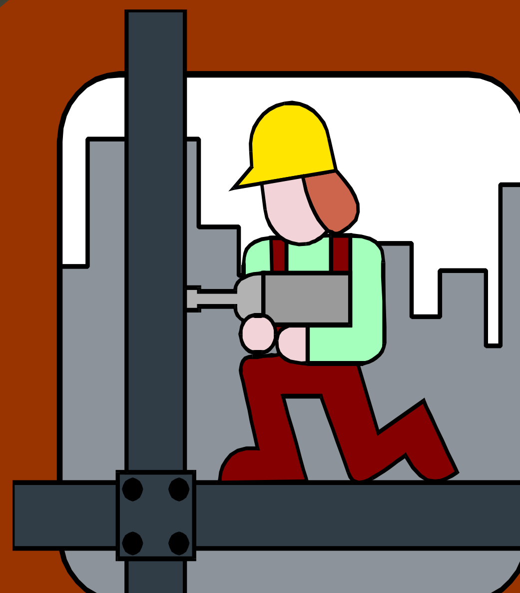
วัตถุคงรูป



บทที่ 3 วัตถุคงรูป : ระบบแรงซึ่งสมมูล

วัตถุคงรูป

หมายถึงวัตถุที่มีขนาด มีความกว้าง ความยาวและความสูง เมื่อถูกกระทำด้วยแรงใด ๆ จะไม่เสียรูป

ระบบแรงซึ่งสมมูล

หมายถึงระบบแรงหลายระบบแรง ที่กระทำต่อวัตถุคงรูปใด ๆ ทำให้เกิดผลสุดท้ายต่อวัตถุคงรูป เหมือนกันทุกประการ

เนื้อหา

3.1 ผลคูณแบบเวคเตอร์ 2 เวคเตอร์
3.2 ผลคูณของเวคเตอร์ ของแรงย่อยซึ่งตั้งฉากกัน
3.3 โมเมนต์ของแรง 1 แรงรอบจุดใด ๆ
3.4 ทฤษฎีของวาริยอง
3.5 โมเมนต์ย่อยในแนวตั้งฉากกันของแรงใด ๆ
3.6 ผลคูณแบบสกาลาร์ของ 2 เวคเตอร์
3.7 Mixed triple product of three vectors
3.8 โมเมนต์ของแรงรอบแกนที่กำหนดให้
3.9 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ
3.10 แรงคู่ควบซึ่งสมมูลกัน
3.11 การรวมแรงคู่ควบ
3.12 แรงคู่ควบอาจแทนได้ด้วยเวคเตอร์

3.13 การแตกแรง 1 แรงใด ๆ ให้เป็นแรง 1 แรง กระทำที่ “O” และแรงคู่ควบ 1 คู่

3.14 การลดระบบแรงซึ่งประกอบด้วยแรงหลายแรง ให้เหลือแรง 1 แรง และแรงคู่ควบ 1 คู่

3.15 ระบบแรงซึ่งสมมูลของแรงหลายแรง

3.16 Equipollent system of vectors

3.17 การลดระบบของแรงในลักษณะอื่น

วัตถุประสงค์

เพื่อให้เข้าใจถึงผลของแรงในลักษณะ ๆต่าง ที่เกิดกับวัตถุคงรูป และระบบแรงหลายระบบที่สมมูลกันจนใช้แทนกันได้

