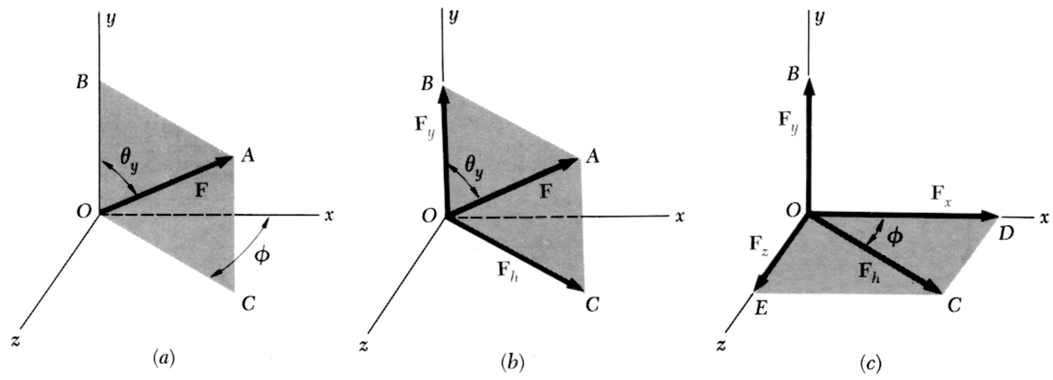
แรงในปริภูมิ (แรงใน 3 มิติ)

2.11 แรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉากของแรงในปริภูมิ (Rectangular Components of a Force in Space)

พิจารณาแรง **F** ซึ่งกระทำที่จุดกำเนิด O ของระบบพิกัดฉาก x, y, z โดยแรง **F** อยู่ในระนาบดิ่ง $OBAC$ ดูรูปที่ 2.16(a) ระนาบนี้อยู่ในแนวขนานและตัดผ่านแกนดิ่ง y ทิศทางของระนาบนี้บอกด้วยค่ามุม ϕ ซึ่งเป็นมุมที่ระนาบนี้ทำกับระนาบ xy และทิศทางแรง **F** ซึ่งอยู่ในระนาบนี้บอกด้วยค่ามุม θ_y ซึ่งเป็นมุมซึ่งแนวแรง **F** ทำกับแกน y



รูปที่ 2.16 (Beer, 1988: 39)

แยกแรง **F** ออกเป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก $\mathbf{F}_y$ และแรงองค์ประกอบ $\mathbf{F}_h$ ซึ่งอยู่ในแนวดิ่งและแนวราบตามลำดับ ดูรูปที่ 2.16(b) ขนาดของแรงองค์ประกอบทั้งสองมีค่า ดังนี้

$$F_y = F\cos\theta_y \qquad F_h = F\sin\theta_y \tag{2.11}$$

จากนั้นแยกแรง $\mathbf{F}_h$ ออกเป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก $\mathbf{F}_x$ และ $\mathbf{F}_z$ ดูรูปที่ 2.16(c) ได้

$$\begin{aligned} F_x &= F_h\cos\phi = F\sin\theta_y\cos\phi \\ F_z &= F_h\sin\phi = F\sin\theta_y\sin\phi \end{aligned} \tag{2.12}$$

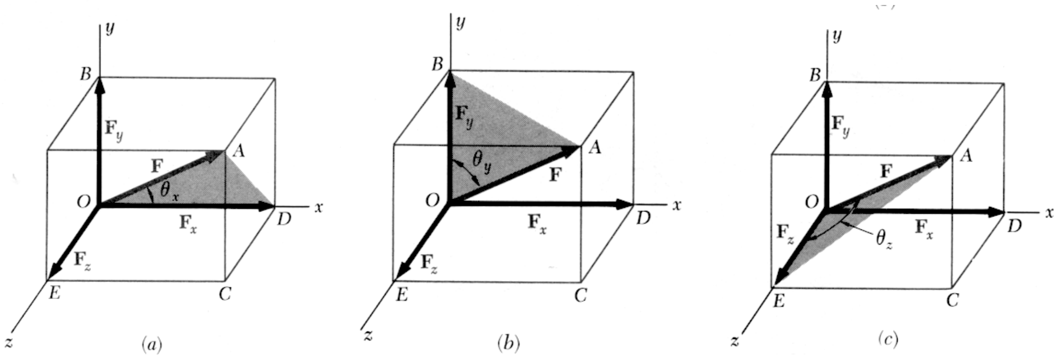
นั่นคือแรง **F** ถูกแยกให้เป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก 3 แรง คือ $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ และ $\mathbf{F}_z$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม *OAB* และรูปสามเหลี่ยม *OCD* ในรูปที่ 2.16 มีมุม *B* และ *D* เป็นมุมฉากตามลำดับ จากทฤษฎีของพีทาโกรัส ได้

