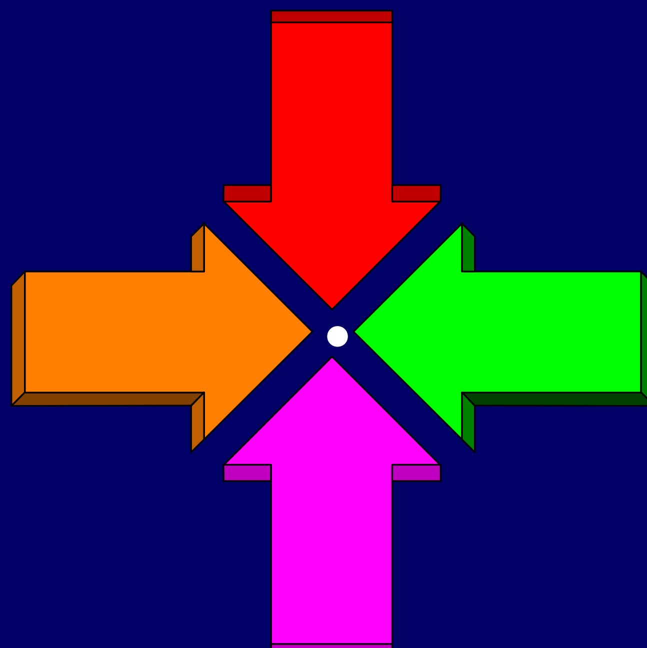
สถิตยศาสตร์ของอนุภาค



บทที่ 2 สถิตยศาสตร์ของอนุภาค

อนุภาค

หมายถึงวัตถุส่วนที่เล็กมากจนมีลักษณะเป็นเพียงจุด ๆหนึ่ง แรงที่เกิดขึ้นในอนุภาคจึงเป็นแรงกระทำร่วมกันที่จุด ๆหนึ่ง

เนื้อหา

2.1 ระบบของแรง
2.2 แรงลัพท์ของระบบแรง
2.3 แรงลัพท์ของแรงหรือเวคเตอร์
2.4 การรวมแรงหรือเวคเตอร์
2.5 การแตกแรงให้เป็นแรงย่อย
2.6 แรงย่อยคู่ฉาก
2.7 การรวมแรงโดยการแตกแรงให้อยู่ในแกน x และ y

2.8 สมดุลของอนุภาค

2.9 กฎข้อที่ 1 ของนิวตันเกี่ยวกับการเคลื่อนที่

2.10 ปัญหาเกี่ยวข้องกับสมดุลของอนุภาค

2.11 แรงย่อยซึ่งตั้งฉากกันของแรงในสามมิติ

2.12 แรงซึ่งแทนขนาดด้วยความยาวของเส้นตรง และทิศทางแทนด้วยค่าผลต่างของระยะทางระหว่างจุด 2 จุด บนแนวแรงนั้น

2.13 การรวมแรงซึ่งมีจุดที่แนวแรงทั้งหมดมาตัดกันหรือพบกันในสามมิติ

2.14 สมดุลของอนุภาคในสามมิติ

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาถึงผลที่เกิดกับอนุภาคใด ๆ เมื่อมีแรงกระทำในลักษณะต่าง ๆกัน

บทที่ 2 สถิตยศาสตร์ของอนุภาค

ระบบแรง

คำว่า “ระบบ” ต้องมีสิ่งเกี่ยวข้องตั้งแต่สองส่วนมาสัมพันธ์กัน ดังนั้น ระบบแรง จึงต้องมีแรงตั้งแต่ 2 แรงขึ้นไป มาสัมพันธ์กัน หรือมากระทำต่อวัตถุร่วมกัน

แรงที่มากระทำต่อวัตถุ มี 2 ลักษณะใหญ่ ๆ ดังนี้

1. Coplanar Force System

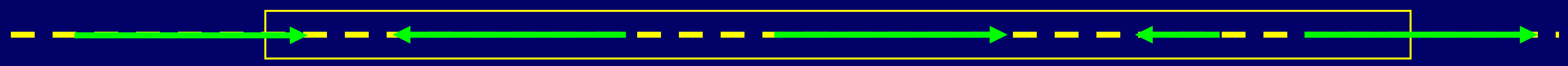
ทุกแรงอยู่ในระนาบเดียวกัน (พื้นผิว 2 มิติ)

2. Non Coplanar

แรงไม่อยู่ในระนาบเดียวกันทั้งหมด (รูปทรง3 มิติ)

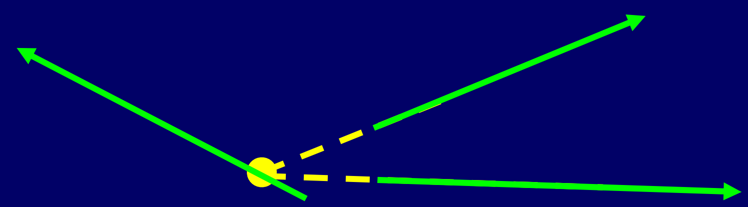
แยกเป็นระบบย่อย ๆได้ 7 ระบบ ดังนี้

1 Collinear อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันทั้งหมด



2. Concurrent Coplanar

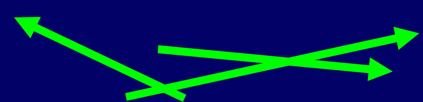
ทุกแรงอยู่ในระนาบเดียวกัน มีแนวตัดกันที่จุด ๆเดียว



3. Parallel Coplanar ทุกแรงขนานกันอยู่ในระนาบเดียวกันทั้งหมด

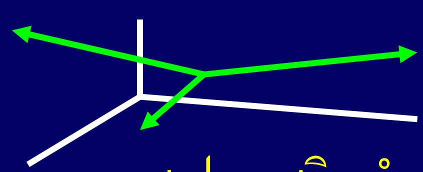
4. Non Concurrent Nonparallel Coplanar

อยู่ในระนาบเดียวกัน ไม่ขนานกัน ไม่ตัดกันที่จุดเดียวกันทั้งหมด

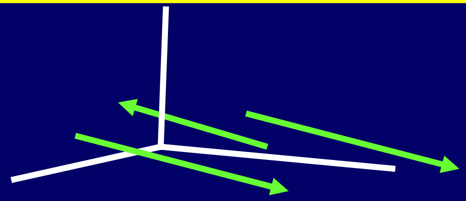


5. Concurrent Noncoplanar

อยู่ในสามมิติ แต่แนวแรงตัดกัน ที่จุดเดียวกันทั้งหมด



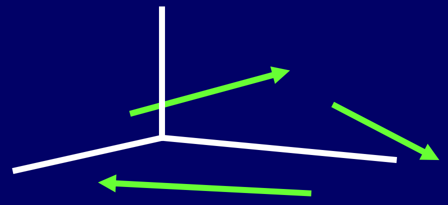
6. Parallel Noncoplanar ขนานกันในสามมิติ



7. Nonconcurrent Nonparallel Noncoplanar

อยู่ในสามมิติ ไม่ขนานกัน

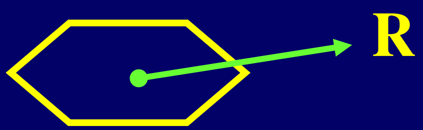
แนวแรงไม่ตัดกันที่จุดเดียวกันทั้งหมด



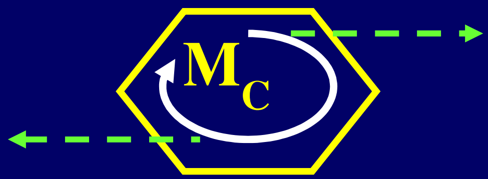
2.2 แรงลัพท์ของระบบแรง

คือ พฤติกรรมหรือผลลัพท์สุดท้ายที่ปรากฏ อาจจะ
เป็นระบบแรงอย่างง่ายหรือน้อยที่สุด
ที่สามารถแทนระบบแรงเดิมได้
โดยมีลักษณะผลลัพท์สุดท้ายที่แตกต่างกันดังนี้

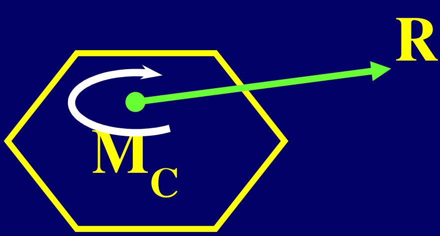
แรงลัพท์ที่เป็นแรงเดี่ยว 1 แรง (R)



แรงลัพท์ที่เป็นแรงคู่ควบ 1 คู่ (M_C)



แรงลัพท์ที่เป็นแรงเดี่ยว 1 แรง(R)
และ แรงคู่ควบอีก 1 คู่(M_C)



ผลลัพท์ของแรงที่กระทำต่อวัตถุ แบ่งป็น 2 ส่วน

1. ผลที่อยู่ภายนอก คือแรงกระทำและแรงปฏิกิริยา
2. ผลที่เกิดภายในวัตถุ คือแรงที่เกิดขึ้นในเนื้อวัตถุ

อนุภาค

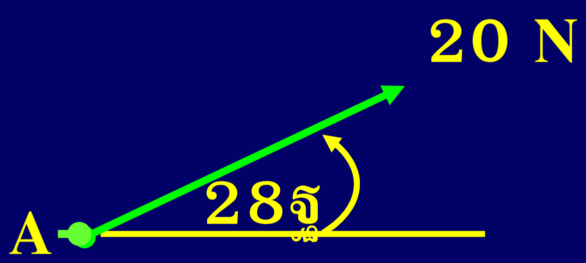
2 มิติ

ระบบแรงใน 2 มิติ (ระนาบเดียวกัน)

2.3 แรงลัพท์ของแรง 2 แรง ซึ่งกระทำต่ออนุภาค

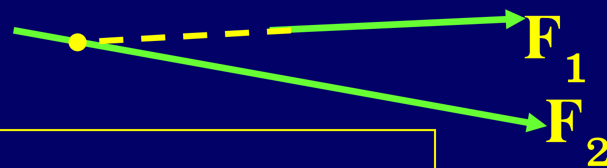
การที่จะบอกกล่าวถึงแรงกระทำใด ๆ ต้องพูดถึงคุณลักษณะ 3 ประการของแรงนั้น คือ

1. จุดที่แรงกระทำ
2. ขนาดของแรง
3. ทิศทางของแรง

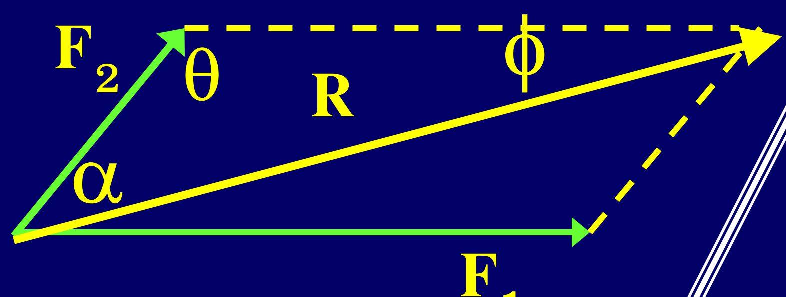


2.4 การรวมแรงหรือรวมเวคเตอร์

กรณีแรง 2 แรง มีแนวของแรงตัดกันที่จุด ๆหนึ่ง

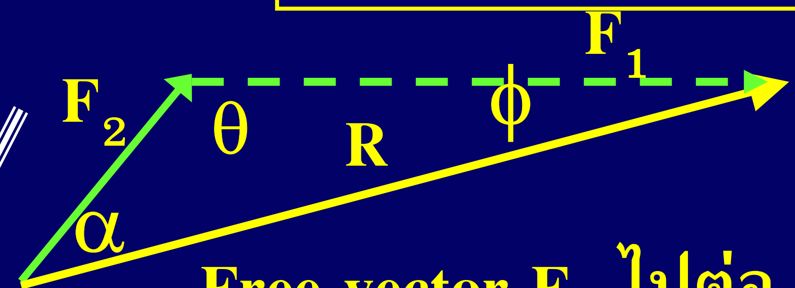


ใช้สี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง



R จะเป็นแรงลัพท์ของ F_1 และ F_2

ใช้สามเหลี่ยมแทนแรง



Free vector F_1 ไปต่อ F_2

ใช้ Cosine Law

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2(\cos\theta)$$

ใช้ Sine Law

$$F_1/\sin\alpha = F_2/\sin\phi = R/\sin\theta$$

***** ค่าของแรง ก็คือ ความยาวด้านของรูปเหลี่ยมแทนแรงนั้น *****

2.5 การแตกแรงให้เป็นแรงย่อย

กรณี แรงย่อยไม่ตั้งฉากกัน

แรงเดี่ยว 1 แรง สามารถแตกแยกออกเป็นแรงย่อย 2 แรง ได้ 2 กรณี ดังนี้

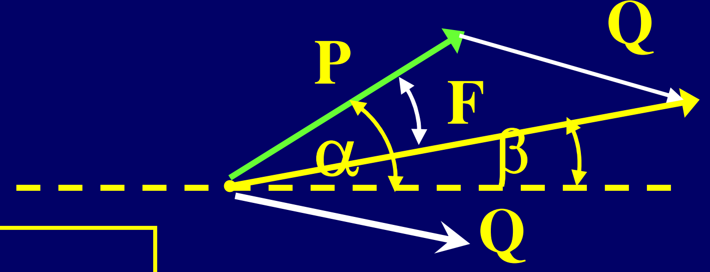
1. มีแรง F ต้องการแตกเป็นแรง P และ Q

ทราบค่าและทิศทางแรงย่อย 1 แรง(P)

ต้องการหาแรงที่เหลือ(Q)

เขียนสามเหลี่ยมแทนแรง

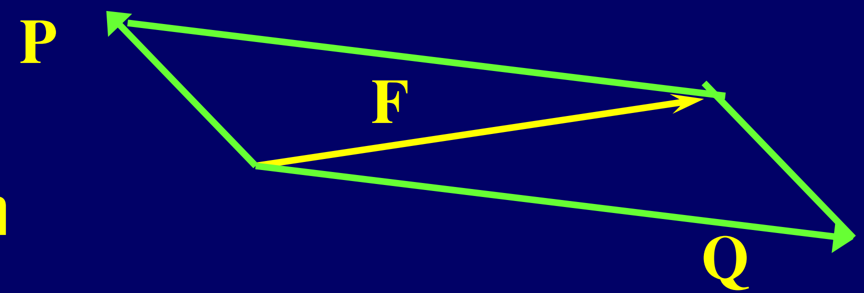
หาค่ามุมภายในสามเหลี่ยมของแรง



ใช้ Sine Law หรือ Cosine Law หาค่า Q

2. ทราบแรงย่อยต้องการหาค่าแรง F

จากแรง P และ Q



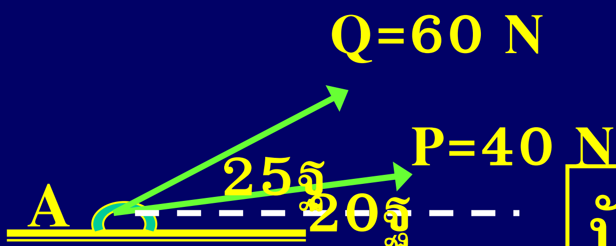
เขียนสี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง

เส้นทะแยงมุมคือค่าแรง F

ใช้ Sine Law หรือ Cosine Law คำนวณหาค่าแรง F

ตัวอย่าง 2.1

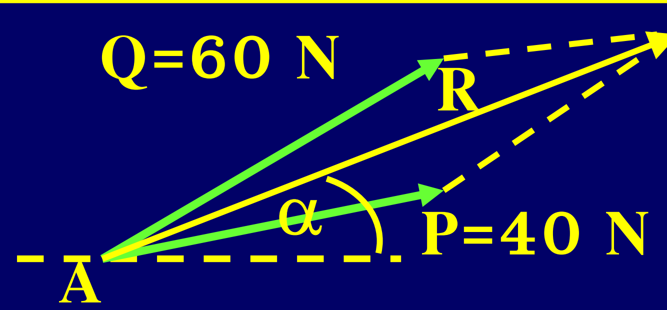
ข้อมูล แรง 2 แรง P และ Q
กระทำที่สลัก A



ปัญหา ต้องการทราบแรงลัพท์ของแรงทั้ง 2

วิธีทำ

1. โดยวิธีกราฟฟิก



นำค่าแรงมาเขียนสี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง
ด้วยมาตราส่วนที่ถูกต้อง วัดค่า R และทิศทางคือมุม α

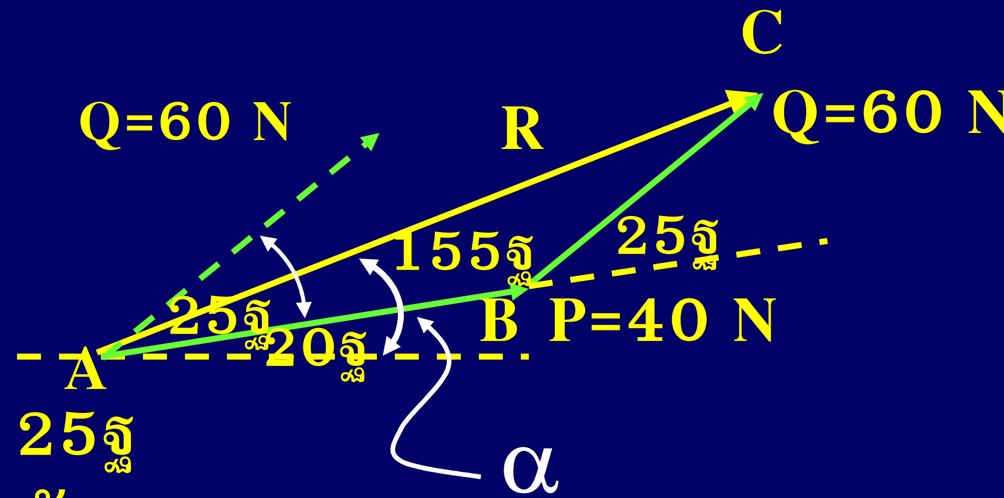
R = 98 N   α = 35ฐ

แรงลัพท์ 98 N ทำมุมกับแนวราบ 35ฐ

หรือเขียนเป็น R = 98 N 35ฐ

2. โดยวิธีคำนวณ

จากรูปที่เขียนขึ้น



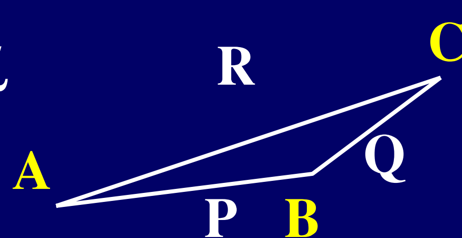
มุมระหว่าง P กับ Q เท่ากับ 25ฐ

เพราะฉะนั้น มุม ABC เท่ากับ 180-25 = 155ฐ

ใช้ Cosine Law หาค่า R

$R^2 = P^2+Q^2-2PQ(\cos 155ฐ)$; R = 97.7 N

ใช้ Sine Law หาค่ามุมเพื่อแสดงทิศทางของ R : α



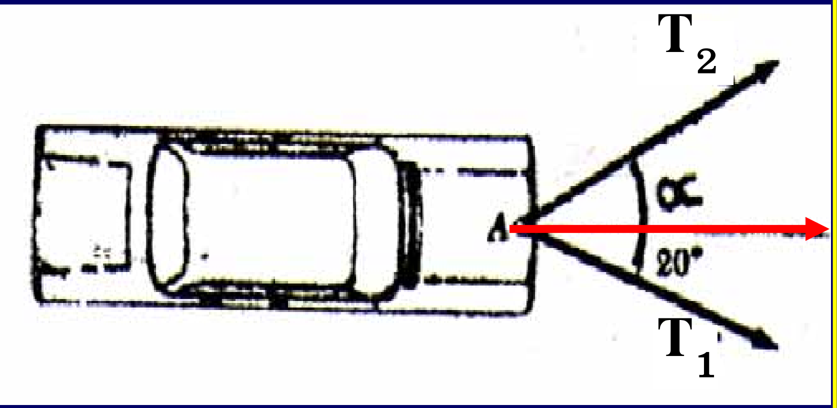
R/sinB = Q/sinA

sinA = QsinB/R ; $A = \sin^{-1}(Q\sin B/R)$

มุมBAC = 15ฐ ; α = 15ฐ +20ฐ = 35ฐ

$\boxed{R = 97.7 \text{ N} \quad 35ฐ}$

ตัวอย่าง 2.2



ข้อมูล

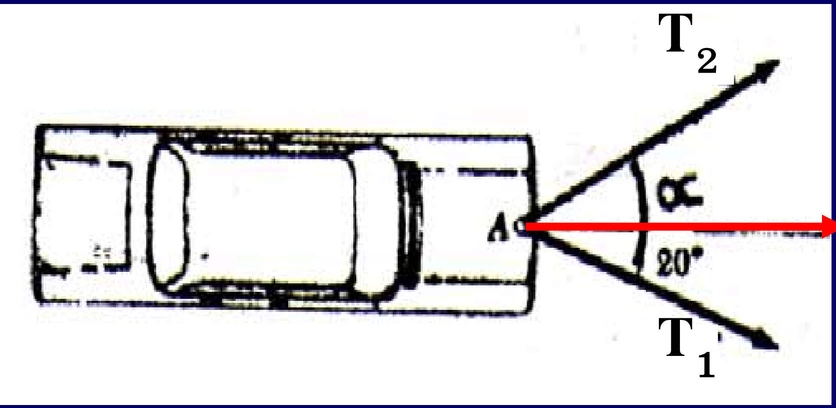
รถยนต์ ถูกฉุดด้วยเชือก 2 เส้น คือ T_1, T_2 แรงลัพท์จาก T_1 และ T_2 มีค่า 300 N และมีทิศทาง ขนานกับแกนตัวรถ