บทที่ 3 วัตถุคงรูป : ระบบแรงซึ่งสมมูล

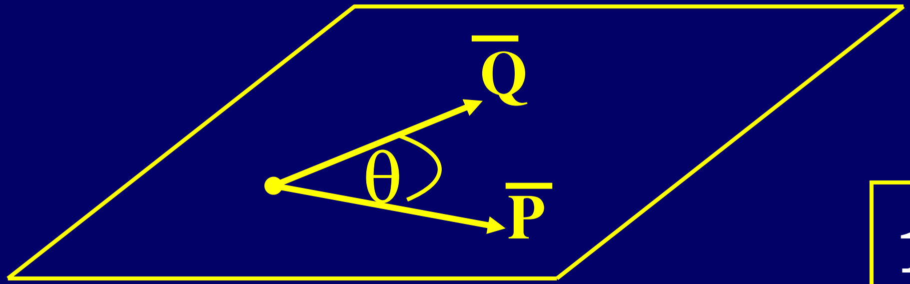
ระบบแรงซึ่งสมมูล

- ระบบแรงซึ่งสามารถแทนระบบแรงอีกระบบหนึ่งได้
- ผลที่เกิดต่อวัตถุคงรูปเหมือนกันทุกประการ
- ทั้ง ลักษณะ ขนาด ทิศทาง

3.1 ผลคูณแบบเวคเตอร์ของ 2 เวคเตอร์

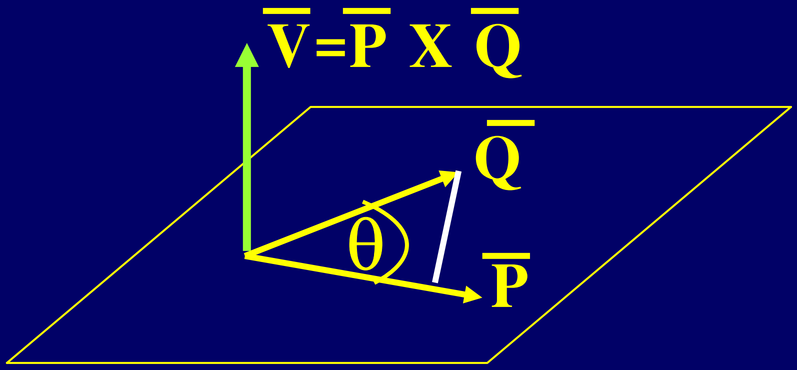
$$\overline{V} = \overline{P}\ X\ \overline{Q}$$