$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2$$
$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

จะได้ $$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

หรือ $$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.13)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างแรง **F** และแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉากทั้ง 3 คือ $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ และ $\mathbf{F}_z$ จะเห็นได้ชัดเจนขึ้นโดยพิจารณาให้ขนาดของแรง $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ และ $\mathbf{F}_z$ เป็นความยาวของด้านทั้ง 3 ของกล่อง 1 กล่อง โดยมีขนาดของแรง **F** เท่ากับความยาวเส้นทแยงมุมของกล่องนี้ ดูรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 (Beer, 1988: 40)

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก *OAD* มีมุม D เท่ากับ 90° จะได้ $F_x = F\cos\theta_x$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก *OAB* มีมุม B เท่ากับ 90° จะได้ $F_y = F\cos\theta_y$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก *OAE* มีมุม E เท่ากับ 90° จะได้ $F_z = F\cos\theta_z$

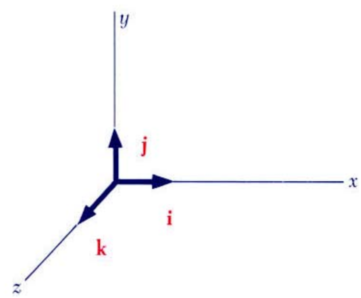
ดังนั้นเขียนได้เป็น

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z \quad (2.14)$$

เมื่อ $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ เป็นมุมที่แนวแรง **F** กระทำกับแกน x, y, z ตามลำดับ ส่วน $\cos\theta_x, \cos\theta_y$ และ $\cos\theta_z$ เรียกว่า **โคไซน์บอกทิศทาง** (direction cosines) ของแรง **F** ให้ **i**, **j**, **k** เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย มีทิศทางไปตามแกน x, y, z ตามลำดับ ดูรูปที่ 2.18 เขียนแรง **F** ในรูปเวกเตอร์ ได้ดังนี้

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.15}$$

เมื่อ F_x, F_y, F_z เป็นขนาดของแรงองค์ประกอบ ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์



รูปที่ 2.18 (Beer, 1988: 40)

ตัวอย่าง 2.11

แรง 500 N ทำมุม 60°, 45° และ 120° กับแกน x, y, z ตามลำดับ ให้หาแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก F_x, F_y, F_z ของแรงนี้

วิธีทำ

แทนค่า $F = 500\ N,\ \theta_x = 60^\circ,\ \theta_y = 45^\circ,\ \theta_z = 120^\circ$ ในสมการ (2.14)

จะได้

$$F_x = (500\ \text{N})\cos 60^\circ = +250\ \text{N}$$
$$F_y = (500\ \text{N})\cos 45^\circ = +354\ \text{N}$$
$$F_z = (500\ \text{N})\cos 120^\circ = -250\ \text{N}$$

เขียนในรูปเวกเตอร์ ได้เป็น

$$\mathbf{F} = (250\ \text{N})\mathbf{i} + (354\ \text{N})\mathbf{j} - (250\ \text{N})\mathbf{k}$$ **ตอบ**

หมายเหตุ

เครื่องหมายบวก แสดงว่าทิศทางของแรงองค์ประกอบชี้ไปตามทิศทางของแกน x, y, z
เครื่องหมายลบ แสดงว่าทิศทางของแรงองค์ประกอบชี้ตรงข้ามกับทิศทางของแกน x, y, z