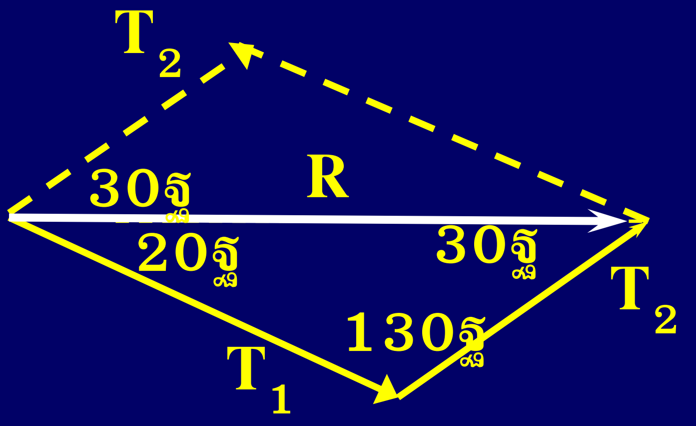
ปัญหา ให้หาค่าต่อไปนี้

ก. แรงดึงในเชือกแต่ละเส้น เมื่อ α = 30ฐ

ข. ค่าของมุม α ที่ทำให้แรงดึงใน T_2 น้อยที่สุด

ตัวอย่าง 2.2





R = 300 N   α = 30ฐ

วิธีทำ

ก. หา T_1, T_2 เมื่อ α = 30ฐ

ใช้ Sine Law

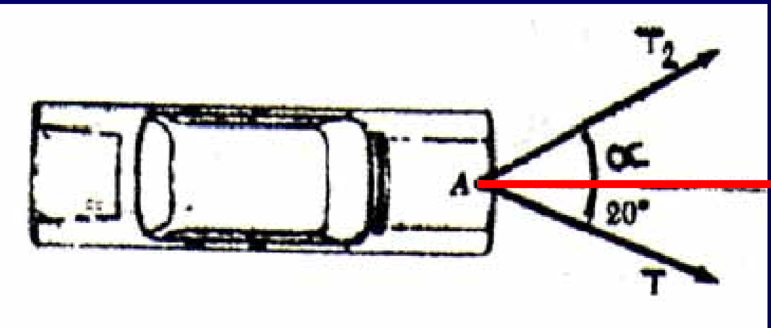
T_1/sin30ฐ = T_2/sin20ฐ = 300/sin130ฐ

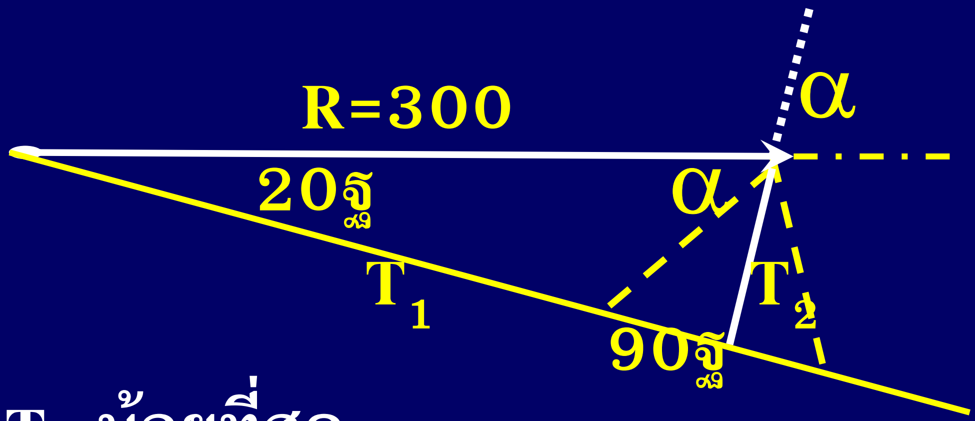
จะได้

T_1/sin30ฐ = 300/sin130ฐ ฎ T_1 = 195.8 N

T_2/sin20ฐ = 300/sin130ฐ ฎ T_2 = 133.9 N

ตัวอย่างที่ 2.2





ข. หาค่ามุม α ที่ทำให้ค่า T_2 น้อยที่สุด

เขียนแรงลัพท์ R ขนาด 300 ในแนวแกนรถ

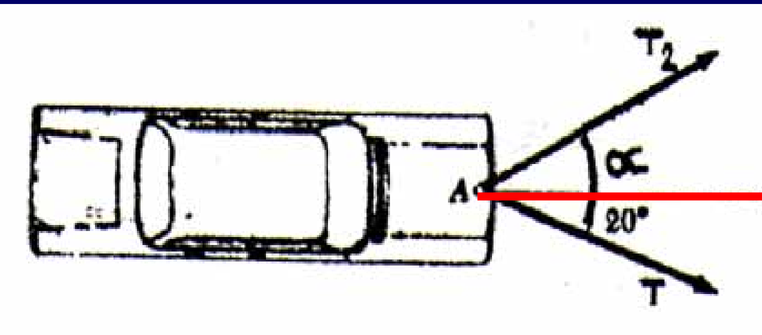
เขียนแนวแรง T_1 ทำมุมกับ R = 20ฐ

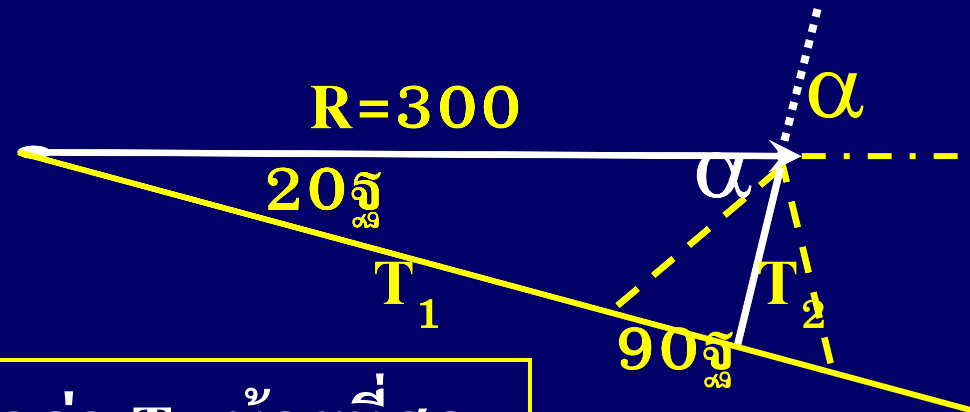
จากปลาย R ลากเส้นปิดมายังแนว T_1 จะเป็น T_2

เส้นตั้งฉากจะสั้นที่สุด คือ T_2 น้อยที่สุดนั่นเอง

มุม α จะเท่ากับ 90ฐ - 20ฐ = 70ฐ

ตัวอย่างที่ 2.2 ต่อ





ข. หาค่า T_2 น้อยที่สุด

มุม α = 70ฐ

ใช้ sine law หาค่า T_2

T_2/sin20ฐ = 300/sin90ฐ = T_1/sin70ฐ

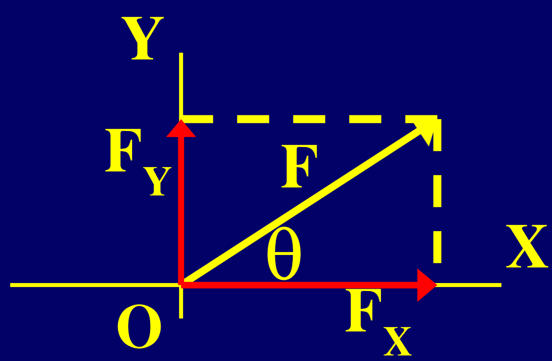
T_2/sin20ฐ = 300/sin90ฐ ฎ T_2 = 102.6 N,

T_2 น้อยที่สุด 102.6 N เมื่อ α = 70ฐ

2.6 แรงย่อยคู่ฉาก

แรงย่อยตั้งฉากกัน

เป็นการแตกแรง 1 แรง ให้เป็นแรงย่อย 2 แรง ซึ่งตั้งฉากกัน

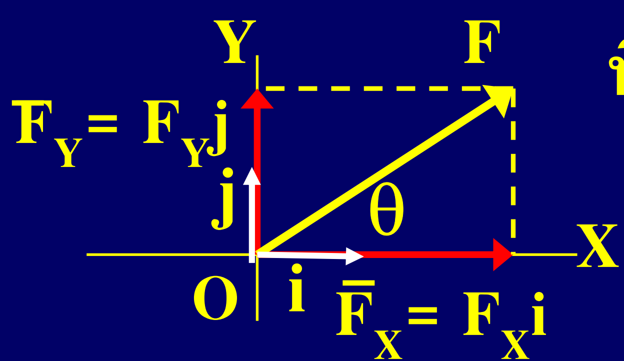


พิจารณาแบบ สกาลา (Scalar)

$$F_X = F\cos\theta$$

$$F_Y = F\sin\theta$$

$$\boxed{F^2 = F_X^{\,2} + F_Y^{\,2}}$$



พิจารณาแบบเวคเตอร์ (Vector)

เมื่อ i และ j เป็น Unit Vector

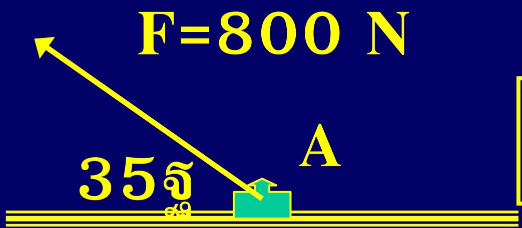
ในแกน X และ Y ตามลำดับ

จะได้ $\overline{F_X} = F_X i \;;\; \overline{F_Y} = F_Y j$ $\boxed{\text{และ } \overline{F} = F_X i + F_Y j}$

ตัวอย่าง 2.3

ข้อมูล แรง 800 N พุ่งออกจาก สลัก A

ปัญหา หาแรงย่อยคู่ฉากของแรง 800 N

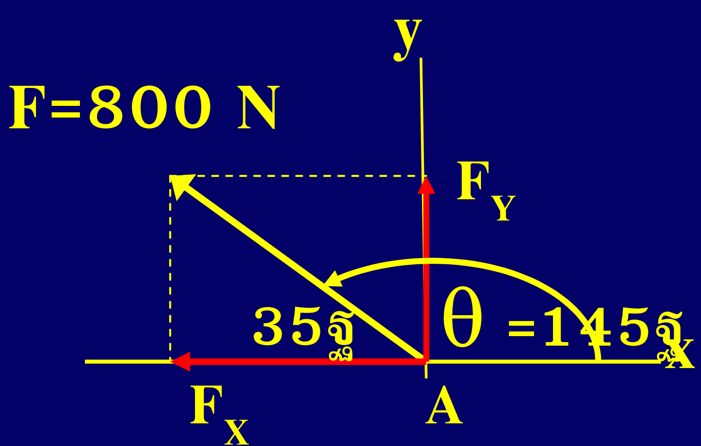


วิธีทำ

แบบสกาลา

F_X = F cos θ = 800cos145ฐ = −655 N

F_Y = F sin θ = 800sin145ฐ = +459 N



เขียนเป็นแบบเวคเตอร์

$$\overline{F} = F_X i + F_Y j$$

$$\overline{F} = (-655)i + (495)j$$

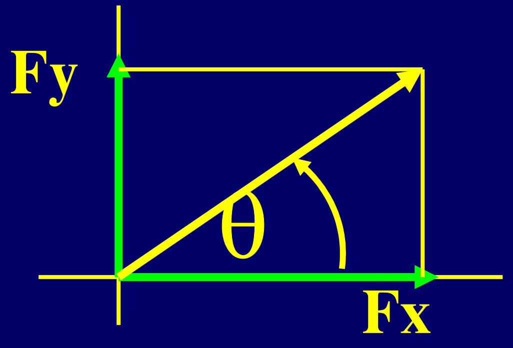
จะเห็นว่า เมื่อใช้ ค่ามุม θ วัดเทียบกับแกน X+ θ =145ฐ

เครื่องหมาย +, − จะบอกถึงทิศทางของแรงย่อยตามระบบเวคเตอร์

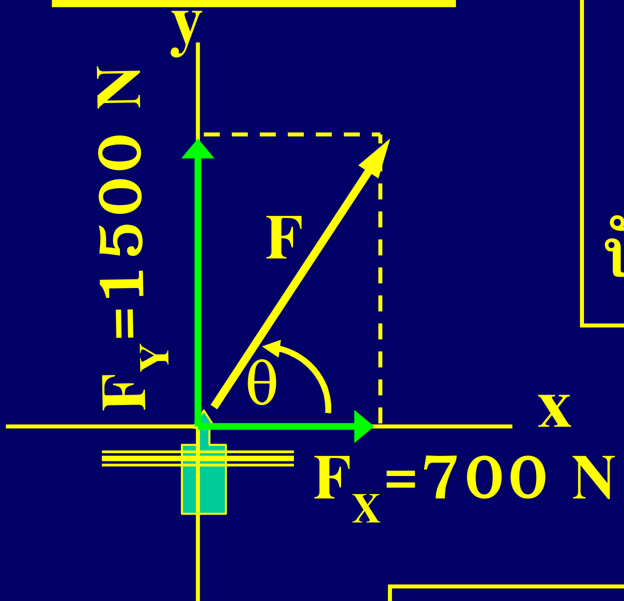
เมื่อเป็นการหาค่าแรงลัพท์ของแรง 2 แรงซึ่งตั้งฉากกัน
แนวหรือทิศทางของแรงลัพท์
บอกเป็นค่ามุมที่แรงทำกับแนวราบหรือแกน X
และหาค่ามุมนี้ได้โดยทฤษฎีตรีโกณ

$$\tan\theta = F_Y/F_X$$

$$\theta = \tan^{-1}(F_Y/F_X)$$



ตัวอย่าง 2.5



ข้อมูล มีแรงกระทำต่อหมุด A ดังนี้

$$\overline{F} = (700\ N)i + (1500\ N)j$$

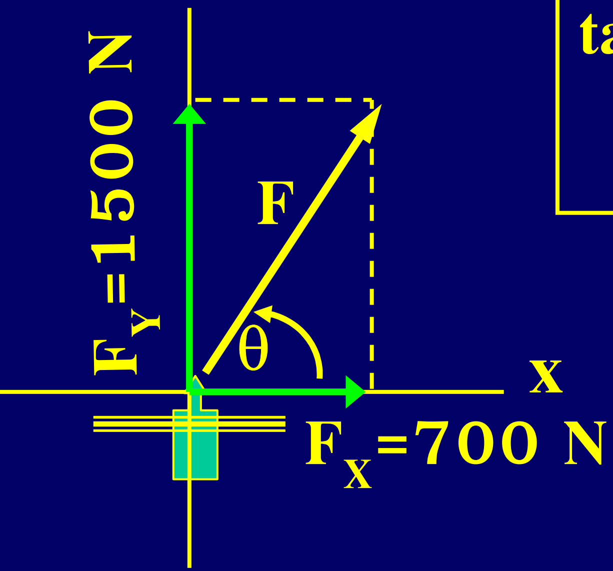
ปัญหา ให้หาขนาดและทิศทางของแรง F

วิธีทำ

- เขียนรูปแสดงแรงย่อยทั้งสอง ตามขนาดและทิศทางจากเครื่องหมายในข้อมูล

- เขียนสี่เหลี่ยมด้านขนานแทนแรง ความยาวเส้นทะแยงมุมคือแรง F บอกทิศทางด้วยมุม θ

ตัวอย่าง 2.5



$$\tan\theta = F_Y/F_X = 1500/700 = 2.14286\ ;$$

$$\theta = \tan^{-1}(2.14286) = 65ฐ$$

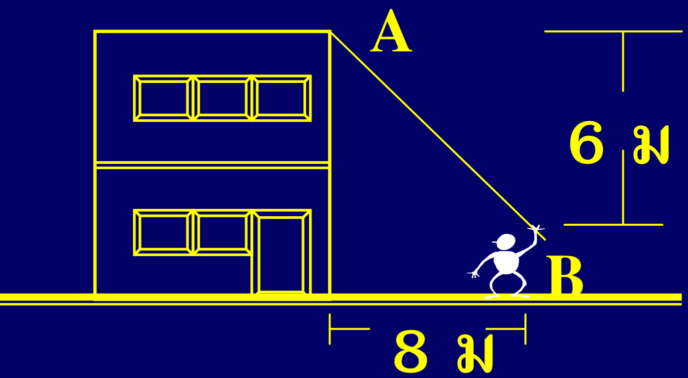
$$F_Y = F\sin 65\ ;$$

$$F = F_Y/\sin 65 = 1500/0.9063$$

$$F = 1655\ \text{N}$$

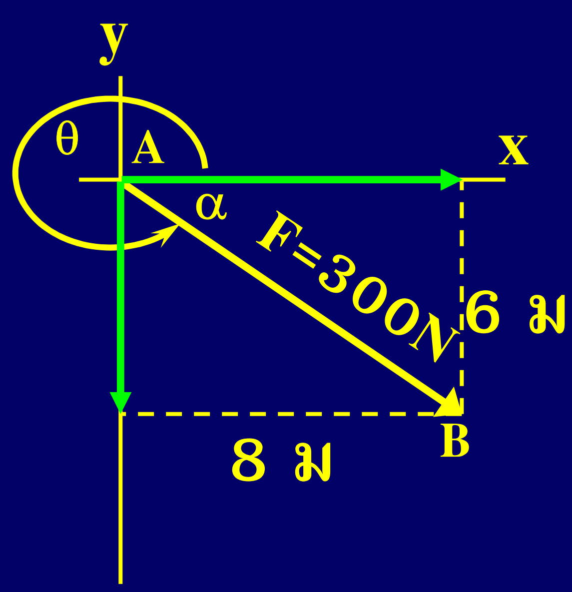
ค่าของแรงเป็นเสมือนความยาวด้าน

ตัวอย่าง 2.4



ข้อมูล ชายคนหนึ่ง ดึงเชือกจากหลังคาอาคารที่จุด A ด้วยแรง 300 N ดังรูป

ปัญหา ให้หาแรงย่อย ตามแนวราบ-แนวดิ่ง ในทิศทางที่พุ่งออกจาก A



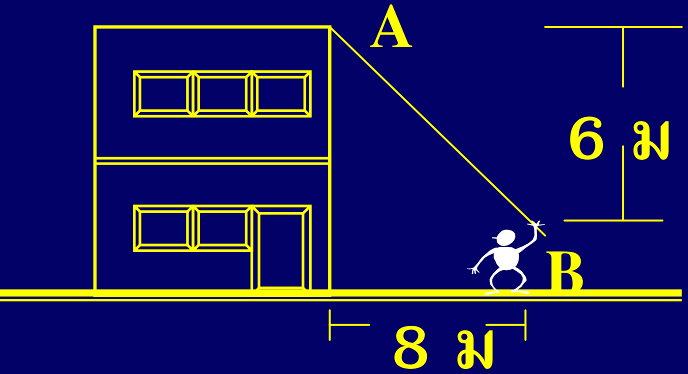
วิธีทำ

จากความสัมพันธ์ของ มุมฉาก หาความยาว AB ได้เท่ากับ 10 ม

จะได้ $\cos\alpha = 8/10 = 0.8$

$\sin\alpha = 6/10 = 0.6$

ตัวอย่าง 2.4



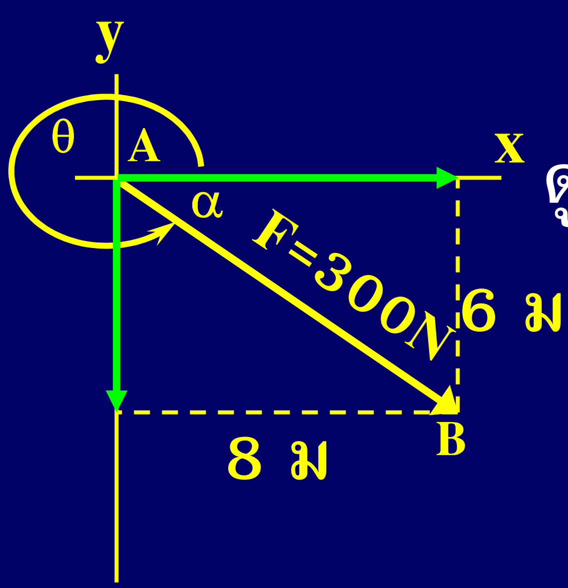
ปัญหา ให้หาแรงย่อย ตามแนวราบ-แนวดิ่ง ในทิศทางที่พุ่งออกจาก A

แรงย่อยในแนวราบ $F_X = F\cos\alpha$

แรงย่อยในแนวดิ่ง $F_Y = F\sin\alpha$

$F_X = 300(0.8) = 240$ N

$F_Y = 300(0.6) = 180$ N



ดูจากรูป F_X มีทิศทางเป็น+ F_Y มีทิศทางเป็น–

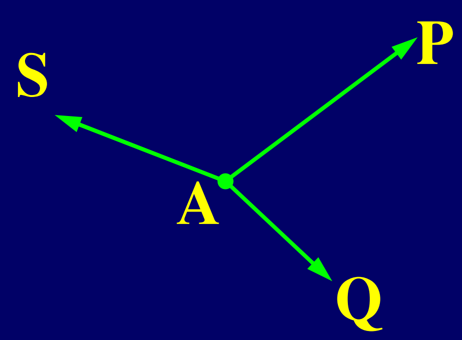
เขียนเป็นรูป Vector

$\overline{F} = (240N)i + (-180N)j$

$\overline{F} = (240N)i - (180N)j$

2.7 การรวมแรงหลายแรง โดยอาศัยการแตกแรงเข้าสู่แกน X–Y

กรณีมีแรงกระทำต่ออนุภาคหลายแรง



สามารถหาค่าแรงลัพท์ได้

ด้วยการตั้งแกน X–Y ผ่านจุดอนุภาคนั้น

หาค่ามุมที่แต่ละแรงกระทำต่อแกน X

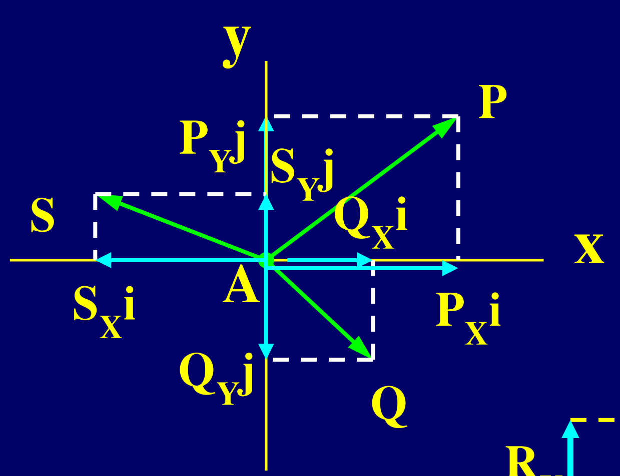
แตกแรงทั้งหมดเข้าสู่แกน X–Y

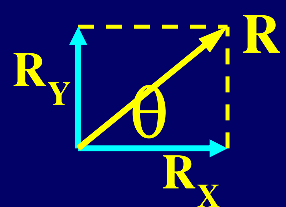
รวมแรงในแนวแกนแต่ละแกน

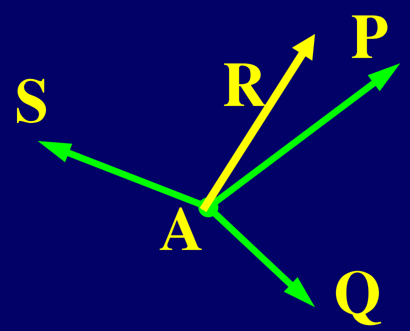
ให้เหลือแรงเดี่ยว 1 แรง

รวมแรง 2 แรง จากแกน X และแกน Y

จะได้แรงลัพท์ R





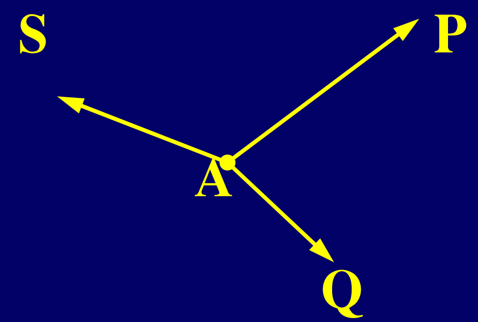


แรง 3 แรง P, Q, S กระทำต่ออนุภาค A

ให้ R เป็นแรงลัพท์ของแรงทั้ง 3

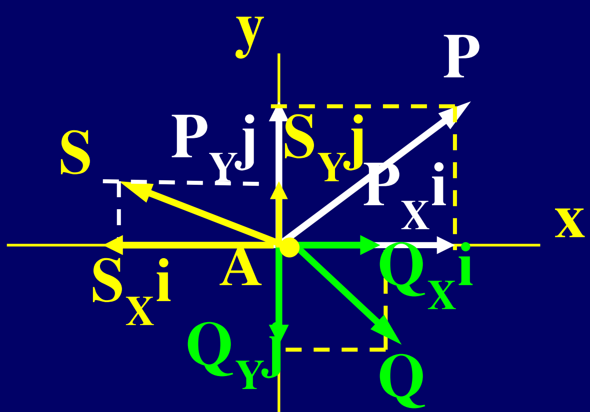
เขียนเป็นรูป Vector จะได้

$$\overline{R} = R_X i + R_Y j = \overline{P} + \overline{Q} + \overline{S}$$



แตกแรงให้เป็นแรงย่อยคู่ฉากในแกน x – y

$$R_X i + R_Y j = P_X i + P_Y j + Q_X i + Q_Y j + S_X i + S_Y j$$
$$= (P_X + Q_X + S_X) i + (P_Y + Q_Y + S_Y) j$$