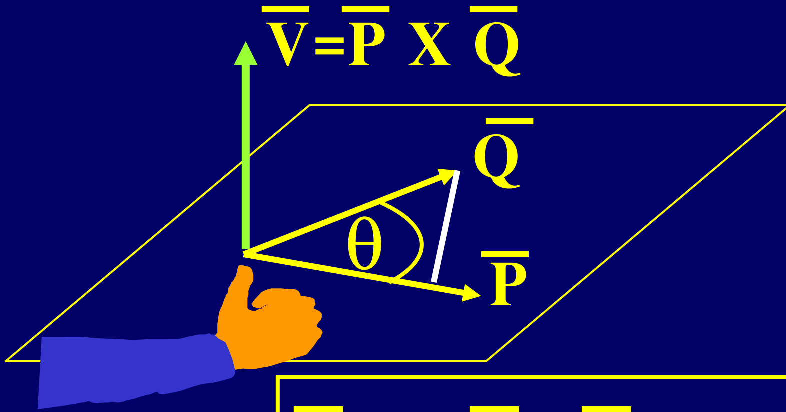
$$V = P \times Q\ (\sin\theta)$$



เมื่อเวคเตอร์ Vเป็นผลคูณ
ของเวคเตอร์ P และ Q
จะมีเงื่อนไขดังนี้

1. แนวของ V
จะตั้งฉากกับระนาบของ P และ Q



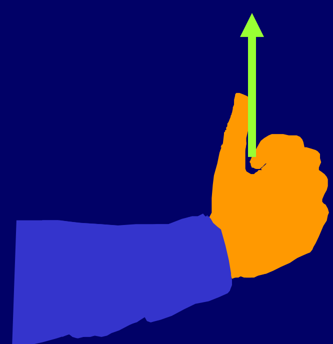


$\overline{V} = \overline{P} \text{ X } \overline{Q}$

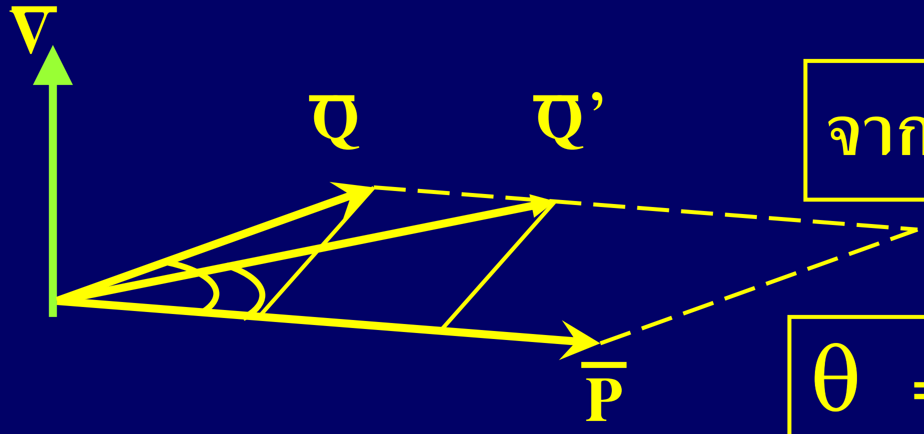
$V = P \times Q \ (\sin\theta)$

2. ขนาดของ V จะเท่ากับ ผลคูณของ P และ Q และค่า sin ของมุม ระหว่าง P กับ Q

(ค่ามุมระหว่างเวคเตอร์ 2 เวคเตอร์นี้ จะ ฃ 180ฐ เสมอ)



3. ทิศทางของ V หาได้จากกฎมือขวา



จากสมการ V = P x Q(sinθ)

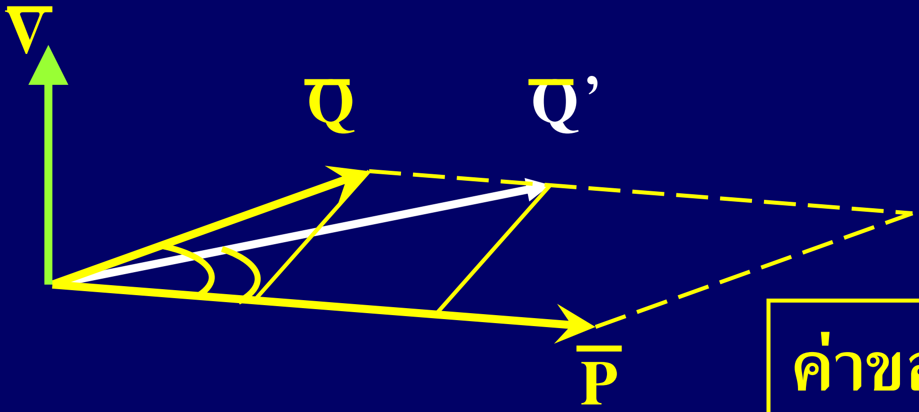
θ = 0ฐ หมายถึง P และ Q ทับกัน หรืออยู่ในแนวเดียวกัน

θ = 180ฐ หมายถึง P และ Q อยู่ตรงข้ามกันในแนวเดียวกัน

ค่า sin0ฐ และ sin180ฐ เท่ากับ 0

V = P x Q(sin 0) = 0

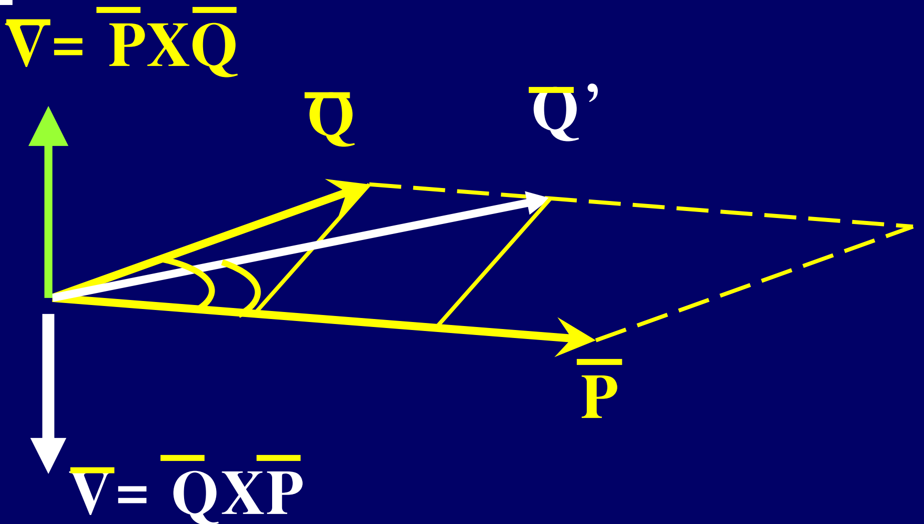
นั่นคือ Vector ที่อยู่ในแนวเดียวกัน (Collinear) คูณกัน จะเท่ากับ 0