แทนค่า $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ และ $\mathbf{F}_z$ จากสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.15) ได้

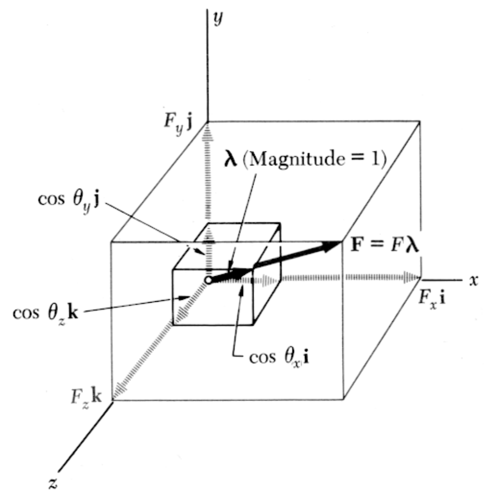
$$\mathbf{F} = F\left(\cos\theta_x \mathbf{i} + \cos\theta_y \mathbf{j} + \cos\theta_z \mathbf{k}\right) \tag{2.16}$$

แสดงว่าแรง **F** อาจเขียนอยู่ในรูปของผลคูณของปริมาณสเกลาร์ F และปริมาณเวกเตอร์ $\boldsymbol{\lambda}$ โดย

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x \mathbf{i} + \cos\theta_y \mathbf{j} + \cos\theta_z \mathbf{k} \tag{2.17}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ **F** ดูรูปที่ 2.19 และจากสมการ (2.17) เวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\boldsymbol{\lambda}$ มีค่าเท่ากับโคไซน์บอกทิศทางของแนวการกระทำของแรง **F**

$$\lambda_x = \cos\theta_x \qquad \lambda_y = \cos\theta_y \qquad \lambda_z = \cos\theta_z \tag{2.18}$$



รูปที่ 2.19 (Beer, 1988: 41)

ข้อสังเกต ค่าของมุม $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน

จากผลรวมของผลคูณกำลังสองของเวกเตอร์องค์ประกอบของ $\boldsymbol{\lambda}$ มีค่าเท่ากับขนาดของ $\boldsymbol{\lambda}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 จะได้

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

แทนค่า $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ จากสมการ (2.18) ลงไป ได้

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \qquad (2.19)$$

เมื่อกำหนดขนาดของแรงองค์ประกอบ F_x, F_y, F_z ของแรง **F** มาให้ ขนาดของแรง **F** ได้หาจากสมการ (2.13)

และใช้ สมการ (2.14) หาโคไซน์บอกทิศทาง จาก

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \qquad (2.20)$$

จะหามุม $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ซึ่งบอกทิศทางของแรง **F** ได้

ตัวอย่าง 2.12

แรง **F** มีแรงองค์ประกอบ $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb, $F_z = 60$ lb ให้หาขนาดและทิศทางของแรง **F**

วิธีทำ

หาขนาดของ F จาก

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$F = \sqrt{(20)^2 + (-30)^2 + (60)^2}$$
$$F = \sqrt{4900} = 70 \text{ lb}$$ **ตอบ**

หาทิศทางของ F จาก

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}}$$

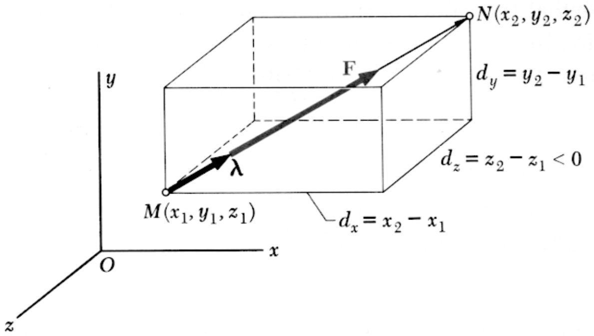
ได้

$$\theta_x = 73.4^\circ \qquad \theta_y = 115.4^\circ \qquad \theta_z = 31.0^\circ$$ **ตอบ**