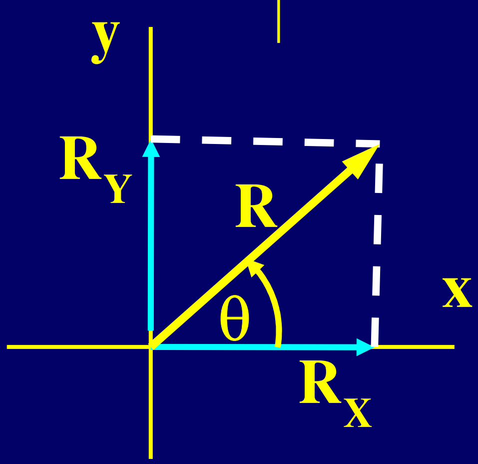


จะได้ $R_X = P_X + Q_X + S_X$ หรือ $= \sum F_X$

$R_Y = P_Y + Q_Y + S_Y$ หรือ $= \sum F_Y$

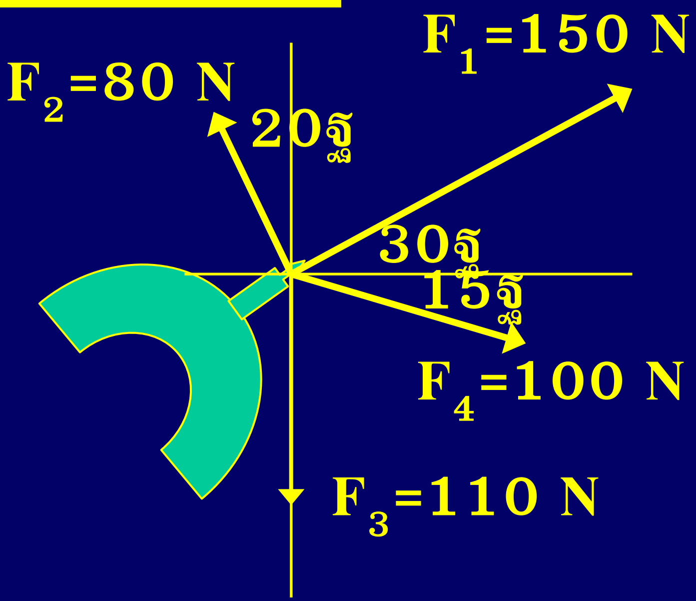
$$\overline{R} = R_X i + R_y j \; ; \qquad R^2 = R_X{}^2 + R_Y{}^2$$

$$R = \sqrt{R_X{}^2 + R_Y{}^2}$$



$$\tan\theta = R_Y/R_X \; ; \qquad \theta = \tan^{-1}(R_Y/R_X)$$

ตัวอย่าง 2.6

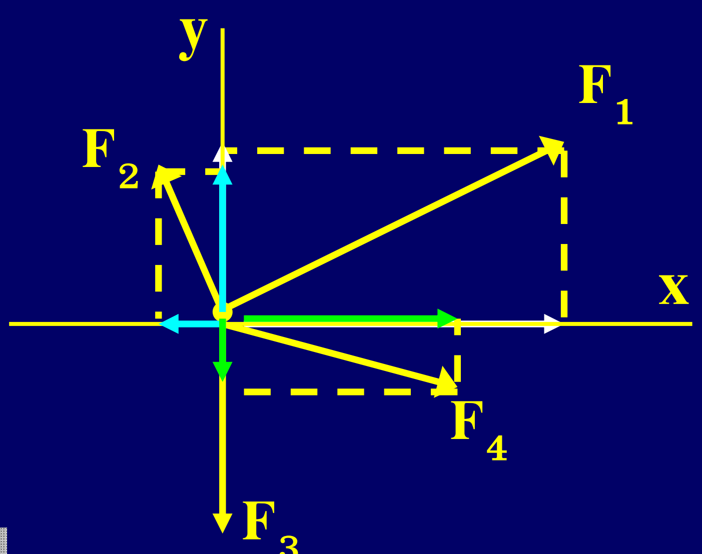


ข้อมูล แรง 4 แรง

กระทำต่อสลักเกลียว A

ปัญหา ให้หาแรงลัพท์ของแรงทั้ง 4

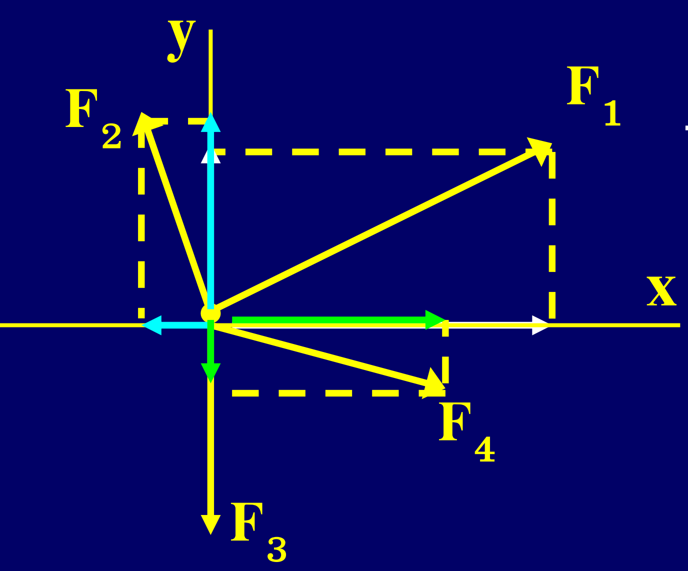
วิธีทำ



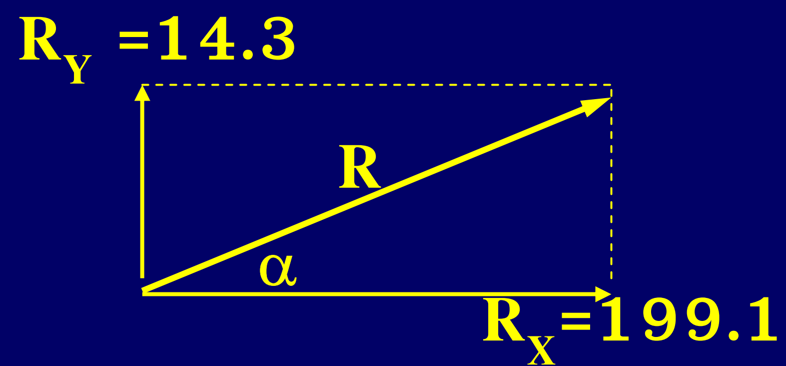
แตกแรงทั้ง 4 ให้เป็น

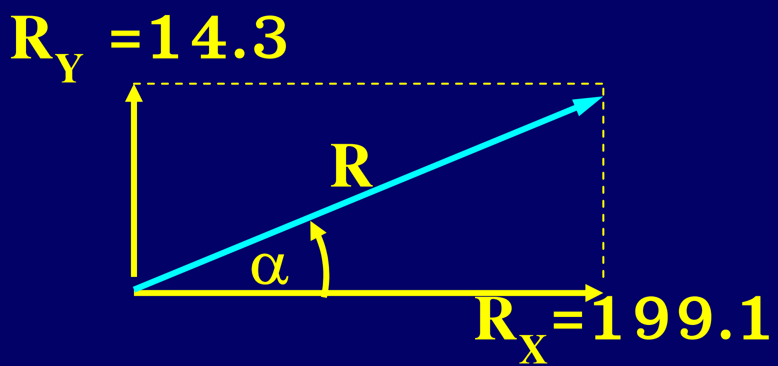
แรงย่อยในแกน X-Y

ทั้งหมด



แรง	ขนาด,N	แรงย่อย X	แรงย่อย Y
F_1	150	+129.9	+75.0
F_2	80	-27.4	+75.2
F_3	110	0.0	-110.0
F_4	100	+96.6	-25.9
	รวม	+199.1	+14.3





$$R = R_X i + R_y j$$

$$= (199.1N)i + (14.3N)j$$

$$\alpha = \tan^{-1}(14.3/199.1) = 4.1ฐ$$

$$R = \sqrt{(199.1)^2+(14.3)^2} = 199.6\ N$$

$$\boxed{R = 199.6\ N \quad 41ฐ}$$

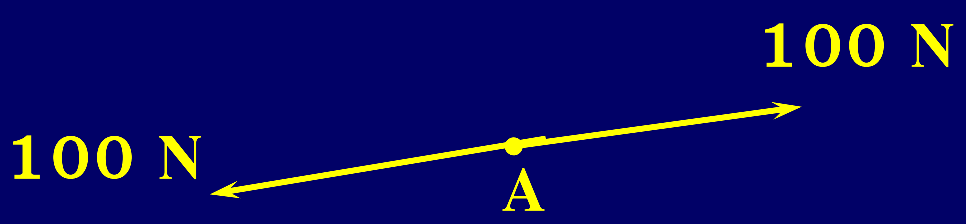
2.8 สมดุลของอนุภาค (Equilibrium of a Particle)

กฎข้อที่ 1 ของนิวตัน

“อนุภาคจะอยู่นิ่ง เมื่อแรงลัพท์เท่ากับศูนย์”

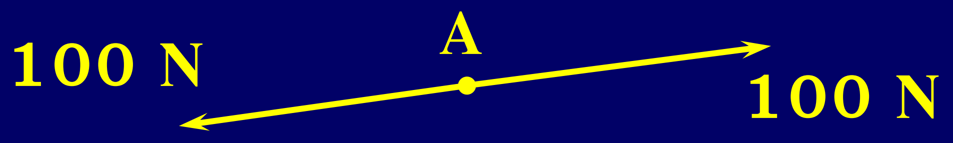
สภาวะนี้เรียกว่า

“สมดุล”



ปัจจัยต่าง ๆที่เกี่ยวข้องในสภาวะสมดุลของอนุภาค

1. เมื่ออนุภาคถูกกระทำด้วยแรง 2 แรง



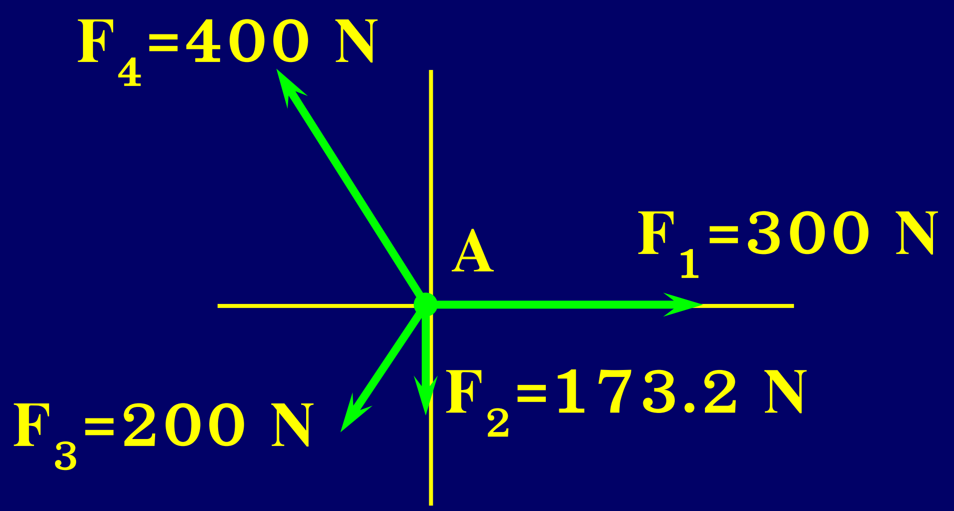
แรง 2 แรงนั้น

ต้องมีขนาดเท่ากัน

อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

มีทิศทางตรงกันข้าม

2. เมื่ออนุภาคถูกกระทำด้วยแรงมากกว่า 2 แรง



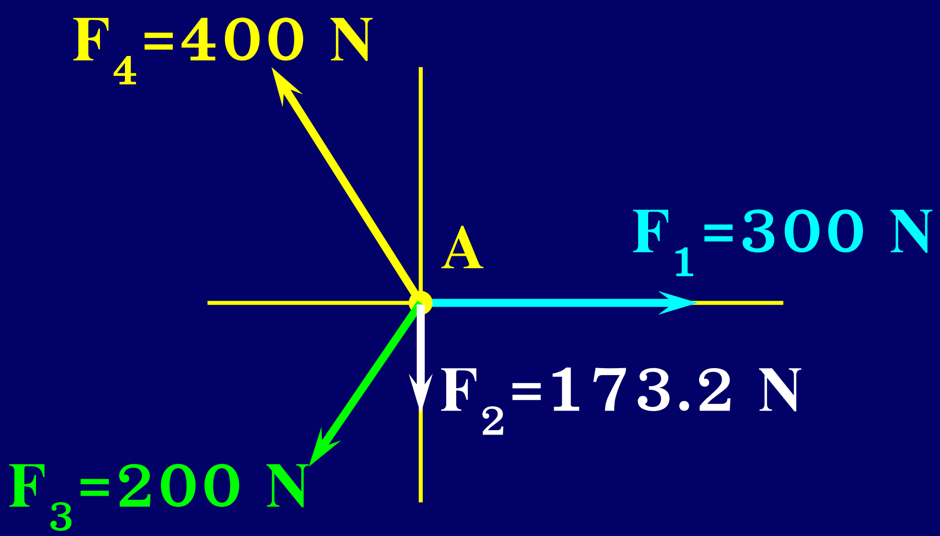
เมื่อแตกแรงทั้งหมดเป็นแรงย่อยคู่ฉาก จะได้

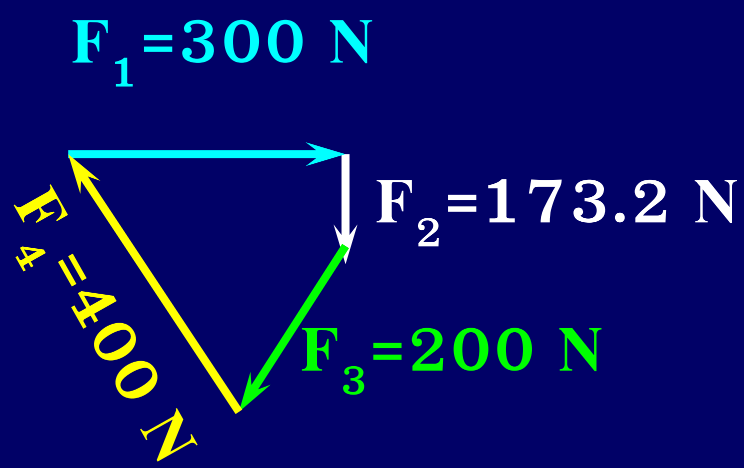
$$\sum \overline{F} = (\sum F_X)i + (\sum F_Y)j = 0$$

และ $\sum F_X = 0 \; ; \quad \sum F_Y = 0$

3. เมื่อเขียนรูปเหลี่ยมแทนแรง

ตามลักษณะหัวต่อท้าย(Tip to Tail)





จะได้รูปเหลี่ยมปิดพอดี

แสดงว่าแรงลัพท์ไม่มี หรือเท่ากับศูนย์

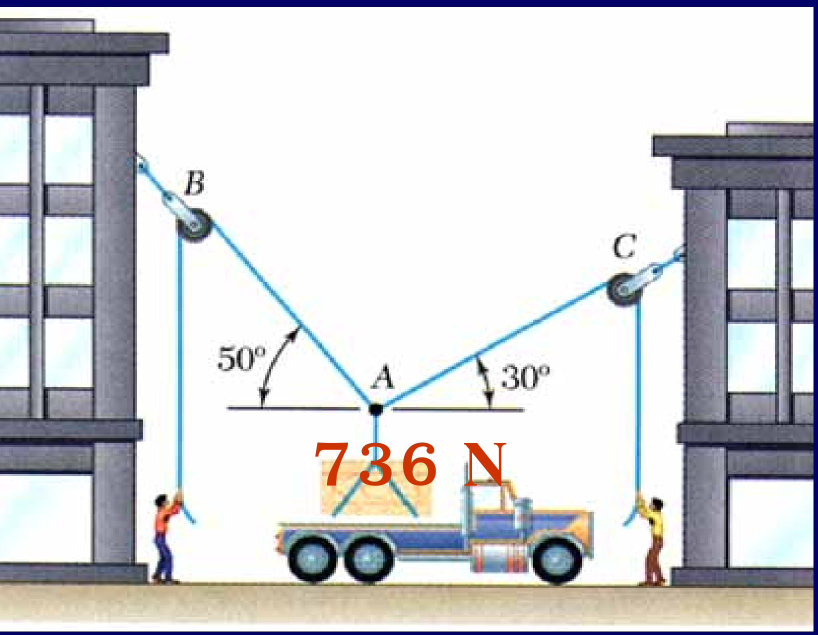
2.9 กฎของนิวตันเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ (Newton's First Law of Motion)

"ถ้าแรงลัพท์ที่กระทำต่ออนุภาคเท่ากับศูนย์
อนุภาคจะอยู่นิ่ง
หรือเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง ด้วยความเร็วคงที่"

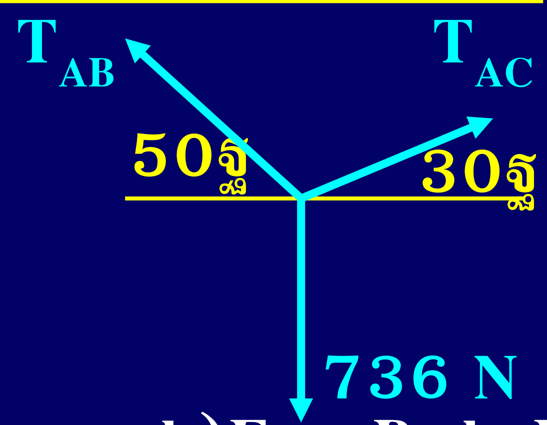
ดังนั้น สภาวะสมดุลเกิดขึ้นได้ทั้งขณะอยู่นิ่งหรือขณะเคลื่อนที่

2.10 ปัญหาซึ่งเกี่ยวข้องกับสมดุลของอนุภาค

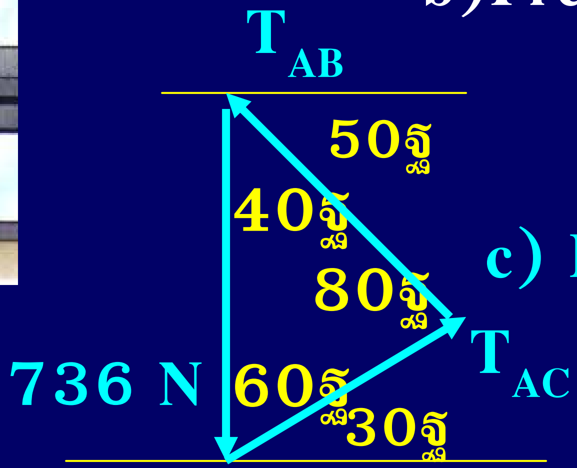
แผนภาพวัตถุอิสระ Free Body Diagram (FBD)



a) Space Diagram



b)Free Body Diagram



c) Force Diagram

เมื่อเขียนแผนภาพวัตถุอิสระจากรูปภาพแล้ว

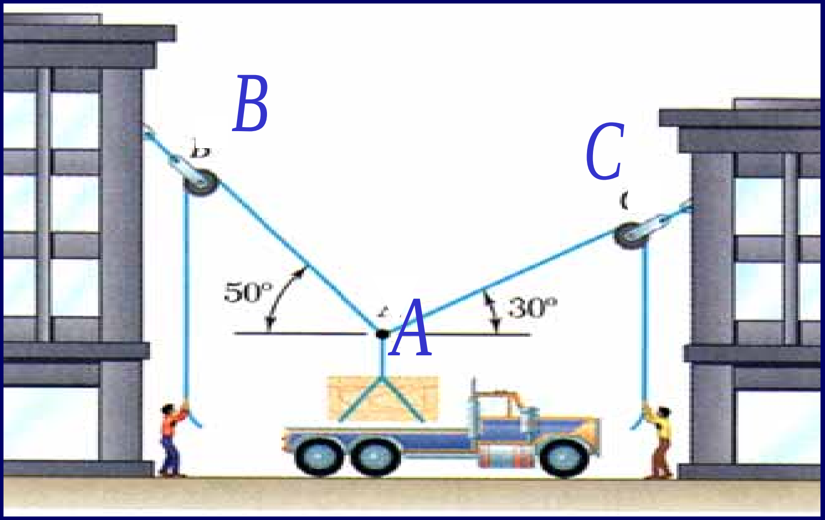
จะสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของระบบแรงได้ชัดเจน

และ สามารถคำนวณหาค่าต่าง ๆได้ง่ายขึ้น

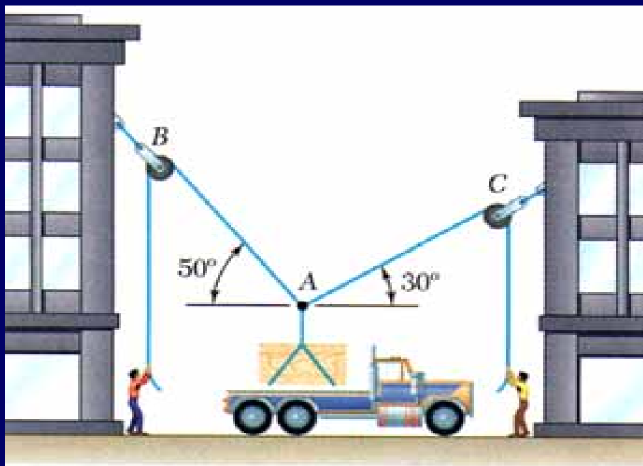
ตัวอย่าง 2.7

ข้อมูล หีบใบหนึ่งมีมวล 75 กก
ถูกดึงขึ้นห้อยไว้นิ่ง ๆด้วยเชือก AB และ AC

ปัญหา ให้หาแรงดึงในเส้นเชือกทั้งสอง



ตัวอย่าง 2.7



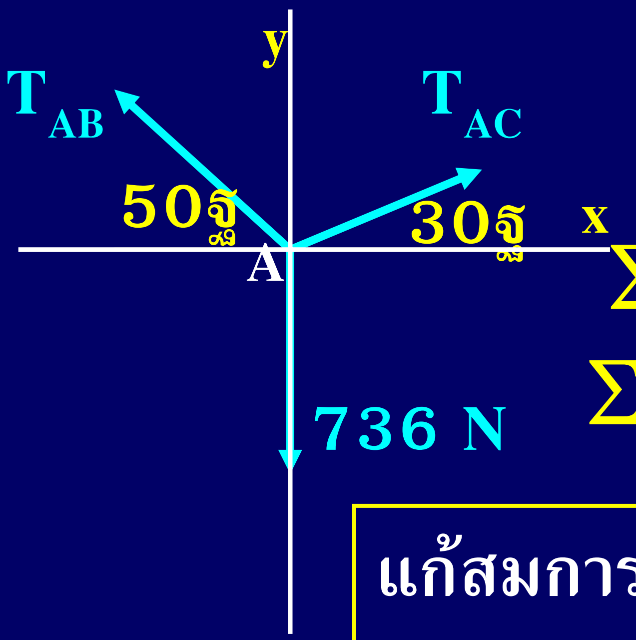
วิธีทำ

จากรูปภาพ เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ FBD

น้ำหนักหีบ W = mg = 75x9.81 = 736 N

แก้ปัญหาโจทย์

โดยวิธีแตกแรงและสมการสมดุล



$$\boxed{\sum F_X = T_{ABX} + T_{ACX} = 0}$$

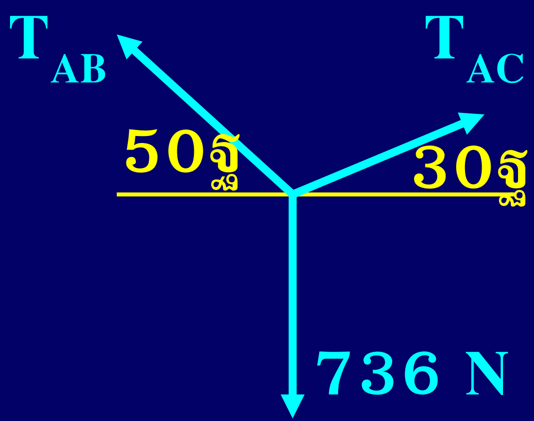
$$\sum F_X = (-T_{AB}\cos 50^\circ)+(T_{AC}\cos 30^\circ) = 0$$

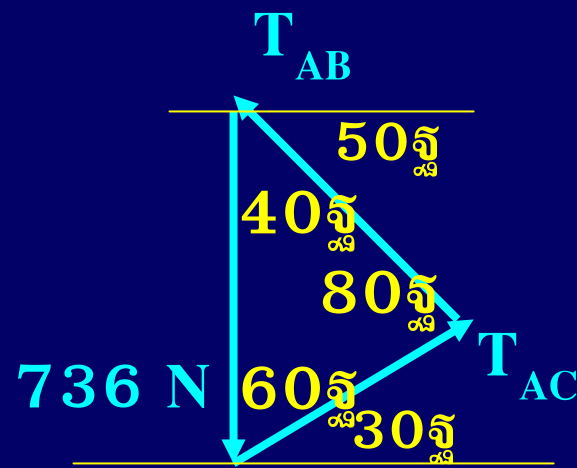
$$\sum F_y = (T_{AB}\sin 50^\circ)+(T_{AC}\sin 30^\circ)-W = 0$$