ค่าของ V ก็คือพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่เกิดจากผลคูณของ P กับ Q นั่นเอง

และถ้า Q เคลื่อนที่ไปตามเส้นกรอบสี่เหลี่ยมนี้ ค่า V จะเท่าเดิม

$$\overline{V} = \overline{P} \times \overline{Q} = \overline{P} \times \overline{Q'}$$



จากกฎมือขวา
หากสลับตัวคูณ
ทิศทาง V จะกลับตรงกันข้าม

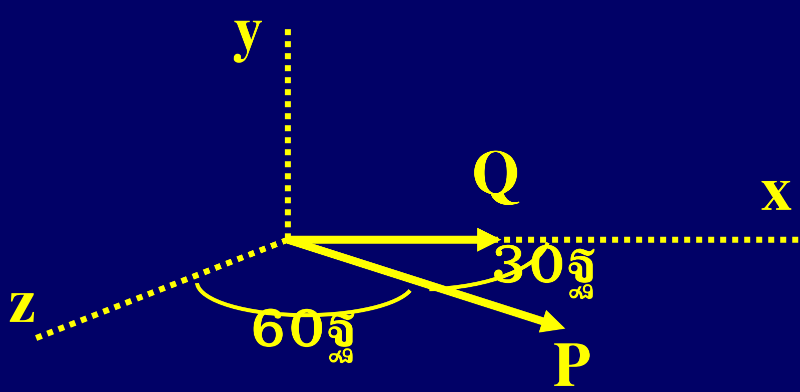
$\overline{P}\ X\ \overline{Q} = \overline{V}$

$\overline{Q}\ X\ \overline{P} = -\overline{V}$

การกระจาย $\overline{P}\ X\ (\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2) = (\overline{P}\ X\ \overline{Q}_1) + (\overline{P}\ X\ \overline{Q}_2)$

การเปลี่ยนหมู่ ทำไม่ได้ $(\overline{P}\ X\ \overline{Q})\ X\ \overline{S}$ น $\overline{P}\ X\ (\overline{Q}\ X\ \overline{S})$