2.12 แรงซึ่งบอกด้วยขนาดและจุด 2 จุดบนแนวแรงนั้น

ในหลายกรณี ทิศทางของแรง **F** บอกด้วยพิกัดของจุด 2 จุด $M(x_1, y_1, z_1)$ และ $N(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งอยู่บนแนวแรง **F** ดูรูปที่ 2.20 พิจารณาเวกเตอร์ $\overrightarrow{MN}$ ซึ่งเชื่อมต่อจุด M และ N และมีทิศทางเดียวกันกับแรง **F** กำหนดให้ d_x, d_y, d_z เป็นแรงองค์ประกอบเชิงสเกลาร์ของ $\overrightarrow{MN}$ จะได้

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \tag{2.21}$$



รูปที่ 2.20 (Beer, 1988: 42)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย λ มีทิศทางไปตามแนวแรง **F** ซึ่งหาได้จาก การหารเวกเตอร์ $\overrightarrow{MN}$ ด้วยขนาด MN แล้วแทนค่า $\overrightarrow{MN}$ จากสมการ (2.21) ลงไป ข้อสังเกต MN เท่ากับระยะ d จาก M ถึง N

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}\left(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}\right) \tag{2.22}$$

จากแรง **F** เท่ากับ ผลคูณของขนาดของ F และ λ จะได้

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}\left(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}\right) \tag{2.23}$$

ซึ่งจะได้องค์ประกอบเชิงสเกลาร์ของ **F** ดังนี้

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \qquad (2.24)$$

สามารถใช้สมการ (2.24) หาองค์ประกอบเชิงสเกลาร์ของแรง **F** เมื่อกำหนดขนาด F และแนวแรงของ **F** ซึ่งบอกด้วยจุด 2 จุด M และ N ด้วยการลบพิกัดของ M ด้วย N จะหาองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\overrightarrow{MN}$ และระยะ d จาก M ถึง N ได้ดังนี้

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

แทนค่าขนาด F และ d_x, d_y, d_z, d ลงในสมการ (2.24) จะได้แรงองค์ประกอบ F_x, F_y, F_z ของแรง **F**

มุม $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ซึ่งแรง F ทำกับแกนพิกัด หาได้จากสมการ (2.20)

เปรียบเทียบ สมการ (2.17) และ สมการ (2.22) จะได้

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d} \qquad (2.25)$$

2.13 การรวมแรงในระบบแรงร่วมจุดในปริภูมิ

ใช้หลักการเช่นเดียวกับการรวมแรงในระบบแรง 2 มิติ คือ แรงลัพธ์เท่ากับผลรวมของแรงองค์ประกอบทั้งหมด

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}$$

โดยแยกแรงทุกแรงให้เป็นแรงองค์ประกอบ 3 แรงในแนวตั้งฉาก ได้ดังนี้

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \sum\left(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}\right)$$

$$R_x\mathbf{i}+R_y\mathbf{j}+R_z\mathbf{k}=\left(\sum F_x\right)\mathbf{i}+\left(\sum F_y\right)\mathbf{j}+\left(\sum F_z\right)\mathbf{k}$$

เขียนได้ เป็น

$$R_x=\sum F_x \qquad R_y=\sum F_y \qquad R_z=\sum F_z \tag{2.26}$$

ขนาด และทิศทางของแรงลัพธ์ หาได้จาก

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2} \tag{2.27}$$

และ

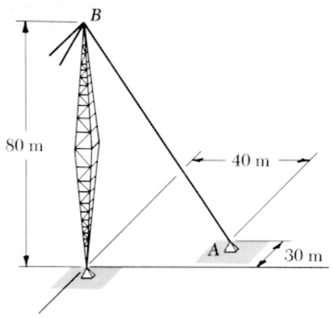
$$\cos\theta_x=\frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y=\frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z=\frac{R_z}{R} \tag{2.28}$$