แก้สมการ ได้ T_{AB} = 647 N และ T_{AC} = 480 N

ตัวอย่าง 2.7

แก้ปัญหาโจทย์โดยสามเหลี่ยมแทนแรง เนื่องจากมีแรง 3 แรง



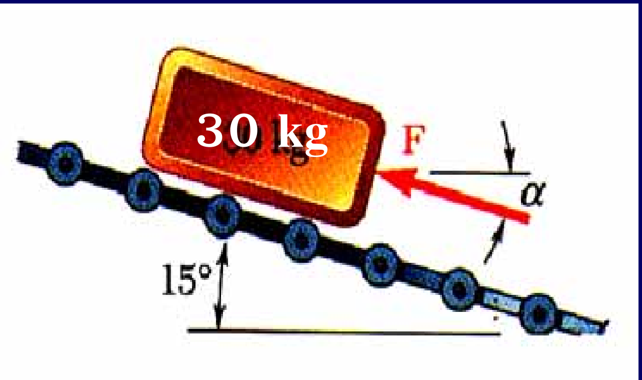


คำนวณหามุมภายในสามเหลี่ยมของแรง

ใช้ Sine law T_{AB} / sin60ฐ= T_{AC} / sin40ฐ= 738 / sin80ฐ

จับคู่แก้สมการ ได้ T_{AB} = 647 N และ T_{AC} = 480 N

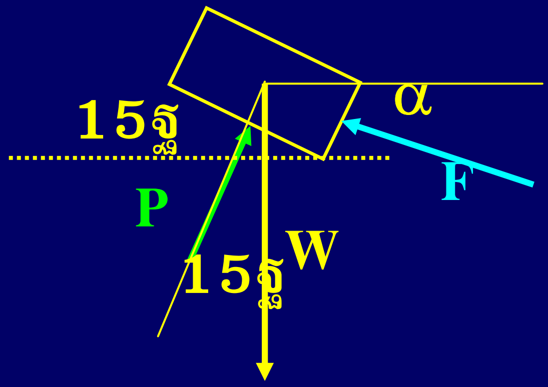
ตัวอย่าง 2.8



ข้อมูล แรง F กระทำต่อกล่องซึ่งมีมวล 30 kg กล่องวางบนพื้นเอียง ไม่มีความฝืด

ปัญหา ให้หาขนาดและทิศทางของแรง F ซึ่งน้อยที่สุด ที่ทำให้กล่องอยู่ในสภาวะสมดุล

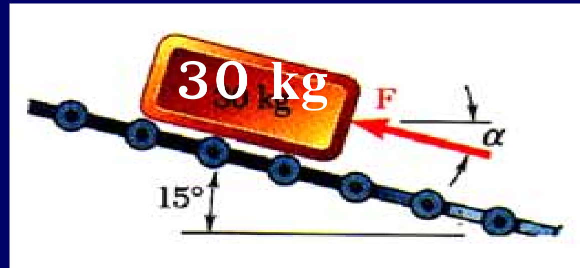
วิธีทำ

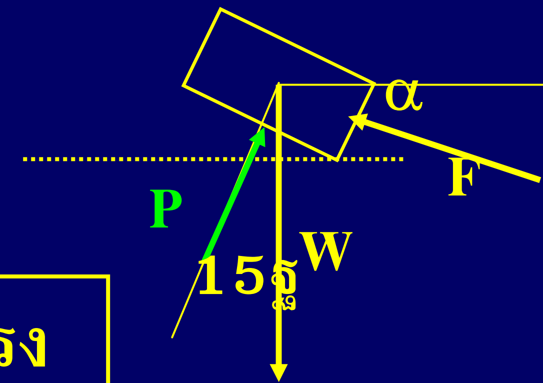


เขียน FBD

แรงปฏิกิริยา P ของพื้นทำต่อกล่องจะตั้งฉากกับพื้นเอียง เพราะพื้นไม่มีความฝืด

ตัวอย่าง 2.8





เขียนสามเหลี่ยมแทนแรง

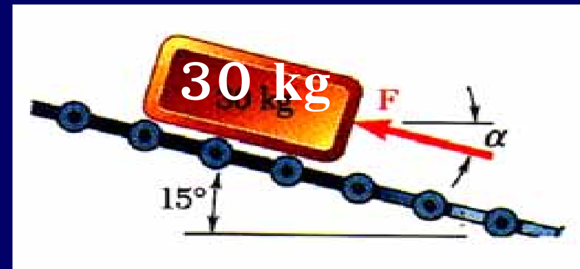
น้ำหนัก W รู้ค่า = 294 N

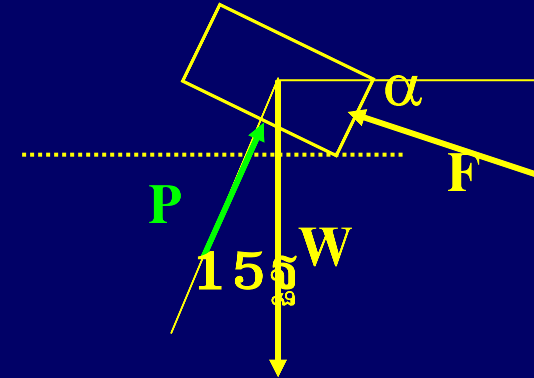
และแนว แรง P รู้แนวไม่รู้ค่า

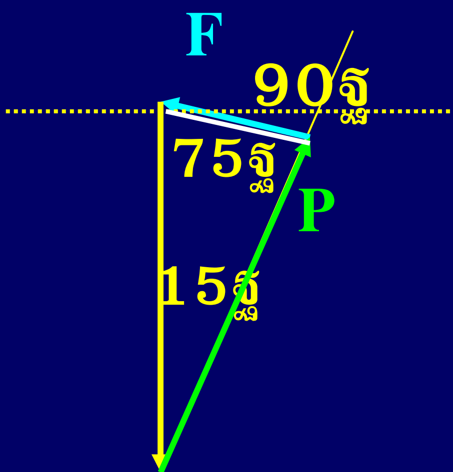
เส้นปิดที่ลากจาก W มา P คือ F

และจะสั้นที่สุดเมื่อตั้งฉากกับ P
ซึ่งจะทำให้ F น้อยที่สุด

ตัวอย่าง 2.8







= 294 N

จากสามเหลี่ยมของแรง ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

F/W = sin15ฐ

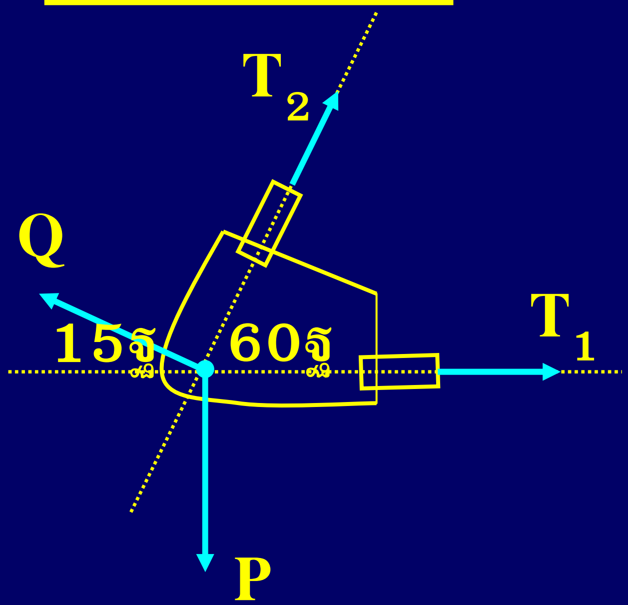
F = Wsin15ฐ = 294(0.259)

F = 76.1 N

จากรูปเมื่อ F ตั้งฉากกับแนว P มุม α = 15ฐ

แรง F น้อยที่สุดคือ 76.1 N 15ฐ

ตัวอย่าง 2.9

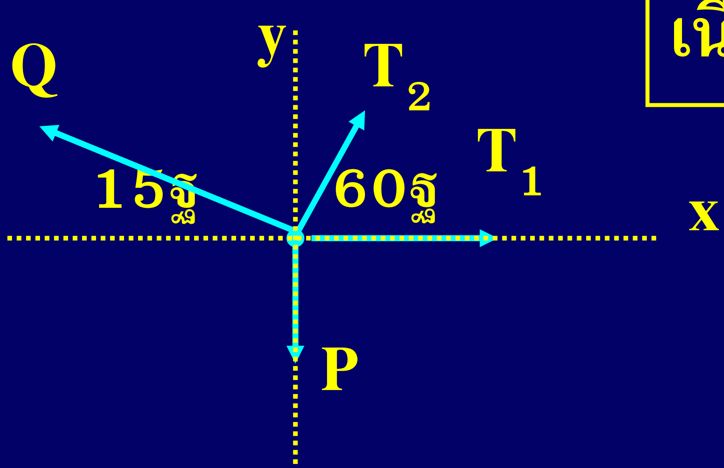


ข้อมูล แรง P=1000 N, แรง Q=1200 N
กระทำต่อจุดต่อเชื่อมชิ้นส่วนเครื่องบิน

ปัญหา ถ้าระบบแรงอยู่ในสภาวะสมดุล
จงหาแรงดึง T_1, T_2

วิธีทำ

เขียน FBD



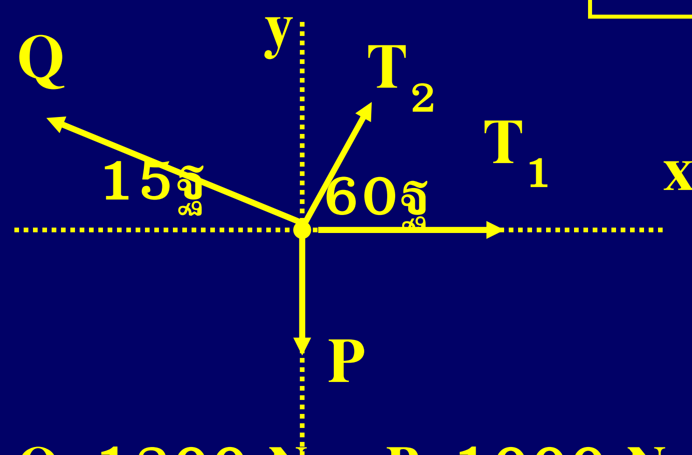
เนื่องจากระบบแรงมีแรงมากกว่า 3 แรง

จึงใช้วิธีตั้งแกน X-Y

แล้วแตกแรงเข้าสู่แกน

ตัวอย่าง 2.9

$$\text{จาก} \quad \overline{R} = \overline{P} + \overline{Q} + \overline{T_1} + \overline{T_2} = 0 \quad --- \quad (1)$$



Q=1200 N P=1000 N

$$\overline{P} = 0 - (1000)j$$

$$\overline{Q} = -(Q\cos 15^\circ)i + (Q\sin 15^\circ)j$$

$$\overline{Q} = -(1159)i + (311)j$$

$$\overline{T_1} = T_1 i + 0$$

$$\overline{T_2} = T_2(\cos 60^\circ)i + T_2(\sin 60^\circ)j$$

แทนค่าใน (1)

$$-(1000)j - (1159)i + (311)j + T_1 i + T_2(\cos 60^\circ)i + T_2(\sin 60^\circ)j = 0$$

ตัวอย่าง 2.9

$$-(1000)j - (1159)i + (311)j + T_1 i + T_2(\cos 60\text{ฐ})i + T_2(\sin 60\text{ฐ})j = 0$$

รวมกลุ่ม i กับกลุ่ม j

$$[-(1159) + T_1 + T_2(\cos 60\text{ฐ})]\ i + [-(1000) + (311) + T_2(\sin 60\text{ฐ})]\ j = 0$$

กลุ่ม i คือ $\sum F_X = 0$; $-(1159) + T_1 + T_2(\cos 60\text{ฐ}) = 0$ --- (2)

กลุ่ม j คือ $\sum F_Y = 0$; $-(1000) + (311) + T_2(\sin 60\text{ฐ}) = 0$ --(3)

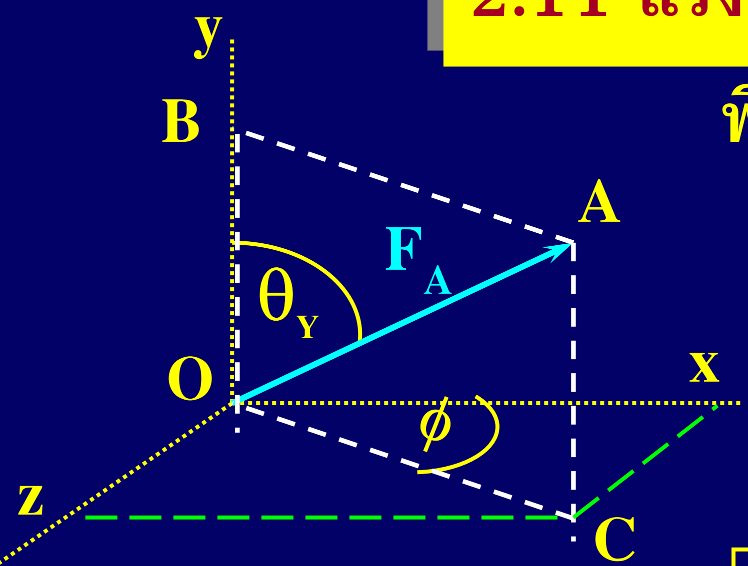
แก้สมการ (2) และ (3) ได้ $T_1 = 761$ N, $T_2 = 795$ N

อนุภาค

3 มิติ

ระบบแรงใน 3 มิติ

2.11 แรงย่อยซึ่งตั้งฉากกันใน 3 มิติ



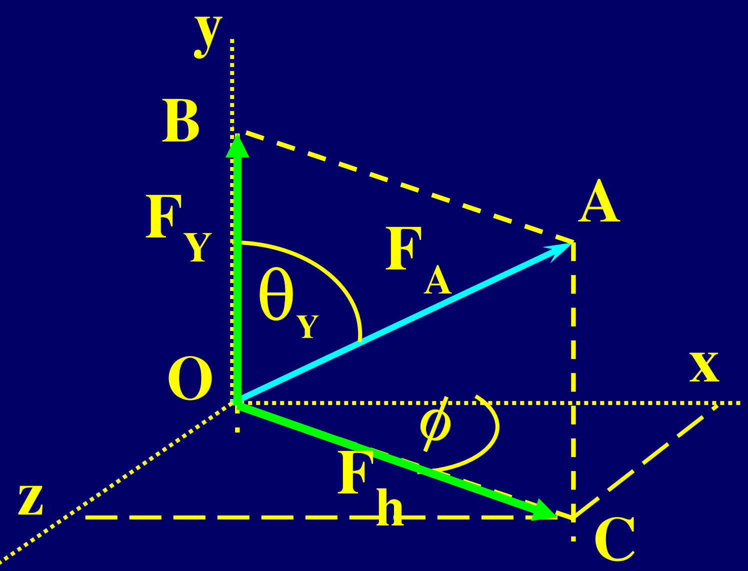
พิจารณาแรง F_A กระทำที่จุด O ในแนว OA ซึ่งอยู่ในพิกัดฉาก 3 มิติ x – y – z

แนวแรง F_A ทำมุมกับแกน y เท่ากับ θ_Y

เขียนระนาบดิ่ง OBAC

โดย C อยู่บนระนาบ x – z

แนว OC ทำมุมกับแกน x เท่ากับ ϕ



แตกแรง F_A

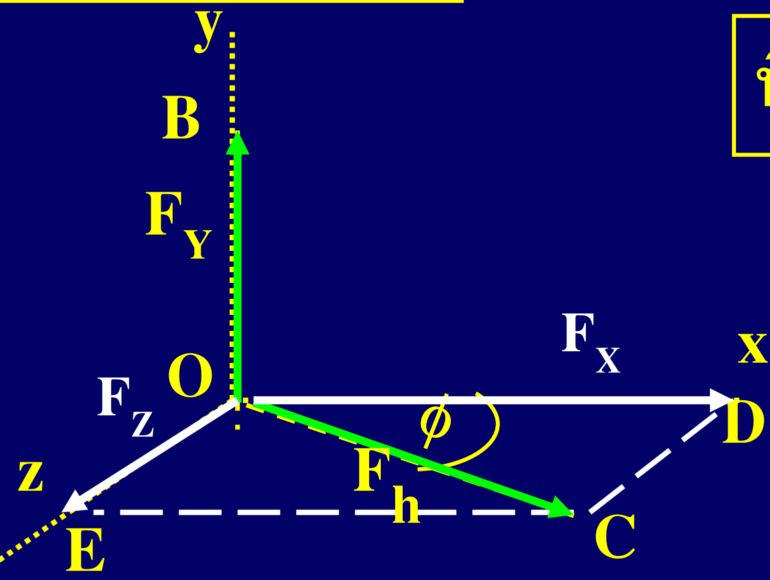
เข้าสู่แกน y เป็น F_Y

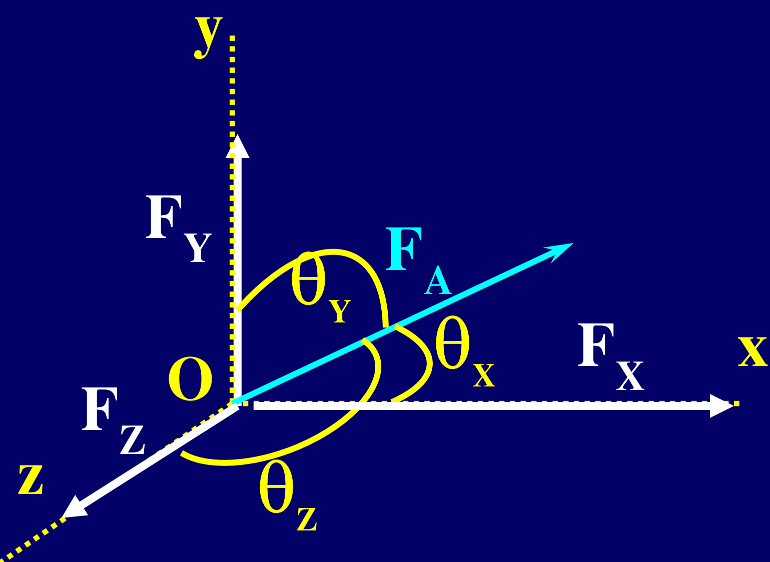
และระนาบ x – z เป็น F_h

โดยอาศัยมุม θ_Y ในระนาบดิ่ง OBAC

ซึ่งเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ได้แรงย่อยของ F_A คือ F_Y กับ F_h