ตัวอย่าง



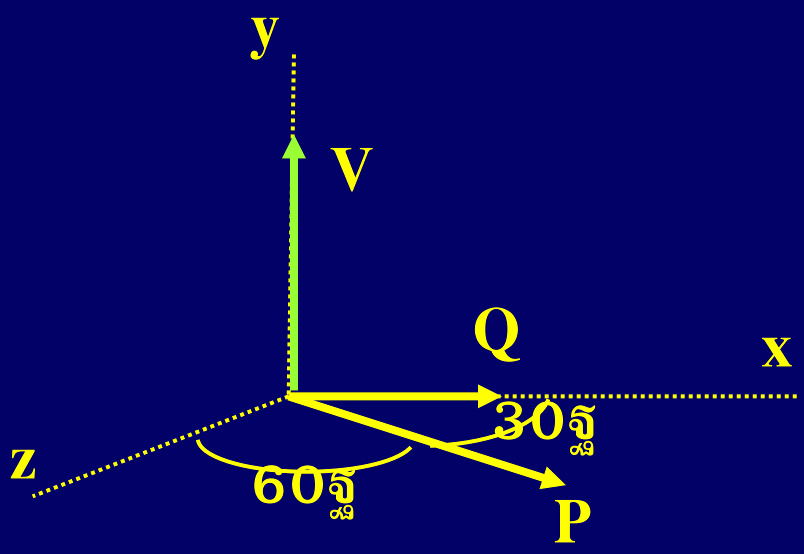
P มีขนาด = 6

Q มีขนาด = 4

P อยู่ในระนาบ X–Z

ทำมุมกับแกน X เท่ากับ 30ฐ

Q มีทิศทางในแนวแกน X



$$\overline{V} = \overline{P} \times \overline{Q}$$

$\overline{V}$ จะตั้งฉากกับ $\overline{P}$ และ $\overline{Q}$

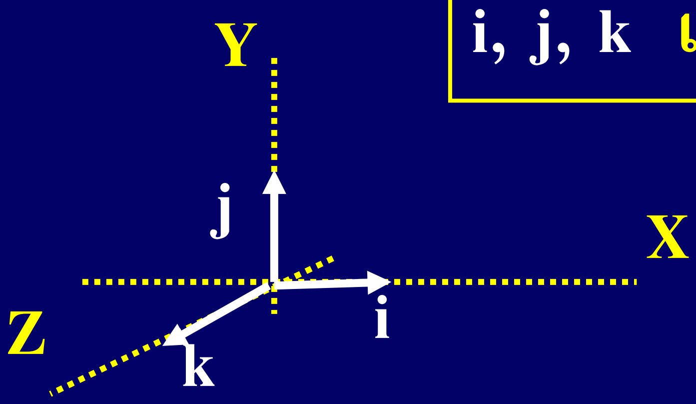
$\overline{V}$ จึงอยู่ในแนวของแกน Y มีทิศทางชี้ขึ้นตาม Y+

ขนาดของ V

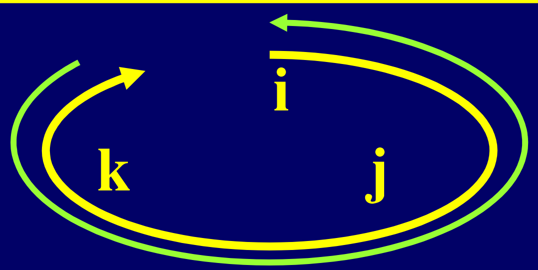
$$V = PQ\sin 30$$

$$V = (6)(4)(0.5) = 12$$

3.2 ผลคูณแบบเวคเตอร์เมื่อแสดงอยู่ในรูปแรงย่อยซึ่งตั้งฉากกัน



i, j, k เป็น Unit Vector ในแกน X, Y, Z



การคูณเวคเตอร์ จะได้

$i \times i = 0$	$i \times j = k$	$j \times i = -k$
$j \times j = 0$	$j \times k = i$	$i \times k = -j$
$k \times k = 0$	$k \times i = j$	$k \times j = -i$

$$\overline{P} = P_X i + P_Y j + P_Z k$$

$$\overline{Q} = Q_X i + Q_Y j + Q_Z k$$

$$\overline{V} = \overline{P} \times \overline{Q} = (P_X i + P_Y j + P_Z k) \times (Q_X i + Q_Y j + Q_Z k)$$

$$\begin{aligned}\overline{V} = {} & P_X i \times (Q_X i + Q_Y j + Q_Z k) + \\ & P_Y j \times (Q_X i + Q_Y j + Q_Z k) + \\ & P_Z k \times (Q_X i + Q_Y j + Q_Z k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{V} = {} & [\, 0 + (P_X Q_Y)k - (P_X Q_Z)j \,] + \\ & [\, -(P_Y Q_X)k + 0 + (P_Y Q_Z)i \,] + \\ & [\, (P_Z Q_X)j - (P_Z Q_Y)i + 0 \,]\end{aligned}$$

$$\overline{V} = [\ 0+(P_XQ_Y)k-(P_XQ_Z)j\ ]+[\ -(P_YQ_X)k+0+(P_YQ_Z)i\ ]+[\ (P_ZQ_X)j-(P_ZQ_Y)i+0\ ]$$