ตัวอย่าง 2.13

สายยึดโยงเสาสูงถูกยึดเข้ากับสลักเกลียว A แรงดึงในสายยึดเท่ากับ 2500 N ให้หา

ก. แรงองค์ประกอบ F_x, F_y, F_z ของแรงซึ่งกระทำต่อสลักเกลียว A

ข. มุม $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ซึ่งเป็นบอกทิศทางของแรงนี้

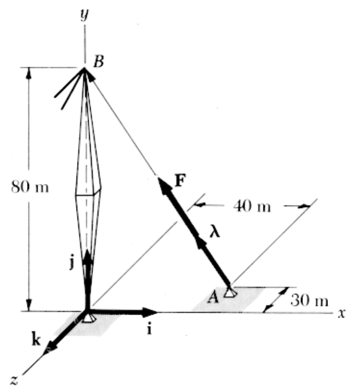


(Beer, 1988: 44)

วิธีทำ

ก. แรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก

แนวแรงในสายยึดโยง ซึ่งกระทำต่อสลักเกลียว A จะมีทิศทางพุ่งจากจุด A ไปยังจุด B องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ซึ่งมีทิศทางเดียวกันกับแรงนี้ หาได้ดังนี้



(Beer, 1988: 44)

จากพิกัดของจุด B (0, 80, 0) และพิกัดของจุด A (40, 0, -30) ได้

$$d_x = x_2 - x_1 = 0 - 40 = -40 \text{ m}$$
$$d_y = y_2 - y_1 = 80 - 0 = 80 \text{ m}$$
$$d_z = z_2 - z_1 = 0 - (-30) = 30 \text{ m}$$

ความยาว AB

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

ได้

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

ให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ ได้

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

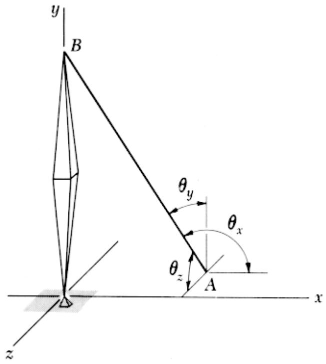
แทนค่า $\overrightarrow{AB}$ จะได้

$$\mathbf{F} = \frac{2500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\left[-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}\right]$$
$$\mathbf{F} = -(1060 \text{ N})\mathbf{i} + (2120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

ดังนั้นแรงองค์ประกอบของ **F** คือ

$F_x = -1060$ N $\quad F_y = +2120$ N $\quad F_z = +795$ N **ตอบ**

ข. ทิศทางของแรง F ได้จากสมการ (2.20) ดังนี้



(Beer, 1988: 44)

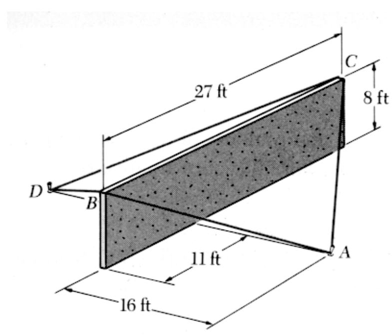
$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060\text{ N}}{2500\text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2120\text{ N}}{2500\text{ N}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795\text{ N}}{2500\text{ N}}$$

ได้

$$\theta_x = 115.1^\circ \qquad \theta_y = 32.0^\circ \qquad \theta_z = 71.5^\circ$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 2.14

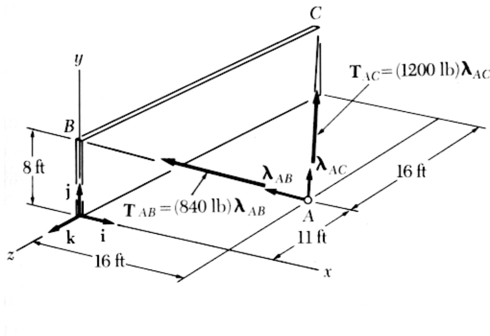
ผนังคอนกรีตหล่อสำเร็จรูป(precast-concrete wall) ถูกยึดไว้ชั่วคราวด้วยเคเบิลดังรูป รู้แรงดึงในเคเบิล AB เท่ากับ 840 lb และในเคเบิล AC เท่ากับ 1200 lb ให้หาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ซึ่งเกิดจากแรงดึงในเคเบิลทั้งสองที่กระทำต่อหมุดยึด (stake) A