พิจารณาสี่เหลี่ยมมุมฉาก OECD

ซึ่งอยู่ในระนาบ X–Z

แรง F_h ทำมุมกับแกน X เท่ากับ ϕ

แตกแรง F_h เข้าสู่แกน X แป็น F_X

และแกน Z เป็น F_Z

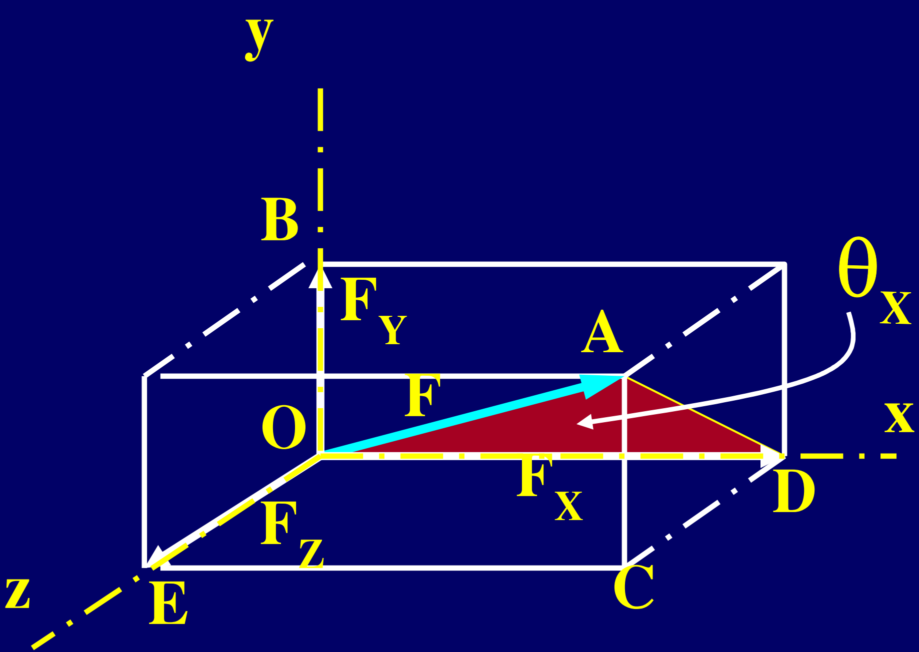
ส่วน F_Y ยังคงเหมือนเดิม

จะได้ว่า

แรงย่อยของ F_A ในแกนฉาก 3 มิติคือ

F_X , F_Y และ F_Z

สรุป



มุมที่แนวแรงกระทำต่อแกน X

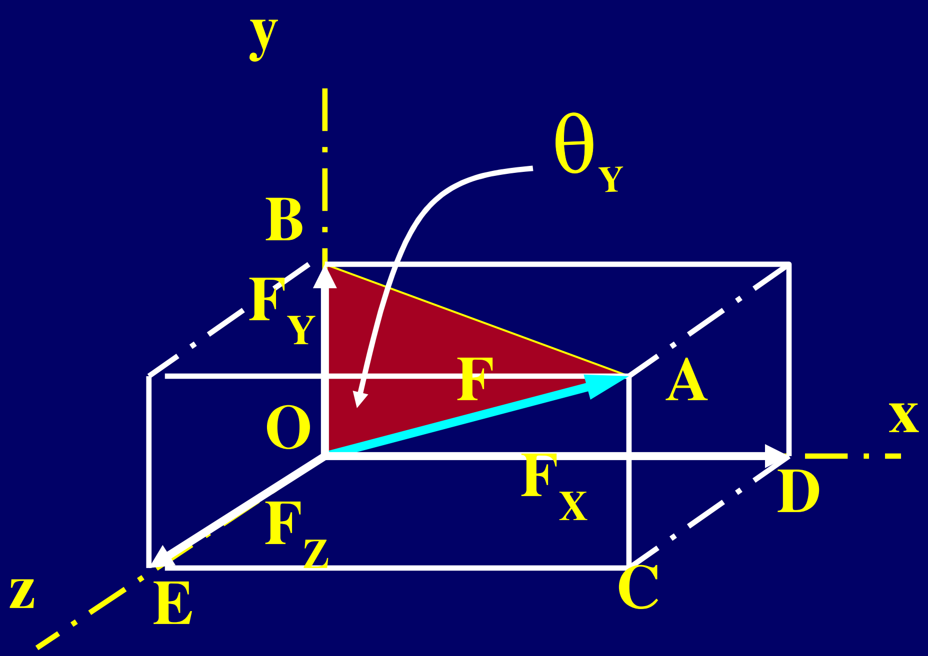
เรียก θ_x

มุม ADO เป็นมุมฉาก

$$F_x = F\cos\theta_x$$

หรือ

$$\cos\theta_x = F_x/F$$



มุมที่แนวแรง กระทำต่อแกน Y

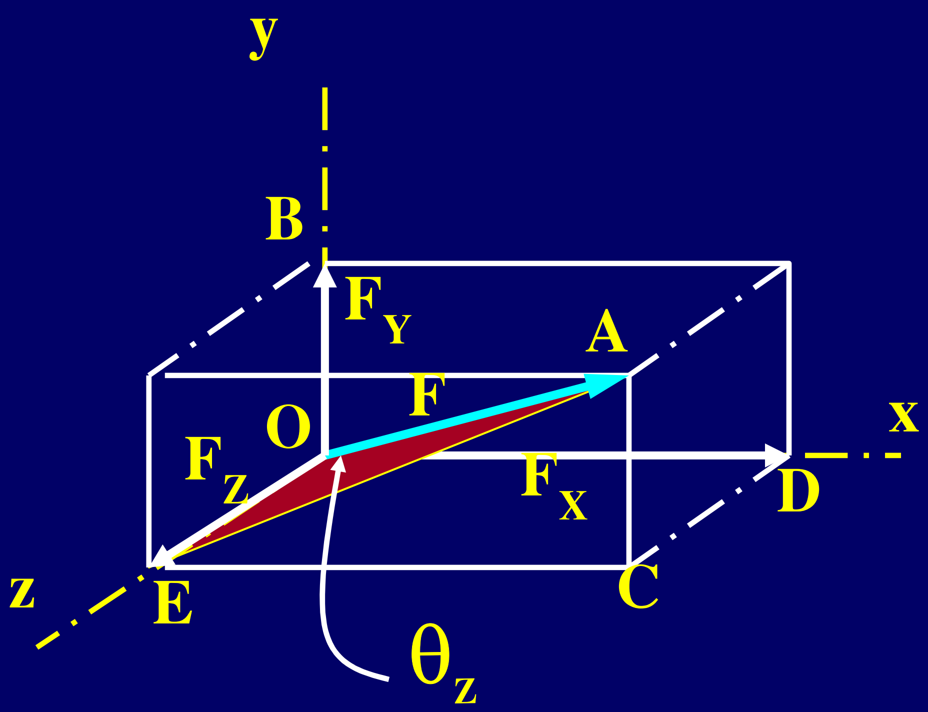
เรียก θ_Y

มุม ABO เป็นมุมฉาก

$$\boxed{F_Y = F\cos\theta_Y}$$

หรือ

$$\boxed{\cos\theta_Y = F_Y/F}$$



มุมที่แนวแรง
กระทำต่อแกน Z

เรียก θ_Z

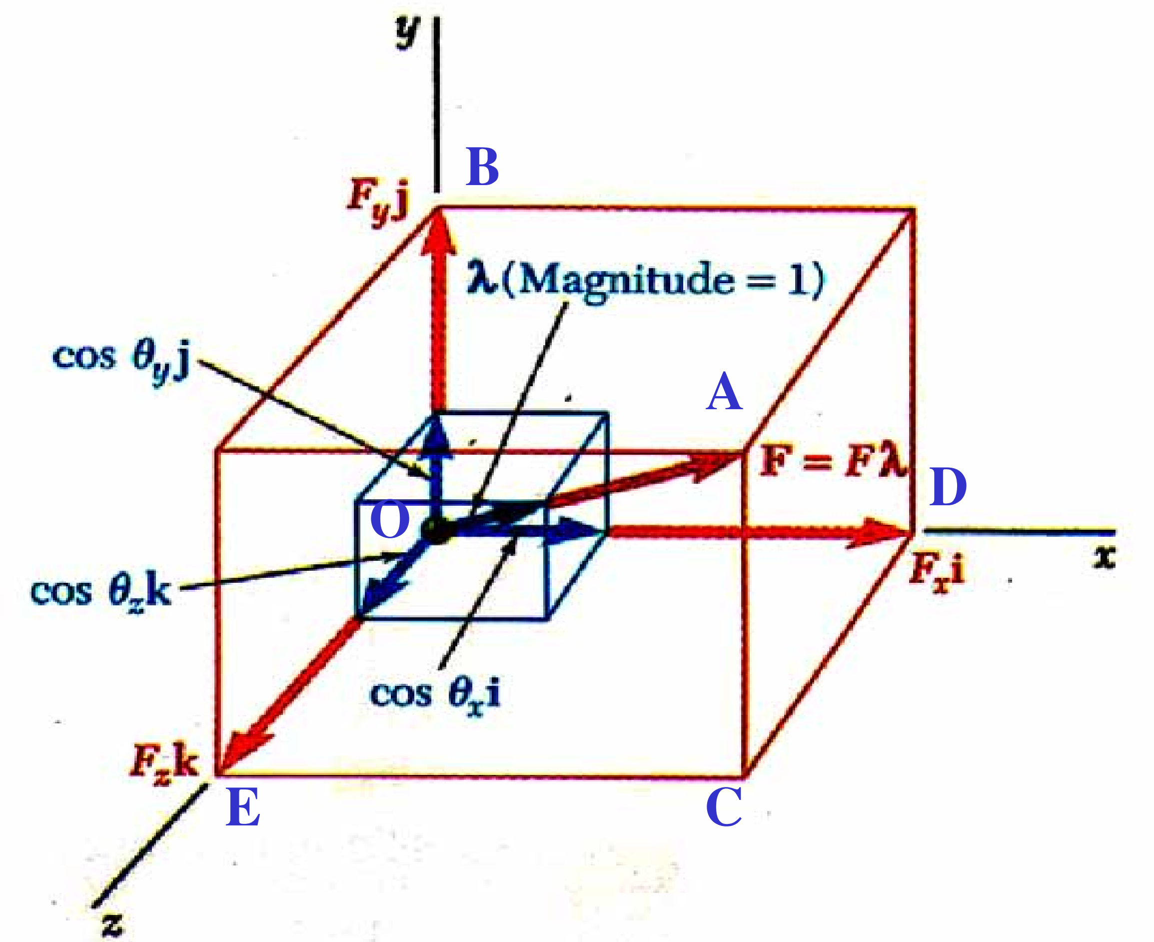
มุม AEO เป็นมุมฉาก

$$F_Z = F\cos\theta_Z$$

หรือ

$$\cos\theta_Z = F_Z/F$$

$\cos\theta_X$, $\cos\theta_Y$, $\cos\theta_Z$ เรียกว่า Direction Cosine



เขียนเป็นรูปเวคเตอร์

$$\overline{F} = F_X i + F_Y j + F_Z k$$

เมื่อ i, j, k

เป็น Unit Vector

ในแกน

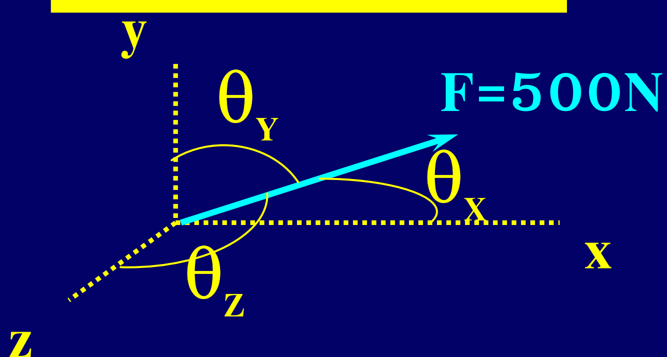
X, Y, Z ตามลำดับ

และหาก λ เป็น Unit Vector แนว OA

$$\overline{F} = F\,\overline{\lambda}$$

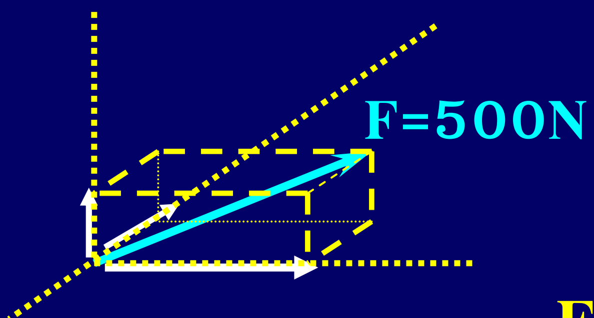
$$F^2 = F_X{}^2 + F_Y{}^2 + F_Z{}^2$$

ตัวอย่าง 2.10



ข้อมูล แรง 500 N ทำมุมกับแกน X,Y,Z เท่ากับ 60ฐ, 45ฐ, 120ฐ

ปัญหา หาแรงย่อยในแกน X,Y,Z

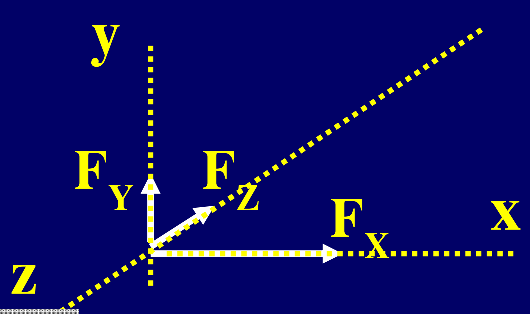


วิธีทำ

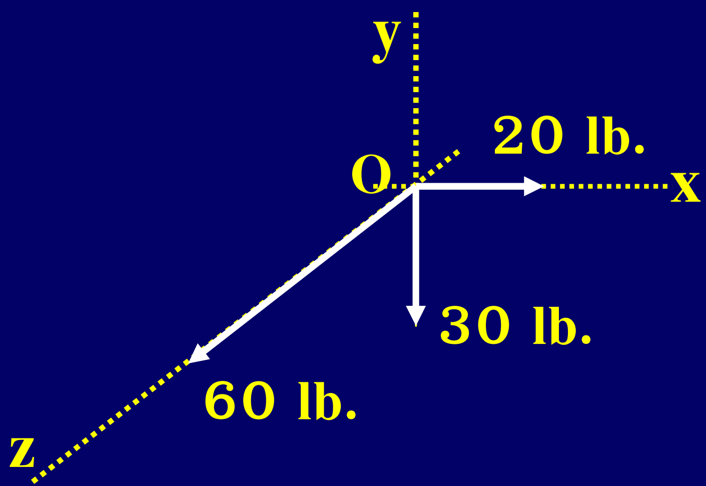
$F_X = F\cos\theta_X = 500\cos 60$ฐ $= +250$ N

$F_Y = F\cos\theta_Y = 500\cos 45$ฐ $= +354$ N

$F_Z = F\cos\theta_Z = 500\cos 120$ฐ $= -250$ N

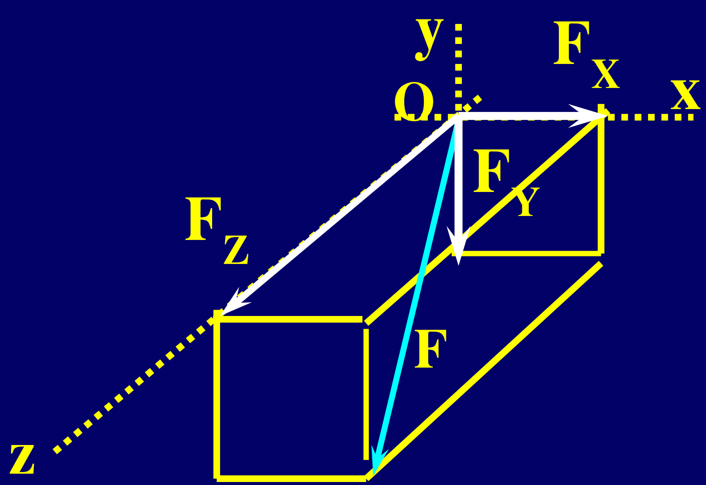


ตัวอย่างที่ 2.11



ข้อมูล แรง F มีแรงย่อยในแกน X,Y,Z เท่ากับ 20 lb, -30 lb, 60 lb ตามลำดับ

ปัญหา ให้หาขนาดและทิศทางของแรง F

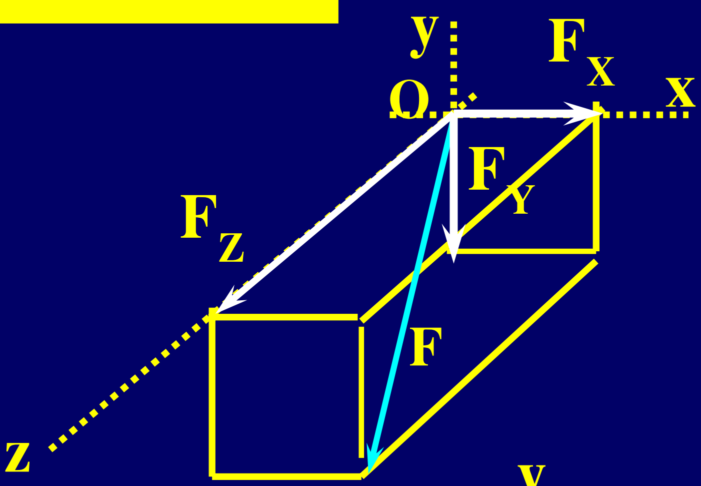


$$F^2 = F_X^{\,2} + F_Y^{\,2} + F_Z^{\,2}$$

$$F^2 = (20)^2 + (-30)^2 + (60)^2$$

$$F = 70 \text{ lb}$$

ตัวอย่างที่ 2.11



$F_X = 20,\ F_Y = -30,\ F_Z = 60,\ F = 70$

$\cos\theta_X = F_X/F = 20/70$

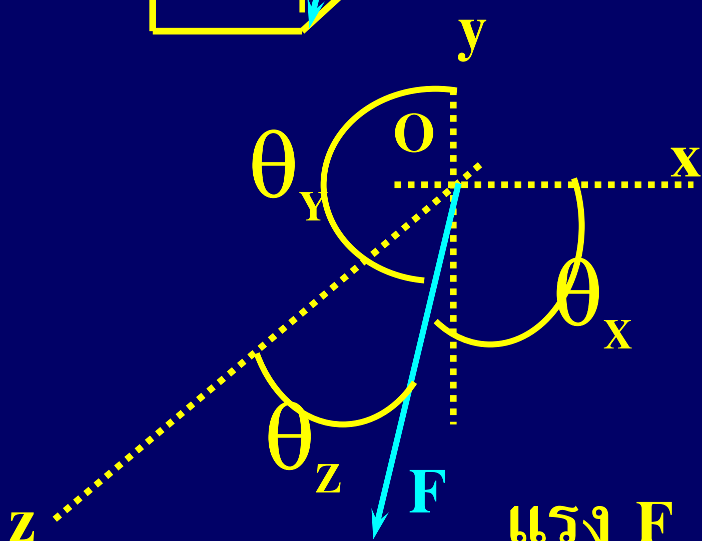
$\theta_X = 73.4$ฐ

$\cos\theta_Y = F_Y/F = -30/70$

$\theta_Y = 115.4$ฐ

$\cos\theta_Z = F_Z/F = 60/70$

$\theta_Z = 31.0$ฐ

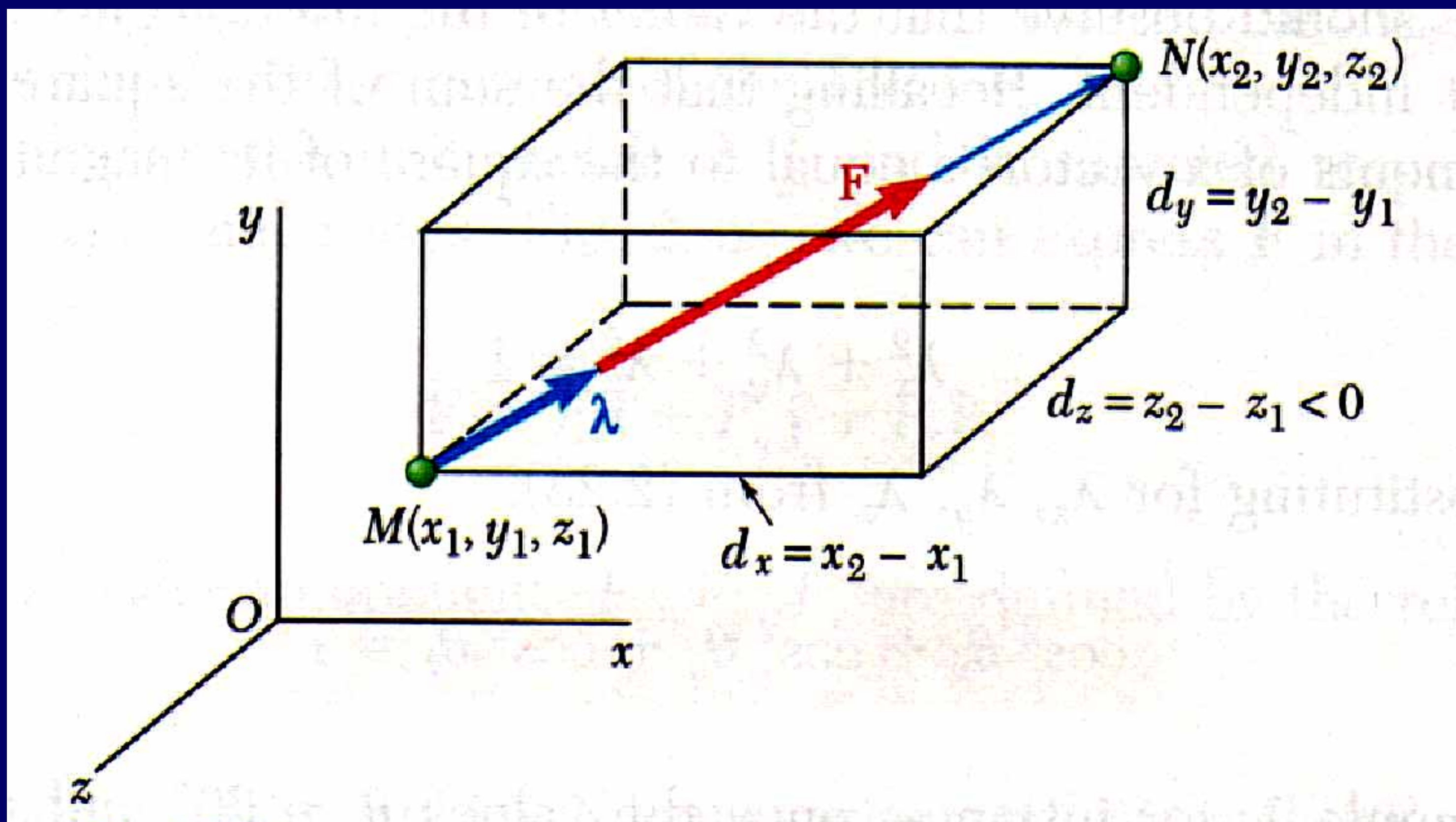


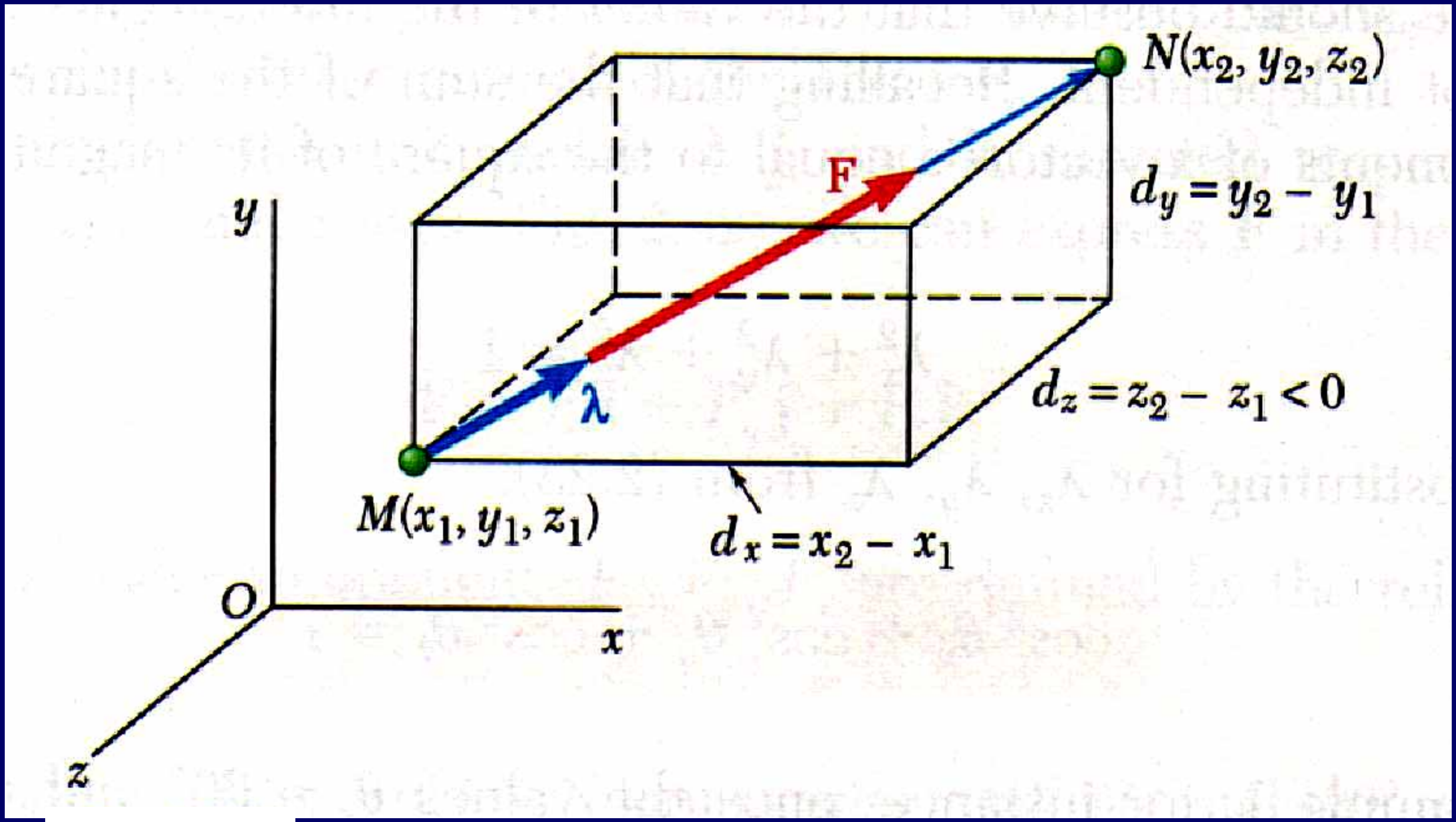
แรง F มีค่า 70 lb.

