต้องทำให้เกิดโมเมนต์รอบจุด O เท่ากับ โมเมนต์ $\mathbf{M}_O^R$

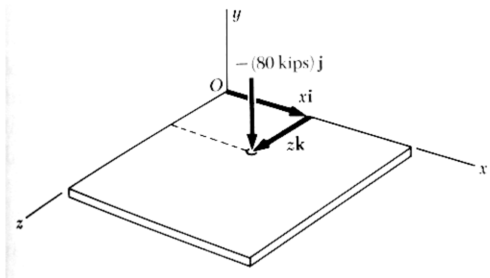
ให้ $\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดซึ่ง $\mathbf{R}$ กระทำใหม่ โดยมีพิกัดเป็น x และ z ได้

$$\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i}+z\mathbf{k})\times(-80\mathbf{j})=240\mathbf{i}-280\mathbf{k}$$
$$-80x\mathbf{k}+80z\mathbf{i}=240\mathbf{i}-280\mathbf{k}$$

สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{k}$ และ $\mathbf{i}$ ต้องเท่ากันทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$-80x=-280 \qquad\qquad 80z=240$$
$$x=3.50\text{ ft} \qquad\qquad z=3.00\text{ ft}$$

แรงลัพธ์ของระบบที่กำหนดให้ คือ $\mathbf{R}=80\text{ kips}\downarrow$ กระทำที่ $x=3.50\text{ ft}$, $z=3.00\text{ ft}$ **ตอบ**



(Beer, 1988: 109)

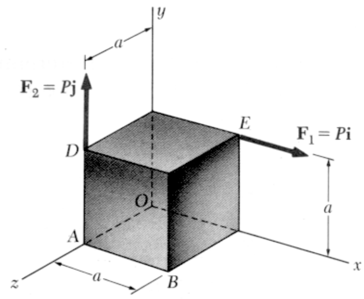
ตัวอย่าง 3.12

แรง 2 แรงซึ่งมีขนาดเท่ากัน P กระทำต่อวัตถุรูปทรงลูกบาศก์ ดังรูป ให้แทนแรง 2 แรงดังกล่าวด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน ซึ่งสมมูล และ ให้หา

ก. ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ **R**

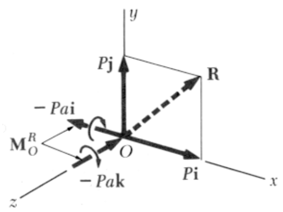
ข. the pitch of the wrench

ค. จุดซึ่งแกนของระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน ตัดกับระนาบ yz



(Beer, 1988: 110)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 110)

หาระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุดกำเนิด O

เวกเตอร์ตำแหน่งของจุด E และ D ซึ่งแรงทั้ง 2 กระทำ คือ

$$\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} \quad \text{และ} \quad \mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$$

ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุดกำเนิด O ซึ่งประกอบด้วยแรง **R** และ $\mathbf{M}_O^R$ เป็นดังนี้

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j}$$

$$= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \qquad (2)$$

ก. ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ R

แรงลัพธ์ **R** จากสมการ (1) แรงลัพธ์ **R** มีขนาด $R = P\sqrt{2}$ และอยู่ในระนาบ xy และทำมุม 45° กับแกน x และ y ดังนั้น

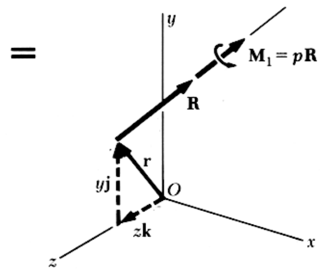
$$R = P\sqrt{2} \qquad \theta_x = \theta_y = 45^\circ \qquad \theta_z = 90^\circ$$ **ตอบ**

ข. the pitch of the wrench จากสมการ (3.62) และ สมการ (1) และ (2) ได้

$$p = \frac{\mathbf{R} \bullet \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i}+\mathbf{j}) \bullet (-Pa)(\mathbf{i}+\mathbf{k})}{\left(P\sqrt{2}\right)^2} = \frac{-P^2 a(1+0+0)}{2P^2}$$

$$p = -\frac{a}{2}$$ **ตอบ**

ค. จุดซึ่งแกนของระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน ตัดกับระบาบ yz



(Beer, 1988: 110)

จากข้อ ก. และ ข. และ สมการ (3.61) ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน ประกอบด้วยแรง **R** จากข้อ ก. และ เวกเตอร์คู่ควบ

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) \qquad (3)$$

จากโมเมนต์ของ ระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งมีแกนร่วมกัน รอบ O เท่ากับ โมเมนต์ลัพธ์ $\mathbf{M}_O^R$ ของระบบแรงเดิม

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

และจาก $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ และแทนค่า $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$ และ $\mathbf{M}_1$ จากสมการ (1), (2) และ (3) ได้

$$-\frac{Pa}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + (y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = -Pa(\mathbf{i}+\mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} = -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k}$$

ให้สัมประสิทธิ์ของ **k** และ **j** เท่ากันทั้งสองข้างของสมการ ได้

y = a z = a/2 **ตอบ**