(Beer, 1988: 45)

วิธีทำ

แยกแรงในเคเบิลทั้งสองเป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก โดยหาเวกเตอร์องค์ประกอบของ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ซึ่งมีทิศทางพุ่งจาก A ไปยังผนัง



(Beer, 1988: 45)

ได้

$$\overrightarrow{AB} = -(16\text{ ft})\mathbf{i} + (8\text{ ft})\mathbf{j} + (11\text{ ft})\mathbf{k} \qquad AB = 21\text{ ft}$$

$$\overrightarrow{AC} = -(16\text{ ft})\mathbf{i} + (8\text{ ft})\mathbf{j} - (16\text{ ft})\mathbf{k} \qquad AC = 24\text{ ft}$$

ให้ $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว AB ได้

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{850\text{ lb}}{21\text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

แทนค่า $\overrightarrow{AB}$ ลงไป ได้

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{850\text{ lb}}{21\text{ ft}}\left[-(16\text{ ft})\mathbf{i} + (8\text{ ft})\mathbf{j} + (11\text{ ft})\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{T}_{AB} = -(640\text{ lb})\mathbf{i} + (320\text{ lb})\mathbf{j} + (440\text{ lb})\mathbf{k}$$

ให้ $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว AC ได้

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1200\text{ lb}}{24\text{ ft}}\overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = -(800\text{ lb})\mathbf{i} + (400\text{ lb})\mathbf{j} - (800\text{ lb})\mathbf{k}$$

แรงลัพธ์ของแรงจากเคเบิลทั้งสองที่กระทำต่อหมุดยึด A

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1440\text{ lb})\mathbf{i} + (720\text{ lb})\mathbf{j} - (360\text{ lb})\mathbf{k}$$

ขนาดของแรงลัพธ์

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1650\text{ lb}$$ **ตอบ**

ทิศทางของแรงลัพธ์ หาได้จากสมการ (2.28)

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1440\text{ lb}}{1650\text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720\text{ lb}}{1650\text{ lb}} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360\text{ lb}}{1650\text{ lb}}$$

ได้

$$\theta_x = 150.8^\circ \qquad \theta_y = 64.1^\circ \qquad \theta_z = 102.6^\circ$$ **ตอบ**

2.14 สมดุลของอนุภาคในปริภูมิ

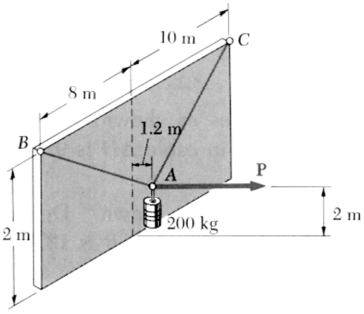
จากนิยามที่ว่า **อนุภาค A จะอยู่ในสภาวะสมดุล ถ้าแรงลัพธ์ของแรงทั้งหมดซึ่งกระทำต่ออนุภาค A มีค่าเท่ากับศูนย์** หรืออาจกล่าวได้ว่า **อนุภาค A จะอยู่ในสภาวะสมดุล ถ้าแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก** R_x, R_y, R_z **ของแรงลัพธ์ต่างมีค่าเท่ากับศูนย์** เขียนได้เป็น

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \qquad (2.29)$$

สมการ (2.29) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับสภาวะสมดุลของอนุภาคใด ๆ ในปริภูมิ และสามารถใช้แก้ปัญหาซึ่งเกี่ยวกับสมดุลของอนุภาคในปริภูมิ สำหรับปัญหาซึ่งมีตัวไม่รู้ค่า ไม่เกิน 3 ตัว เนื่องจากมีสมการเพียง 3 สมการ