มีทิศทาง $\theta_X = 73.4$ฐ $\theta_Y = 115.4$ฐ $\theta_Z = 31.0$ฐ

2.12 แรงซึ่งแทนขนาดด้วยความยาวของเส้นตรง

และทิศทางซึ่ง แทนด้วยค่าผลต่างของระยะทาง ระหว่างจุดสองจุดบนแนวแรงนั้น

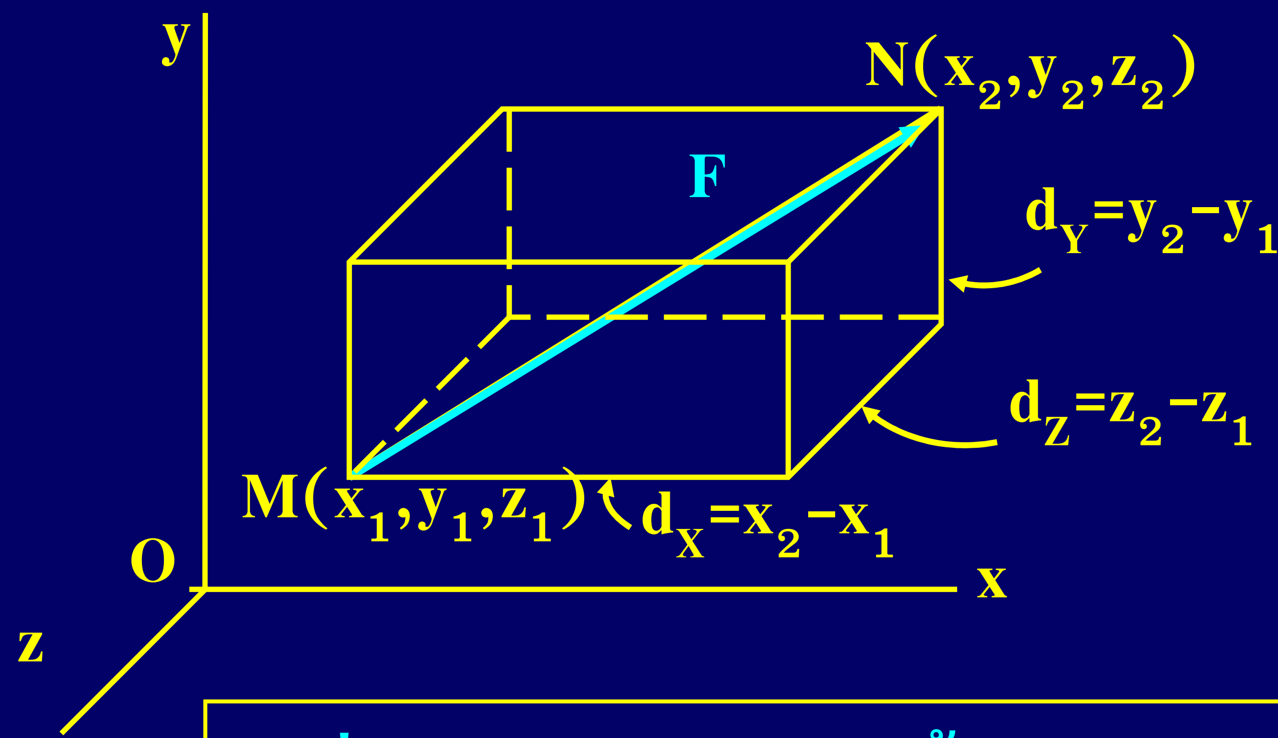




แรง F แทนขนาดด้วยเส้นตรง MN

มีพิกัด $M(X_1Y_1Z_1)$ และ $N(X_2Y_2Z_2)$

มี F_X, F_Y, F_Z เป็นแรงย่อยในแกน



ผลต่างของจุดสองจุดบนเส้น MN ตามแนวแกน

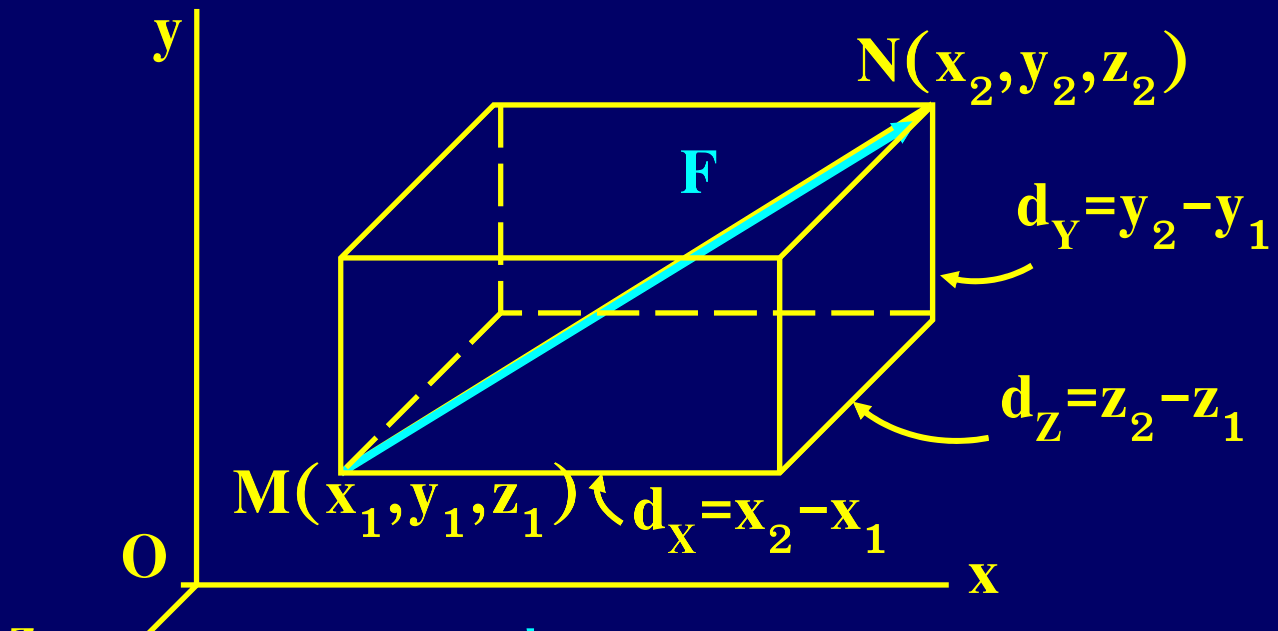
$d_X = X_2 - X_1$

$d_Y = Y_2 - Y_1$

$d_Z = Z_2 - Z_1$

ถ้าให้ความยาว MN = d

$$d^2 = d_X^{\,2} + d_Y^{\,2} + d_Z^{\,2}$$

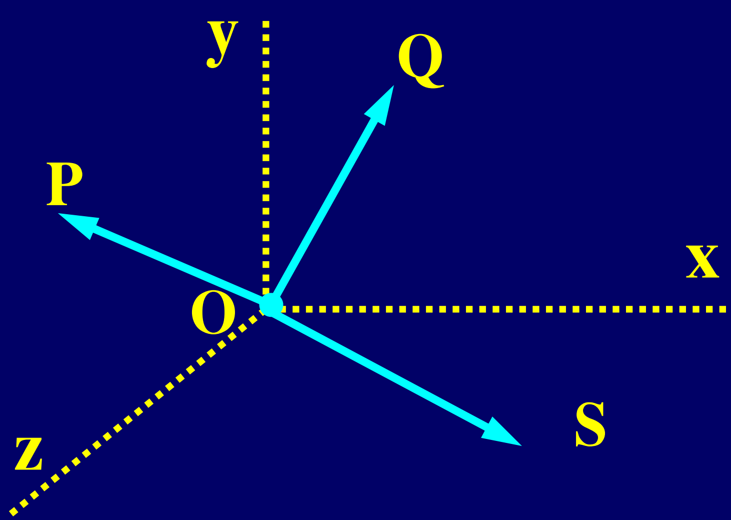


เมื่อใช้อัตราส่วนแรงต่อความยาวด้าน

จะได้ $F_X / d_X = F_Y / d_Y = F_Z / d_Z = F/d$

$$\cos\theta_X = d_X / d$$
$$\cos\theta_Y = d_Y / d$$
$$\cos\theta_Z = d_Z / d$$

2.13 การรวมแรงซึ่งมีจุดแนวแรงทั้งหมดมาตัดกันหรือพบกันใน 3 มิติ



ใช้หลักการเดียวกับ 2 มิติ

$$\boxed{R = \sum F}$$

ตั้งแกน X,Y,Z มี Origin ที่ จุดตัด O

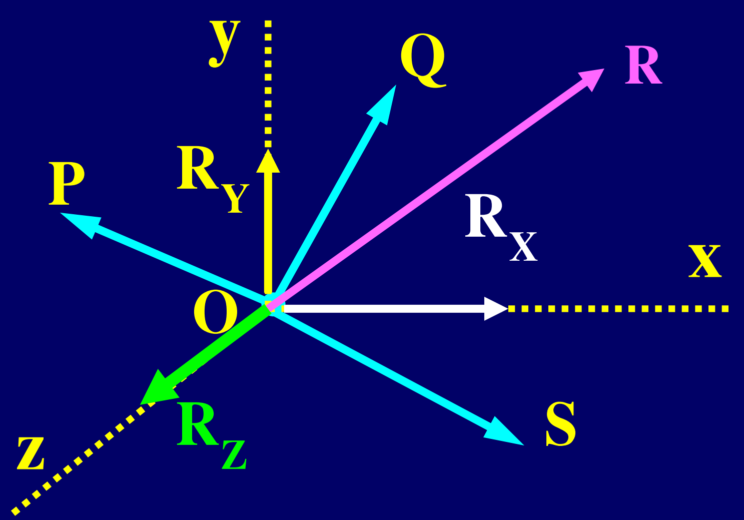
แตกแรง P, Q, S เข้าสู่แกน X, Y, Z

จะได้ $\boxed{P_X, P_Y, P_Z}$ $\boxed{Q_X, Q_Y, Q_Z}$ $\boxed{S_X, S_Y, S_Z}$

2.13 การรวมแรงซึ่งมีจุดแนวแรงทั้งหมด มาตัดกันหรือพบกันใน 3 มิติ

$$R_X i + R_Y j + R_Z k = (\sum F_X)i + (\sum F_Y)j + (\sum F_Z)k$$

$$= (P_X + Q_X + S_X)i + (P_Y + Q_Y + S_Y)j + (P_Z + Q_Z + S_Z)k$$



$$R_X = P_X + Q_X + S_X$$

$$R_Y = P_Y + Q_Y + S_Y$$

$$R_Z = P_Z + Q_Z + S_Z$$

$$\boxed{R^2 = R_X^{\ 2} + R_Y^{\ 2} + R_Z^{\ 2}}$$

ทิศทางของ R หาได้จาก

$$\cos\theta_X = R_X / R$$

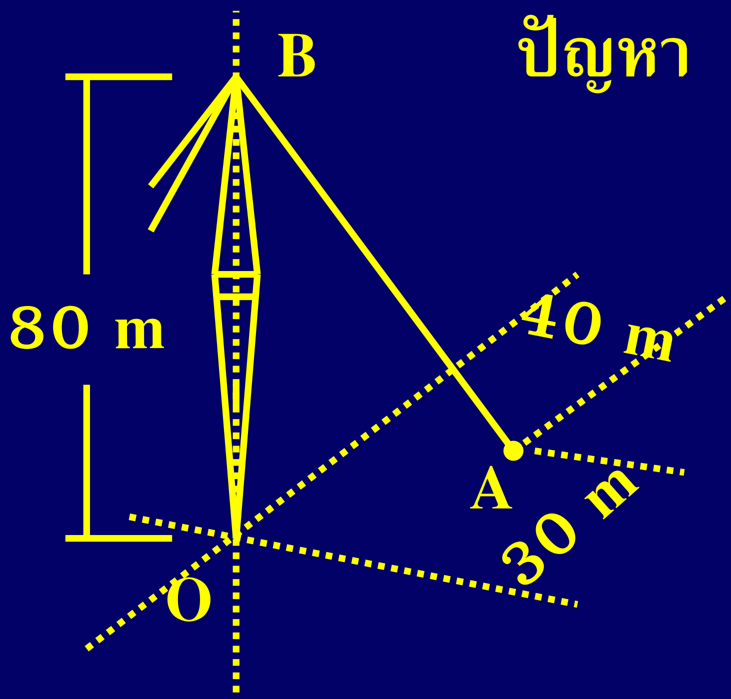
$$\cos\theta_Y = R_Y / R$$

$$\cos\theta_Z = R_Z / R$$

ตัวอย่าง 2.12

ข้อมูล เสาสูง โยงด้วยลวดจาก B ลงมา A

แรงดึงในลวดที่ A เท่ากับ 2500 N



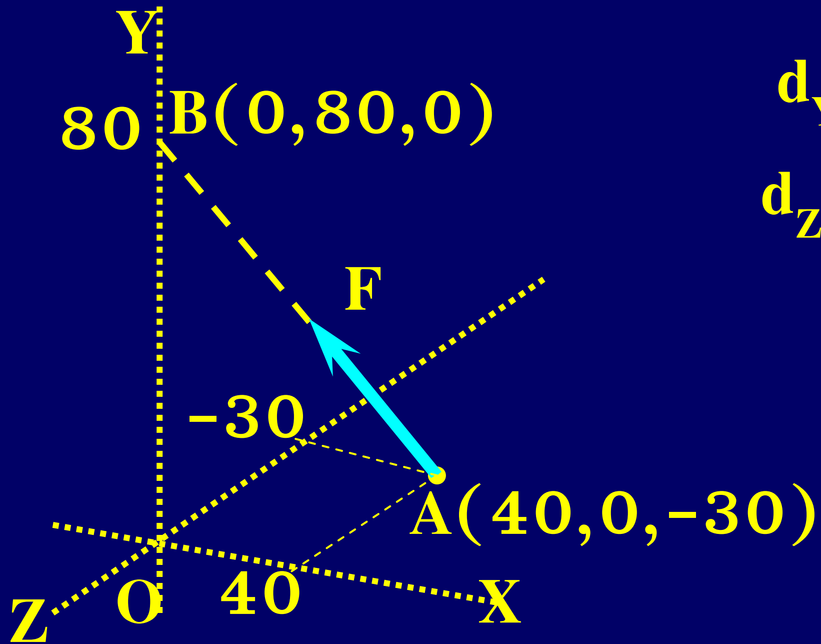
ปัญหา a) หาแรงย่อยที่ A

b) มามุม θ_X, θ_Y, θ_Z ของแนวแรง AB

ตัวอย่าง 2.12

วิธีทำ

(a) ใช้หลักการ แรง/ความยาวเส้น



$$d_X = X_2 - X_1 = 0-40 = -40$$

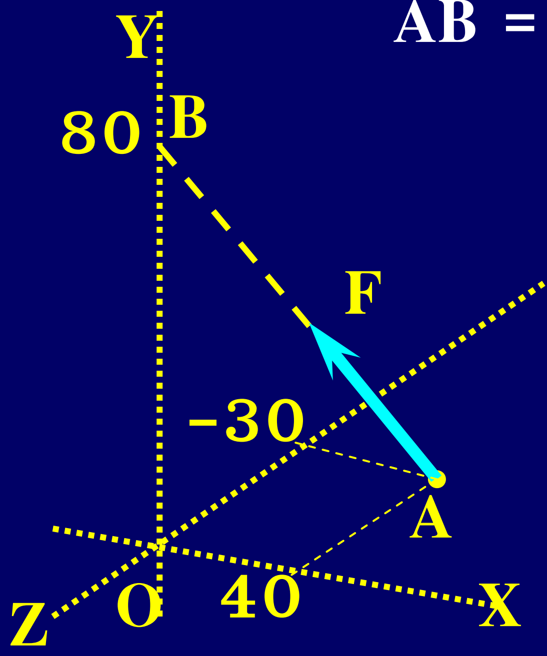
$$d_Y = Y_2 - Y_1 = 80-0 = 80$$

$$d_Z = Z_2 - Z_1 = 0-(-30) = 30$$

(เครื่องหมายชี้ให้เห็นทิศทาง)

$$d = AB = \sqrt{(-40)^2+(80)^2+(30)^2} = 94.3$$

ตัวอย่าง 2.12



$AB = d = 94.3 \quad d_X = -40 \quad d_Y = 80 \quad d_Z = 30$

จาก $\quad F_X/F = d_X/d$

$F_X = F(d_X/d) = (2500)(-40/94.3$

$F_X = -1060\ N$

ทำนองเดียวกัน

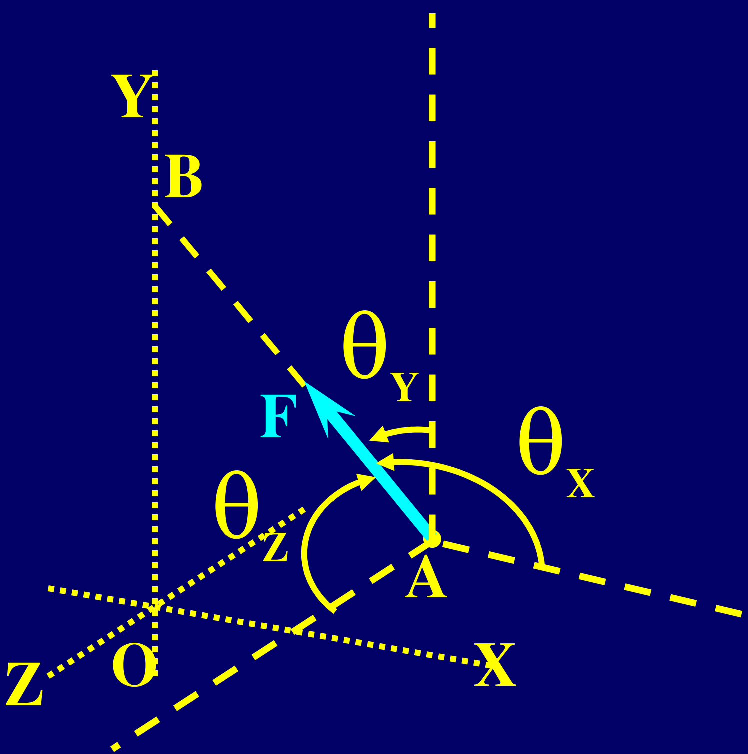
$F_Y = F(d_Y/d) = 2120\ N$

$F_Z = F(d_Z/d) = 795\ N$

$\overline{F} = (-1060N)i+(2120N)j+(795N)k$

ตัวอย่าง 2.12

(b) หามุมที่ F ทำกับแกนทั้งสาม



$\cos\theta_X = F_X/F = -1060/2500$

$= -0.424$;

$\theta_X = 115.1$ฐ

$\cos\theta_Y = F_Y/F = 2120/2500$

$= 0.848$;

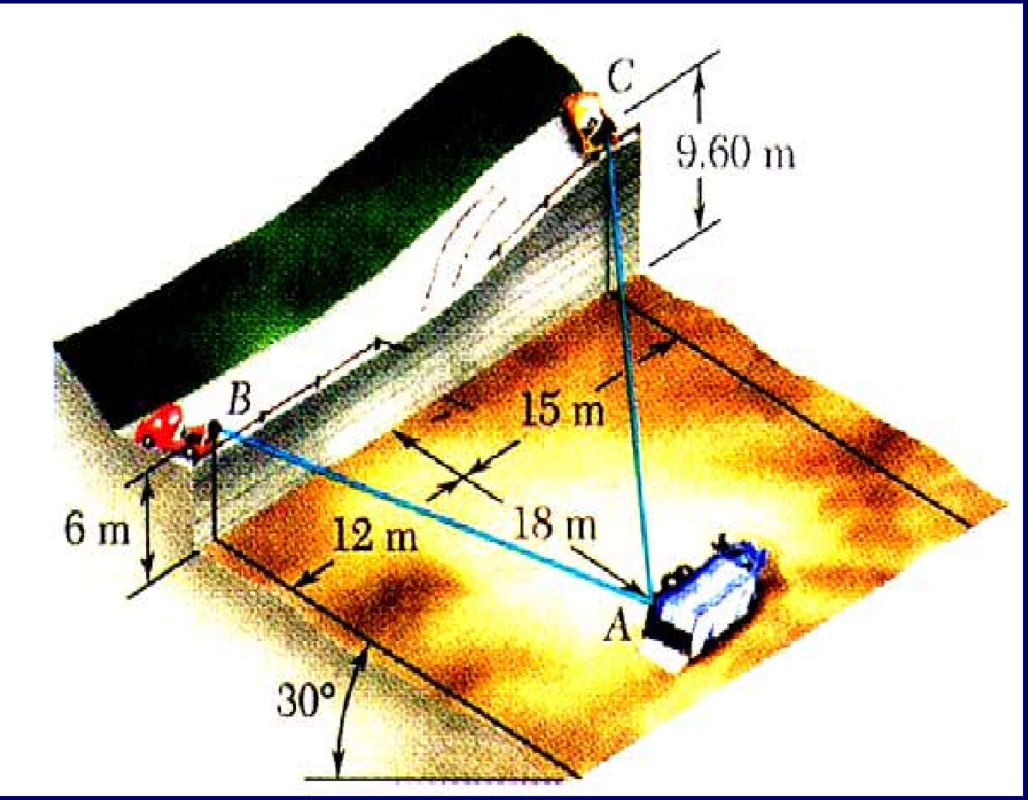
$\theta_Y = 32.0$ฐ

$\cos\theta_Z = F_Z/F = 795/2500$

$= 0.318$;

$\theta_Z = 71.5$ฐ

ตัวอย่าง 2.13



ข้อมูล

A คือรถบรรทุกตกถนน

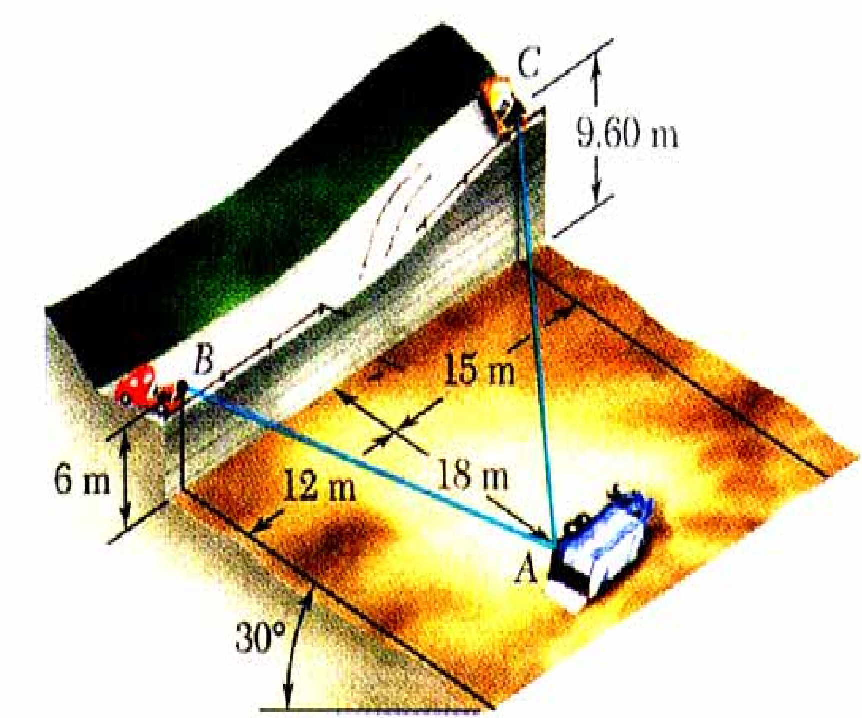
B และ C คือรถกว้านดึง A

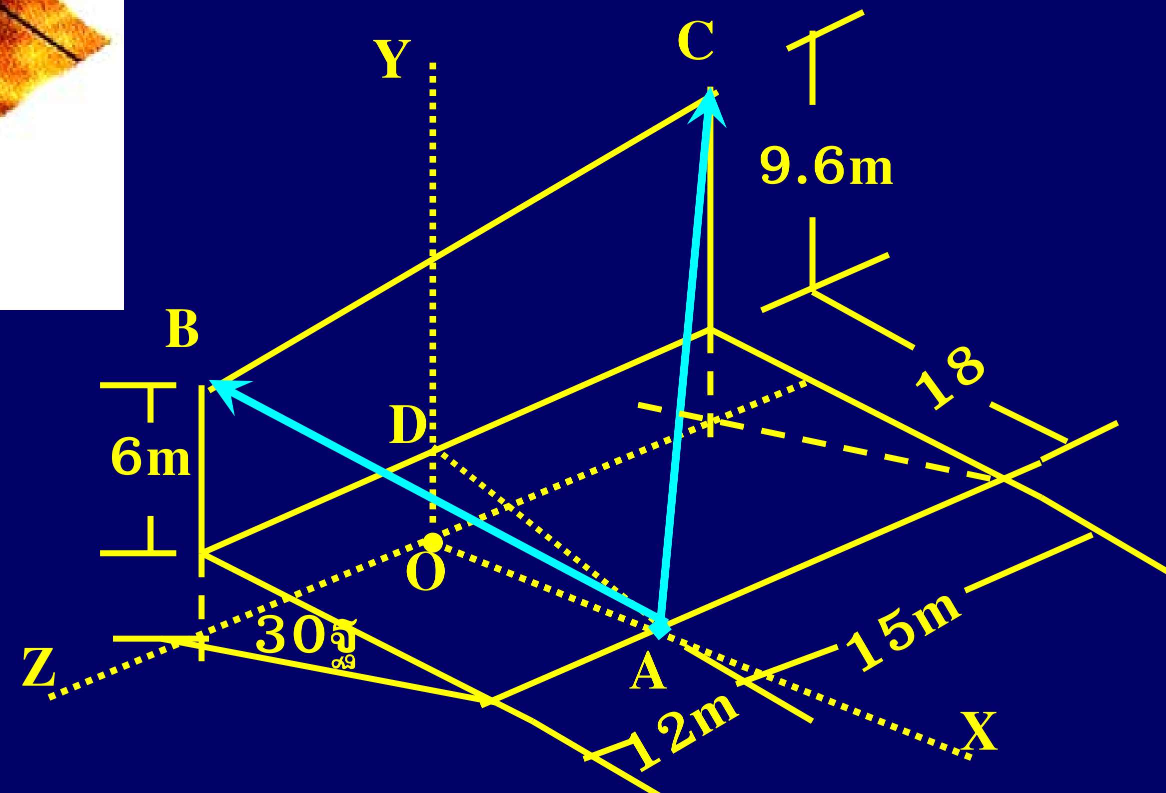
แรงดึง 10 kN และ 7.5 kN

พื้นข้างล่างเอียง 30

ปัญหา

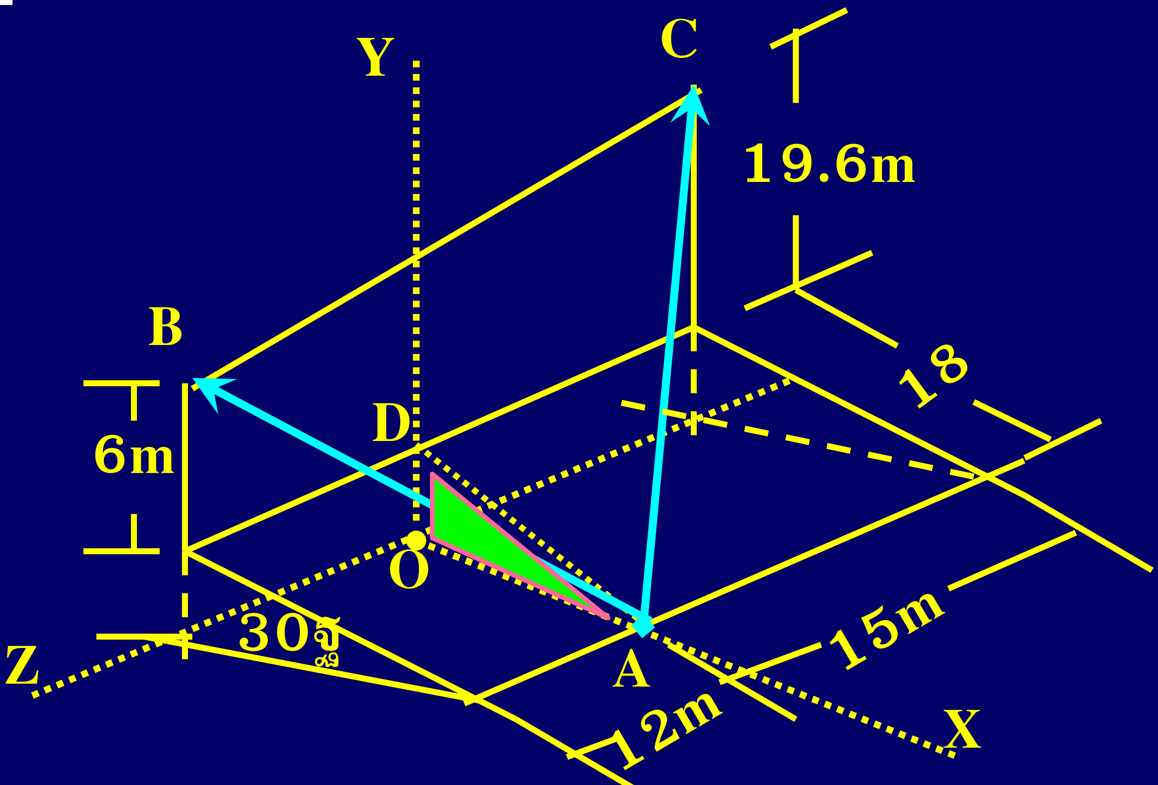
หาแรงลัพท์จากรถกว้าน B, C



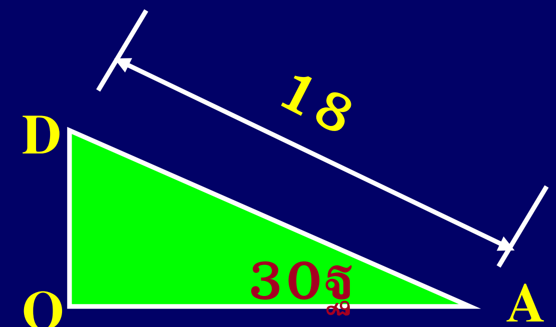


วิธีทำ

ให้ O เป็นจุด Origin
แกน X, Y, Z ดังรูป



ให้ O เป็นจุด Origin
แกน X, Y, Z ดังรูป



จากสามเหลี่ยมมุมฉาก AOD

$OD = AD\sin 30 = 18(0.5) = 9$

$AO = AD\cos 30 = 18(0.866) = 15.6$

ตัวอย่าง 2.13

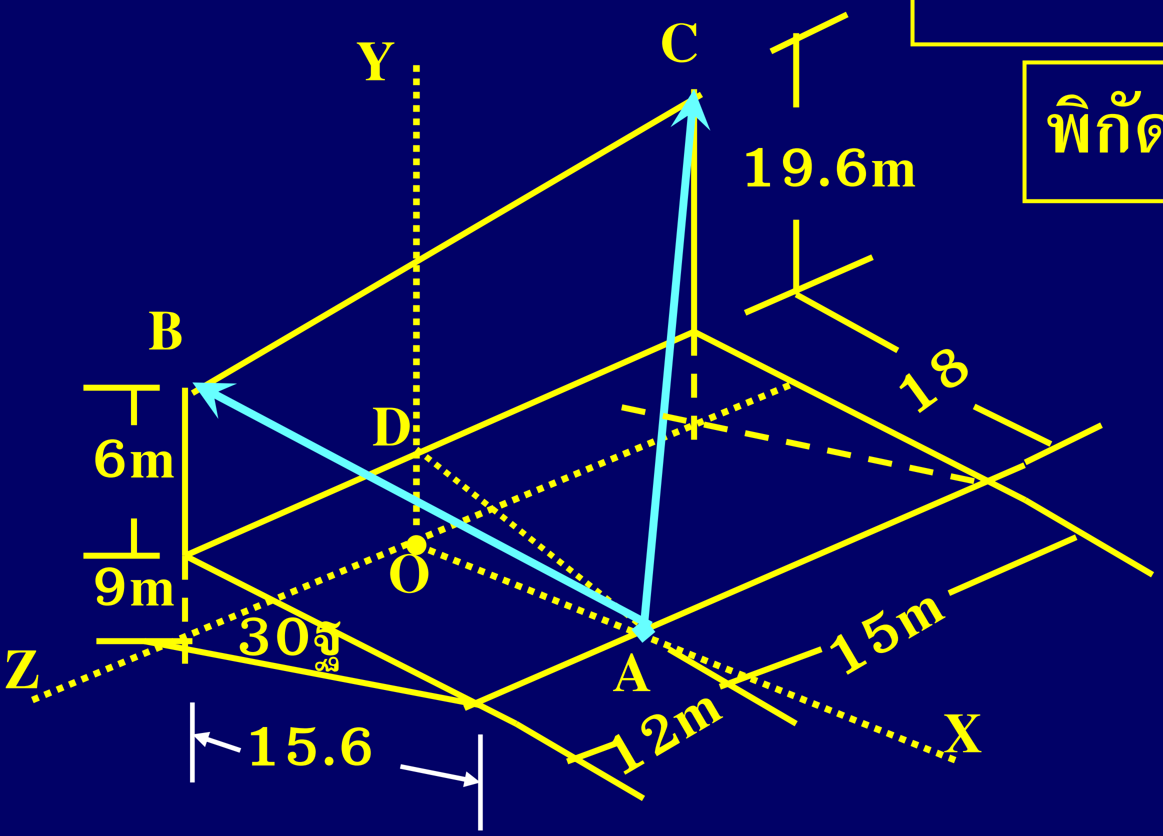
พิจารณาแรงในเคเบิล T_{AB} , T_{AC} สัมพันธ์กับความยาว AB, AC

พิกัดหมุด A, B, C คือ

A(15.6,0,0)

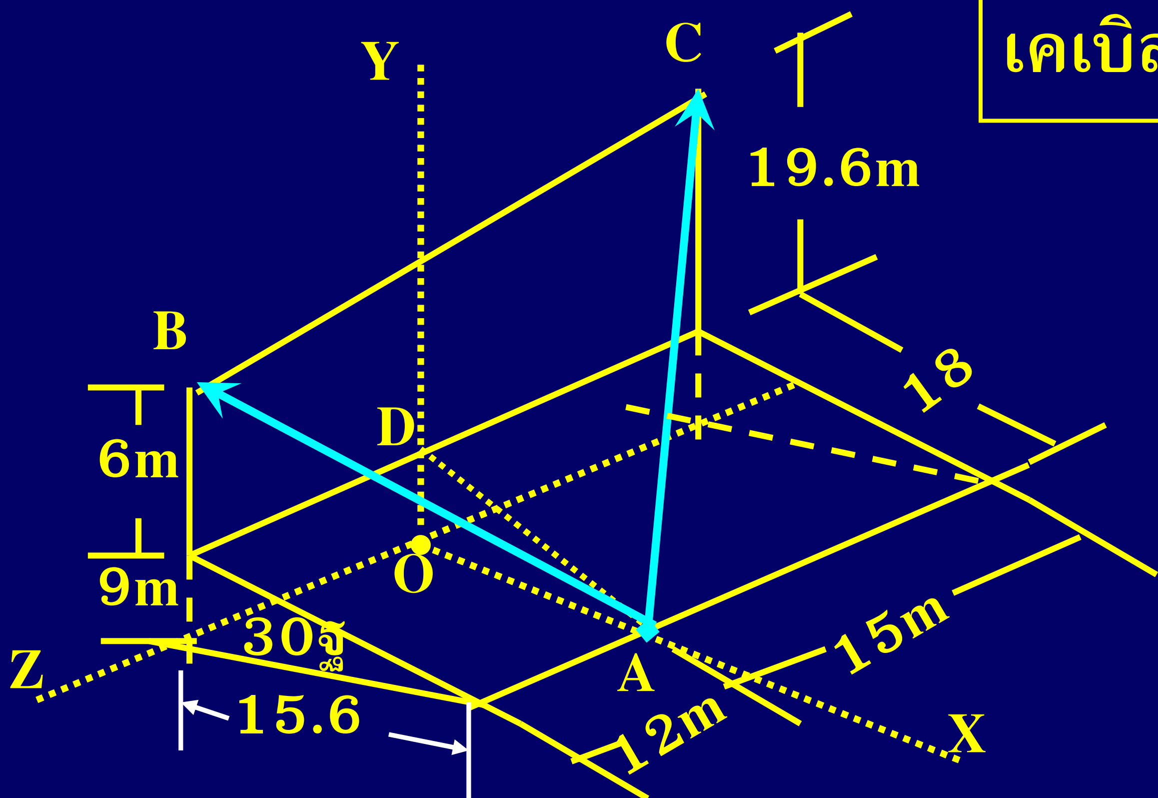
B(0,15,12)

C(0,28.6,-15)



ตัวอย่าง 2.13

A(15.6,0,0), B(0,15,12), C(0,28.6,-15)



เคเบิล AB

$$d_X = (X_2 - X_1) = 0 - 15.6 = -15.6 \text{ m}$$

$$d_Y = (Y_2 - Y_1) = 15 - 0 = 15 \text{ m}$$

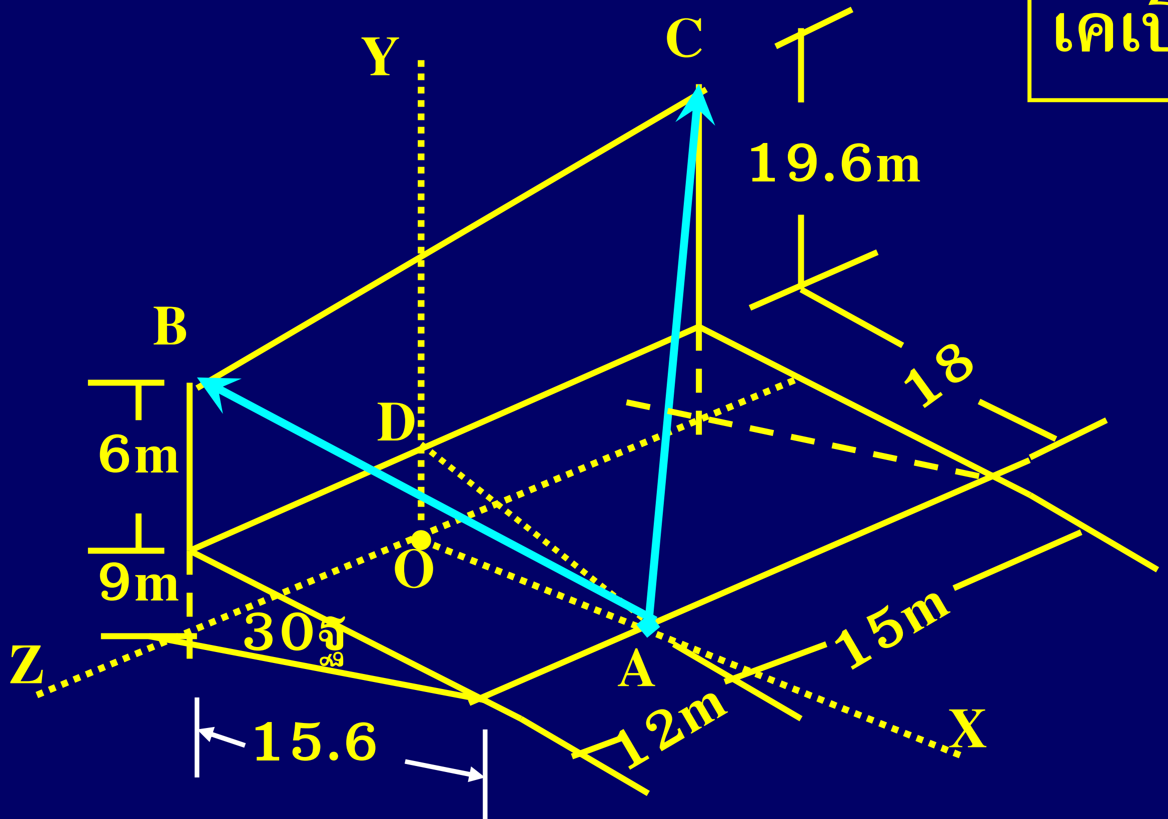
$$d_Z = (Z_2 - Z_1) = 12 - 0 = 12 \text{ m}$$

$$d = AB = \sqrt{(-15.6)^2 + (15)^2 + (12)^2}$$

$$d = 24.8 \text{ m}$$

ตัวอย่าง 2.13

A(15.6,0,0), B(0,15,12), C(0,28.6,-15)



เคเบิล AC

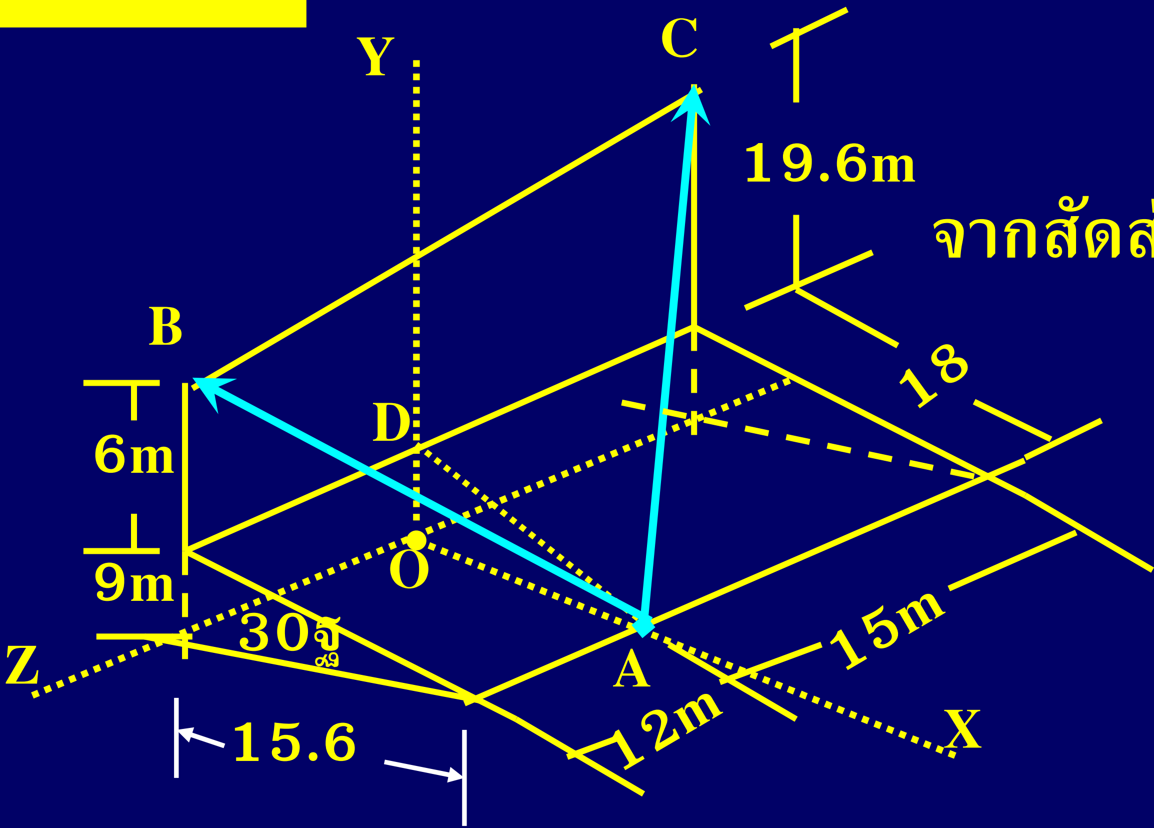
d_X = -15.6 m

d_Y = 28.6 m

d_Z = -15 m

d = AC = 35.9 m

ตัวอย่าง 2.13



จากสัดส่วนแรงและความยาวด้าน

$$F_X/F = d_X/d$$

$$F_X = F(d_X/d)$$

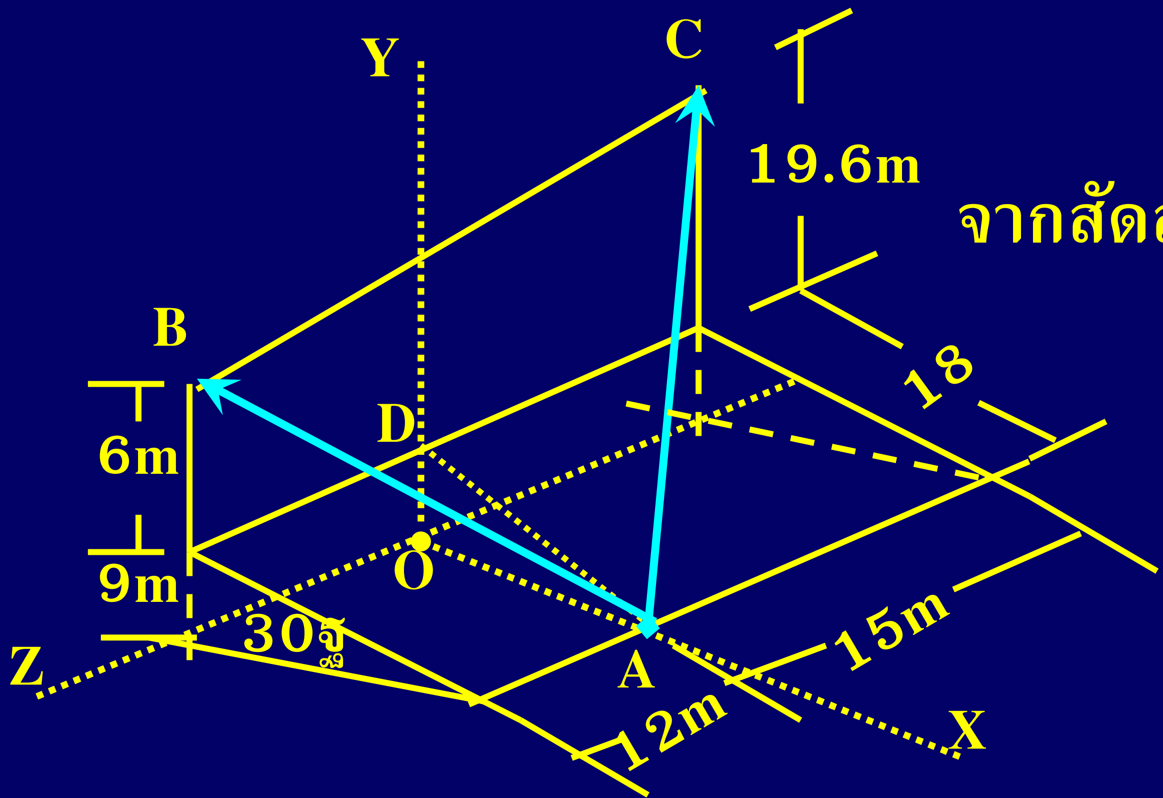
เคเบิล AB

$$T_{ABX} = 10(-15.6/24.8) = -6.3 \text{ kN}$$

$$T_{ABY} = 10(15/24.8) = 6.0 \text{ kN}$$

$$T_{ABZ} = 10(12/24.8) = 4.8 \text{ kN}$$

ตัวอย่าง 2.13



จากสัดส่วนแรงและความยาวด้าน

$$F_X/F = d_X/d$$

$$F_X = F(d_X/d)$$

เคเบิล AC

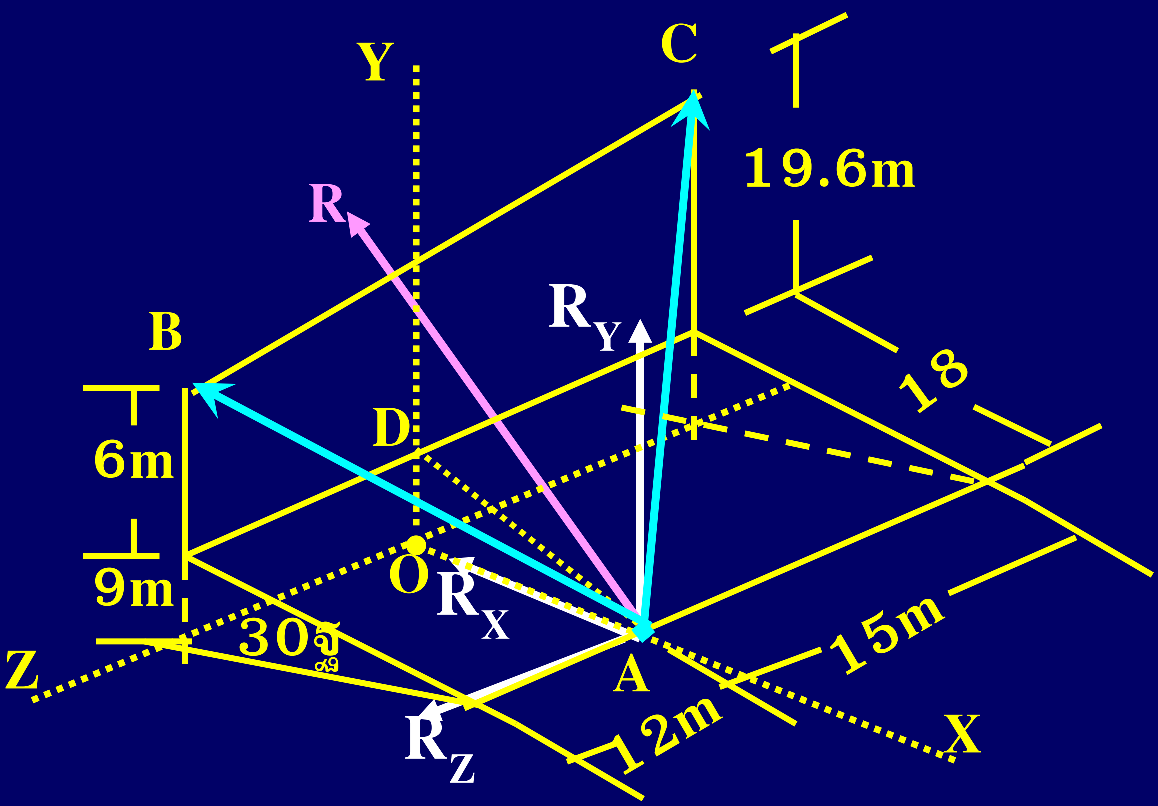
$$T_{ACX} = 7.5(-15.6/35.9) = -3.3 \text{ kN}$$

$$T_{ACY} = 7.5(28.6/35.9) = 6.0 \text{ kN}$$

$$T_{ACZ} = 7.5(-15/35.9) = -3.1 \text{ kN}$$

ตัวอย่าง 2.13

รวมแรงในแต่ละแกน



$$R_X = T_{ABX} + T_{ACX}$$
$$= -6.3 + (-3.3)$$
$$= -9.6 \quad \text{kN}$$

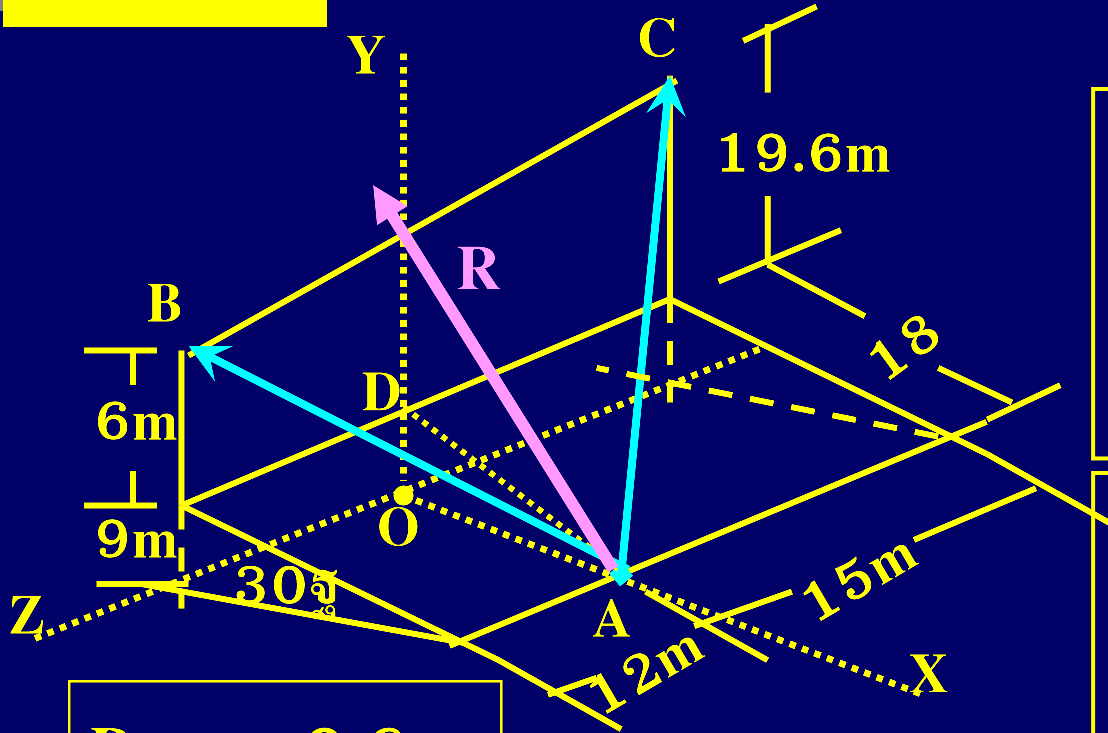
$$R_Y = T_{ABY} + T_{ACY}$$
$$= 6.0 + 6.0$$
$$= 12.0 \quad \text{kN}$$

$$R_Z = T_{ABZ} + T_{ACZ}$$
$$= 4.8 - 3.1$$
$$= 1.7 \quad \text{kN}$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}$$
$$= 15.5 \quad \text{kN}$$