ตัวอย่าง 2.15

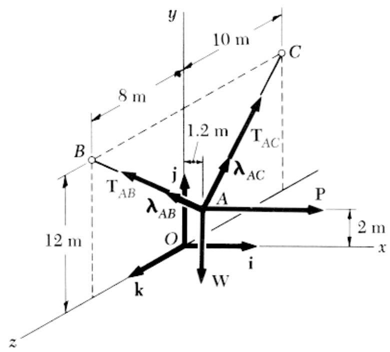
วัตถุรูปทรงกระบอกมีมวล 20 kg ถูกแขวนอยู่ด้วยเคเบิล AB และ AC ซึ่งปลายบนยึดติดกับส่วนบนสุดของผนังที่อยู่ในแนวดิ่ง แรงในแนวราบ **P** ตั้งฉากกับผนัง ทำให้วัตถุอยู่ในตำแหน่งดังรูป ให้หาขนาดของแรง **P** และแรงดึงในเคเบิลทั้งสอง



(Beer, 1988: 49)

วิธีทำ

เลือกจุด A เป็นวัตถุอิสระ ซึ่งถูกกระทำด้วยแรง 4 แรงซึ่งรู้ทิศทาง โดยมีแรง 3 แรงที่ไม่รู้ขนาด เขียนแรงในรูปเวกเตอร์



(Beer, 1988: 49)

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)\,\mathbf{j} = -(1962\ \text{N})\,\mathbf{j} \qquad (1)$$

สำหรับ $\mathbf{T}_{AB}$ และ $\mathbf{T}_{AC}$ จำเป็นต้องหาองค์ประกอบและขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$

ให้ $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว AB ได้

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2\ \text{m})\mathbf{i} + (10\ \text{m})\,\mathbf{j} + (8\ \text{m})\mathbf{k} \qquad AB = 12.86\ \text{m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.86\ \text{m}} = -0.0933\mathbf{i} + 0.778\mathbf{j} + 0.622\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = -0.0933T_{AB}\mathbf{i} + 0.778T_{AB}\mathbf{j} + 0.622T_{AB}\mathbf{k} \qquad (2)$$

ให้ λ_{AC} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว AC ได้

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2\ \text{m})\mathbf{i} + (10\ \text{m})\mathbf{j} - (10\ \text{m})\mathbf{k} \qquad AC = 14.19\ \text{m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.19\ \text{m}} = -0.0846\mathbf{i} + 0.705\mathbf{j} - 0.705\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = -0.0846T_{AC}\mathbf{i} + 0.705T_{AC}\mathbf{j} - 0.705T_{AC}\mathbf{k} \qquad (3)$$

จากเงื่อนไขสภาวะสมดุล แรงลัพธ์ของแรงทั้งหมดต้องเท่ากับศูนย์

$$\sum \mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

แทนค่าจาก (1), (2) และ (3) ลงไป แล้วแยกตัวประกอบ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ได้

$$\left(-0.0933\mathbf{T}_{AB} - 0.0846\mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P}\right)\mathbf{i}$$
$$+\left(0.778\mathbf{T}_{AB} + 0.705\mathbf{T}_{AC} - 1962\ \text{N}\right)\mathbf{j} + \left(0.622\mathbf{T}_{AB} - 0.705\mathbf{T}_{AC}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

สมการข้างต้นจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ต่างต้องเท่ากับศูนย์ นั่นคือผลรวมของแรงในแต่ละแกน (x, y, z) ต่างต้องเท่ากับศูนย์ นั่นเอง

$$\left(\sum F_x = 0:\right) \qquad -0.0933T_{AB} - 0.0846T_{AC} + P = 0$$
$$\left(\sum F_y = 0:\right) \qquad +0.778T_{AB} + 0.705T_{AC} - 1962\ \text{N} = 0$$
$$\left(\sum F_z = 0:\right) \qquad +0.622T_{AB} - 0.705T_{AC} = 0$$

แก้สมการทั้งสามจะได้

$P = 235$ N $\qquad T_{AB} = 1401$ N $\qquad T_{AC} = 1236$ N **ตอบ**