ตัวอย่าง 2.13

ทิศทางแรงลัพท์



R_X = - 9.6

R_Y = 12.0

R_Z = 1.7

R = 15.5

$\cos\theta_X = R_X/R$

$\theta_X = \cos^{-1}(-9.6/15.5)$

θ_X = 128.3ฐ

$\cos\theta_Y = R_Y/R$

$\theta_Y = \cos^{-1}(12/15.5)$

θ_Y = 39.3ฐ

$\cos\theta_Z = R_Z/R$

$\theta_Z = \cos^{-1}(1.7/15.5)$

θ_Z = 83.7ฐ

ตัวอย่าง 2.13

$T_{ABX} = -6.3$ kN	$T_{ACX} = -3.3$ kN	$R_X = -9.6$
$T_{ABY} = 6.0$ kN	$T_{ACY} = 6.0$ kN	$R_Y = 12.0$
$T_{ABZ} = 4.8$ kN	$T_{ACZ} = -3.1$ kN	$R_Z = 1.7$
$T_{AB} = 10$ kN	$T_{AC} = 7.5$ kN	$R = 15.5$

เขียนในรูปเวคเตอร์

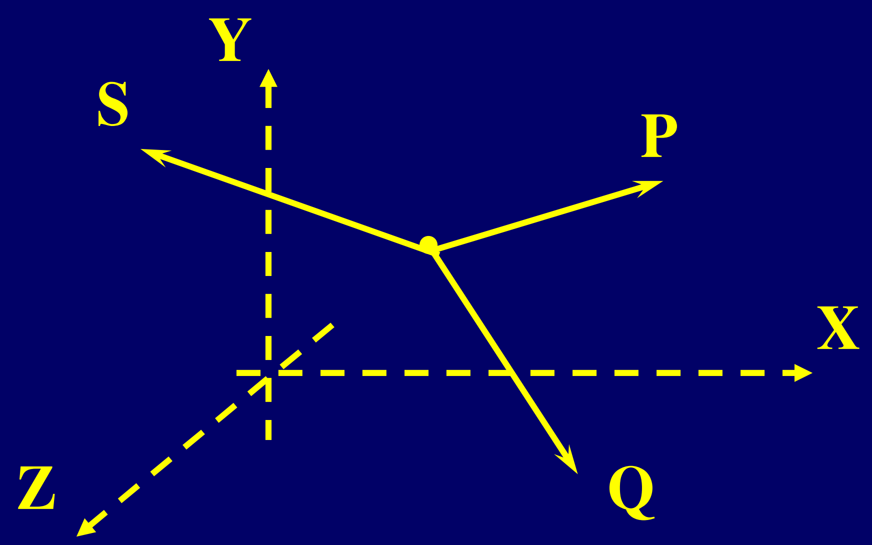
$$\overline{T}_{AB} = (-6.3)i + (6.0)j + (4.8)k$$

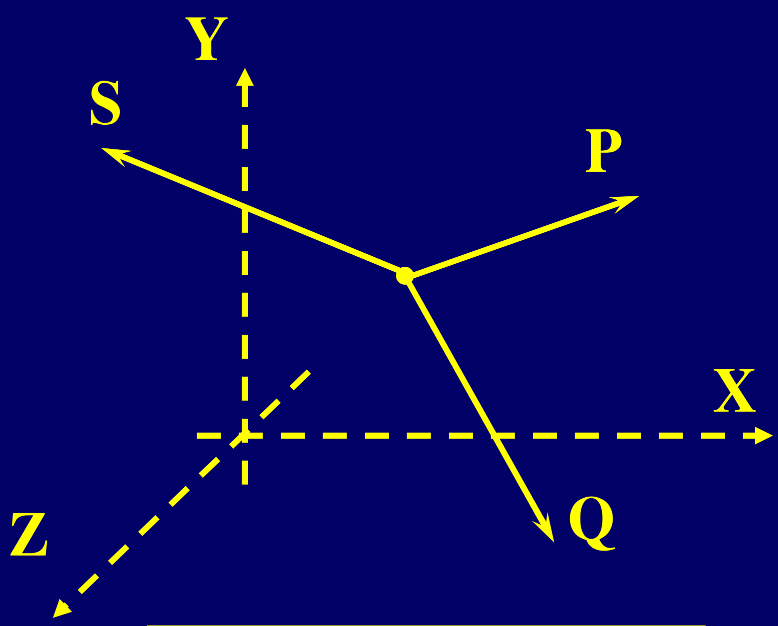
$$\overline{T}_{AC} = (-3.3)i + (6.0)j + (-3.1)k$$

$$\overline{R} = \overline{T}_{AB} + \overline{T}_{AC} = (-9.6)i + (12)j + (1.7)k$$

สมดุลอนุภาคใน 3 มิติ

2.1.4 สมดุลของอนุภาคใน 3 มิติ





$$R = \sum F = 0$$

$$R_X = \sum F_X = 0$$

$$R_Y = \sum F_Y = 0$$

$$R_Z = \sum F_Z = 0$$

เขียนในรูป Vector

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q} + \overline{S} = 0$$

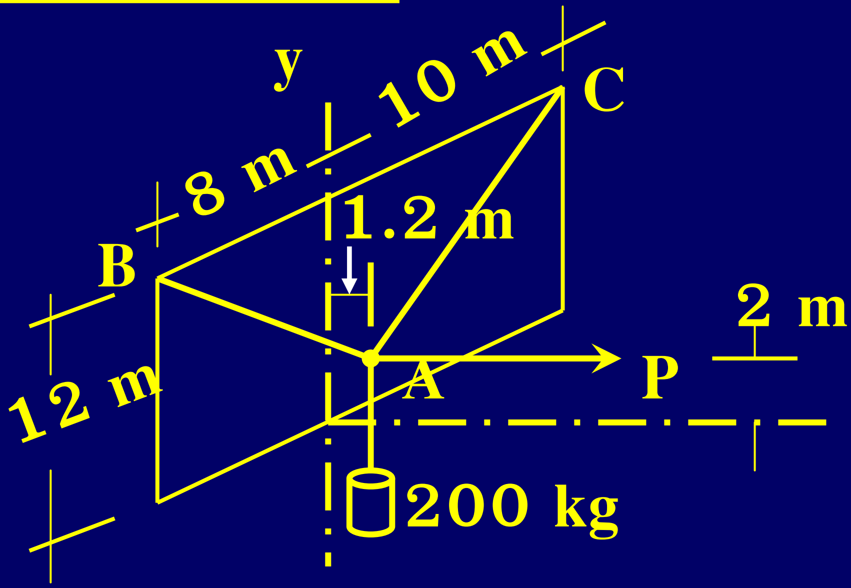
$$\overline{R} = R_X i + R_Y j + R_Z k = 0$$

$$R_X = P_X + Q_X + S_X = 0$$

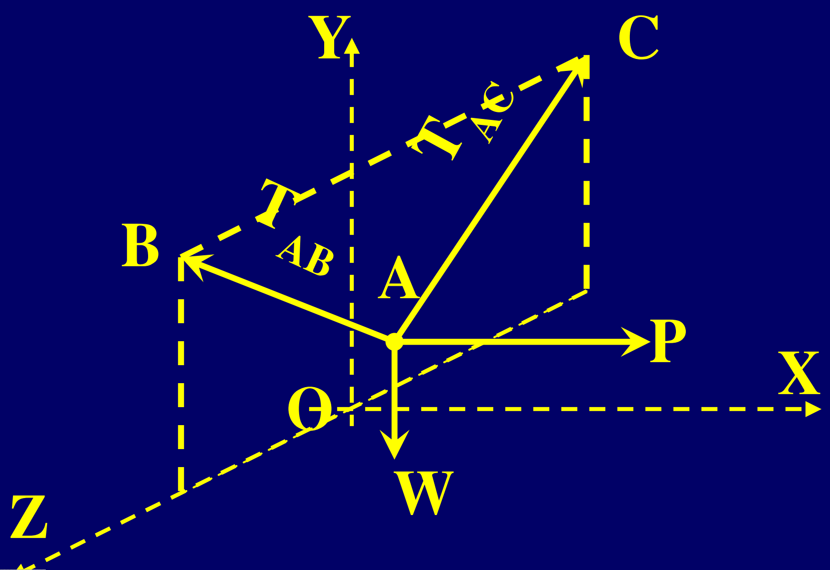
$$R_Y = P_Y + Q_Y + S_Y = 0$$

$$R_Z = P_Z + Q_Z + S_Z = 0$$

ตัวอย่าง 2.14



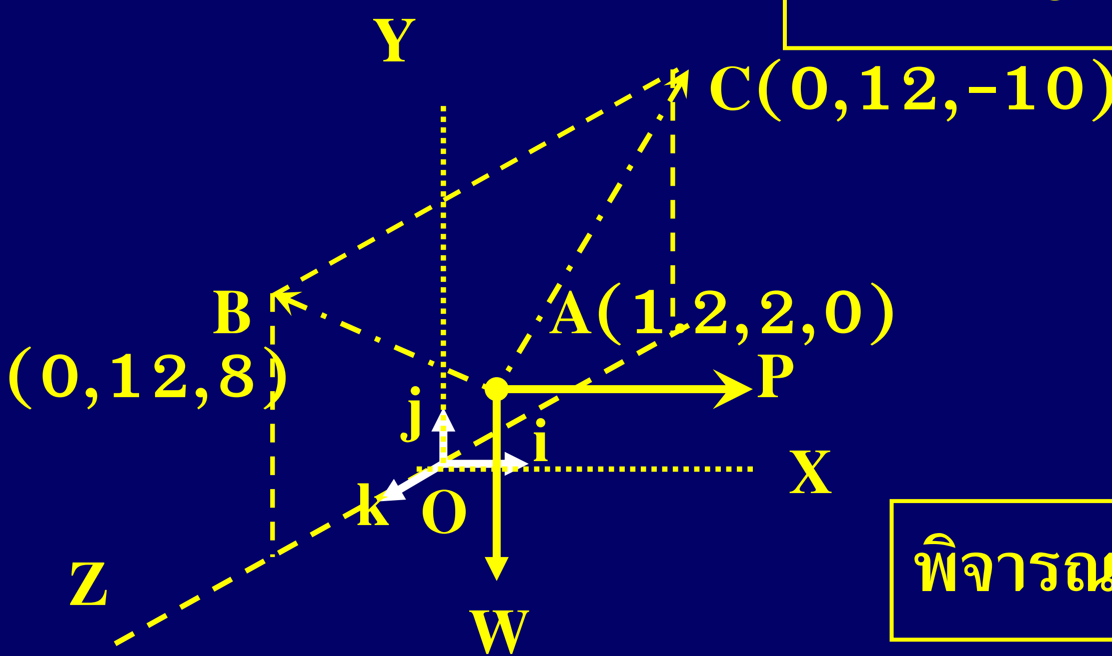
ข้อมูล ถังหนัก 200 kg
แขวนไว้ด้วยเคเบิล
AB และ AC มีแรงดึง
ให้ห่างผนัง 1.2 ม
ด้วย P ที่ตั้งฉากกับผนัง



ปัญหา หาขนาดแรง P
และแรงดึงในเคเบิล
AB,AC

เขียน FBD

ตัวอย่าง 2.14



กำหนด Origin ของแกน ที่ฐานผนัง

$\overline{P} = Pi$

$\overline{W} = -(200x9.81)j$

$= -(1962\ N)j$

พิจารณา แนวเส้น AB และ AC

พิกัดของ จุด A, B, C

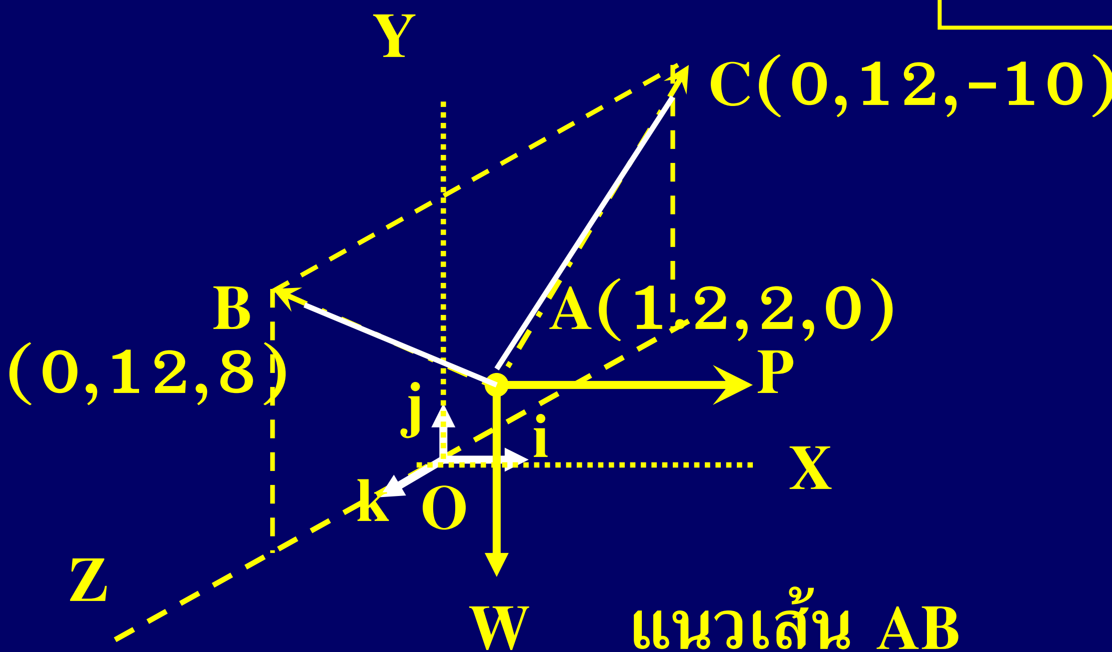
A(1.2,2,0)

B(0,12,8)

C(0,12,-10)

ตัวอย่าง 2.14

พิจารณา แนวเส้น AB และ AC



พิกัดของ จุด A, B, C

A(1.2,2,0)

B(0,12,8)

C(0,12,-10)

แนวเส้น AB

$d_X=(0-1.2)=-1.2$

$d_Y=(12-2)=10$

$d_Z=(8-0)=8$

$d = 12.86\ m$

แนวเส้น AC

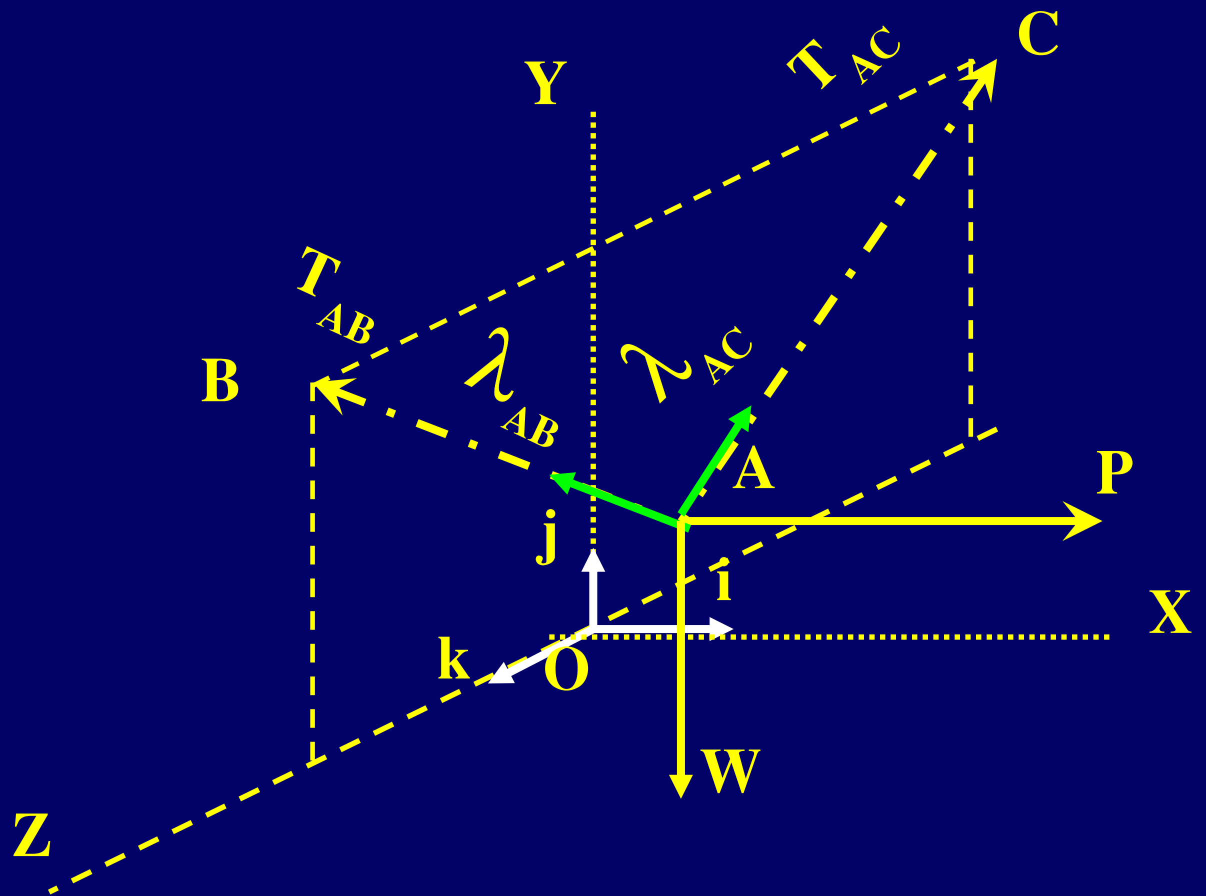
$d_X=(0-1.2)=-1.2$

$d_Y=(12-2)=10$

$d_Z=(-10-0)=-10$

$d = 14.19\ m$

ตัวอย่าง 2.14

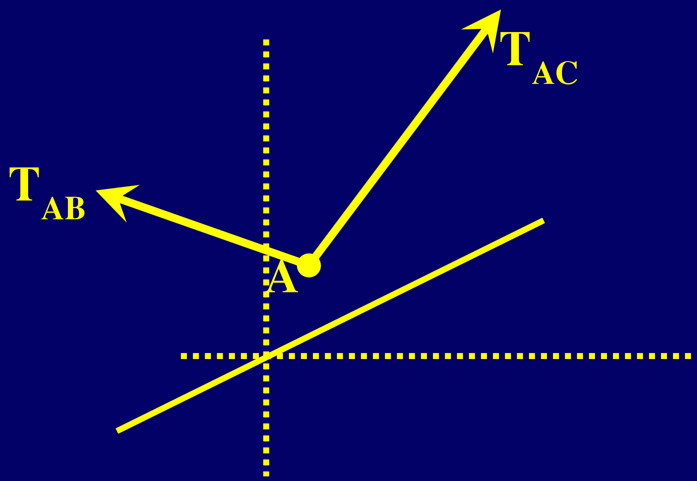


ตัวอย่าง 2.14

แนว AC; $d_X=-1.2$, $d_Y=10$, $d_Z=-10$, $d = 14.19$ m

แนว AB; $d_X=-1.2$, $d_Y=10$, $d_Z=8$, $d =12.86$ m

จาก $F_X/F = d_X/d$; $F_Y/F = d_Y/d$; $F_Z/F = d_Z/d$



d_X/d, d_Y/d, d_Z/d

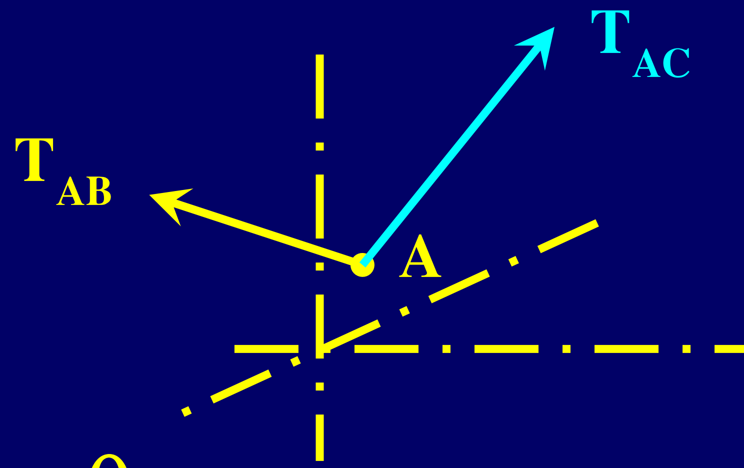
คือ Direction Cosine ของแต่ละแนวเส้น

$d_X/d = \cos\theta_X$

$d_Y/d = \cos\theta_Y$

$d_Z/d = \cos\theta_Z$

ตัวอย่าง 2.14



$$T_{ABX} = \cos\theta_X(T_{AB}) = (-1.2 / 12.86)T_{AB} = -0.0933T_{AB}$$

$$T_{ACX} = \cos\theta_X(T_{AC}) = (-1.2 / 14.19)T_{AC} = -0.0846T_{AC}$$

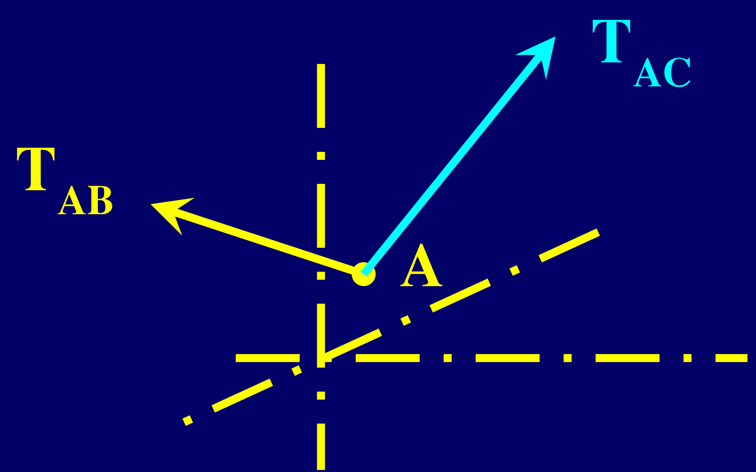
$$T_{ABY} = \cos\theta_Y(T_{AB}) = (10 / 12.86)T_{AB} = +0.778T_{AB}$$

$$T_{ACY} = \cos\theta_Y(T_{AC}) = (10 / 14.19)T_{AC} = +0.705T_{AC}$$

$$T_{ABZ} = \cos\theta_Z(T_{AB}) = (8 / 12.86)T_{AB} = +0.622T_{AB}$$

$$T_{ACZ} = \cos\theta_Z(T_{AC}) = (-10 / 14.19)T_{AC} = -0.705T_{AC}$$

ตัวอย่าง 2.14



$T_{ABX} = -0.0933T_{AB}$

$T_{ACX} = -0.0846T_{AC}$

$T_{ABY} = +0.778T_{AB}$

$T_{ACY} = +0.705T_{AC}$

$T_{ABZ} = +0.622T_{AB}$

$T_{ACZ} = -0.705T_{AC}$

$$\overline{T}_{AB} = (-0.0933T_{AB})i + (+0.778T_{AB})j + (+0.622T_{AB})k$$

$$\overline{T}_{AC} = (-0.0846T_{AC})i + (+0.705T_{AC})j + (-0.705T_{AC})k$$

ตัวอย่าง 2.14

$$\overline{T}_{AB} = (-0.0933T_{AB})i + (+0.778T_{AB})j + (+0.622T_{AB})k$$

$$T_{AC} = (-0.0846T_{AC})i + (+0.705T_{AC})j + (-0.705T_{AC})k$$

$$\overline{W} = (0)i + (W)j + (0)k$$

$$\overline{P} = (-1962N)i + (0)j + (0)k$$

จากเงื่อนไขสภาวะสมดุล ; $\overline{T}_{AB} + \overline{T}_{AC} + \overline{P} + \overline{W} = 0$

แทนค่า Vector ทั้งหมด รวมกลุ่ม i, j, k

$$[-0.0933T_{AB} - 0.0846T_{AC} + P]\, i$$

$$+[+0.778T_{AB} + 0.705T_{AC} - 1962N]\, j$$

$$+[+0.622T_{AB} - 0.705T_{AC}]\, k = 0$$

ตัวอย่าง 2.14

$$[-0.0933T_{AB} - 0.0846T_{AC} + P]\,\mathbf{i} + [+0.778T_{AB} + 0.705T_{AC} - 1962N]\,\mathbf{j} + [+0.622T_{AB} - 0.705T_{AC}]\,\mathbf{k} = 0$$

จาก i > $F_X = 0$; $\quad -0.0933T_{AB} - 0.0846T_{AC} + P = 0 \quad (1)$

จาก j > $F_Y = 0$; $\quad +0.778T_{AB} + 0.705T_{AC} - 1962 = 0 \quad (2)$

จาก k > $F_Z = 0$; $\quad +0.622T_{AB} - 0.705T_{AC} = 0 \quad (3)$

แก้สมการทั้ง 3 ได้

$P = 235$ N

$T_{AB} = 1401$ N

$T_{AC} = 1236$ N

จบบทที่ 2