รวมกลุ่ม i, j, k

$$\boxed{\overline{V} = (P_YQ_Z - P_ZQ_Y)i + (P_ZQ_X - P_XQ_Z)j + (P_XQ_Y - P_YQ_X)k}$$

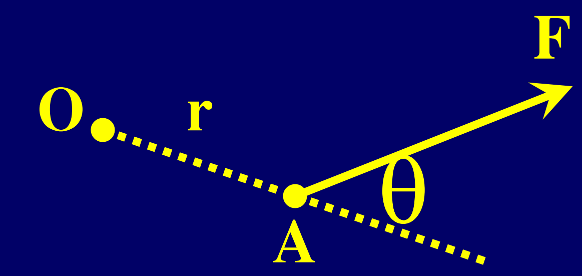
ขนาดแรงย่อย V ในแนวแกน X, Y, Z ก็คือ

$V_X = P_YQ_Z - P_ZQ_Y$ ส.ป.ส ของ i

$V_Y = P_ZQ_X - P_XQ_Z$ ส.ป.ส. ของ j

$V_Z = P_XQ_Y - P_YQ_X$ ส.ป.ส. ของ k

3.3 โมเมนต์ของแรง 1 แรง รอบจุดใดจุดหนึ่ง

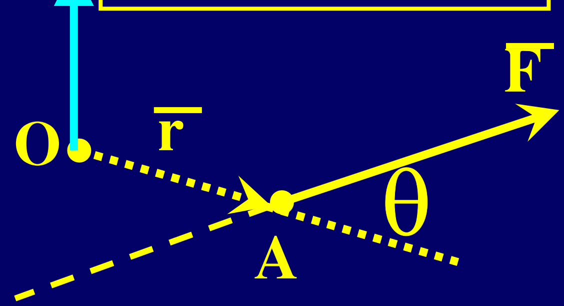


แรง F กระทำที่จุด A

พิจารณาโมเมนต์ของแรง F รอบ O

O อยู่ห่าง A เท่ากับ r

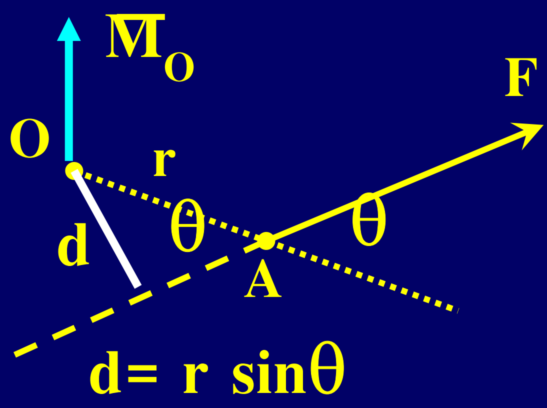
$$\overline{M}_O = \overline{r} \text{ X } \overline{F}$$



F เป็นแรงกระทำที่ A

r เป็น Position Vector ของแรง F

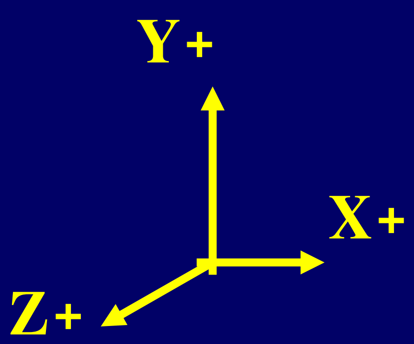
F และ r อยู่ในระนาบเดียวกัน



$\overline{M}_O$ เป็นเวคเตอร์โมเมนต์รอบ O เกิดจาก $\overline{F}$
มีแนวตั้งฉากกับระนาบ $\overline{r}$ และ $\overline{F}$ หรือ
ตั้งฉากกับทั้ง r และ F

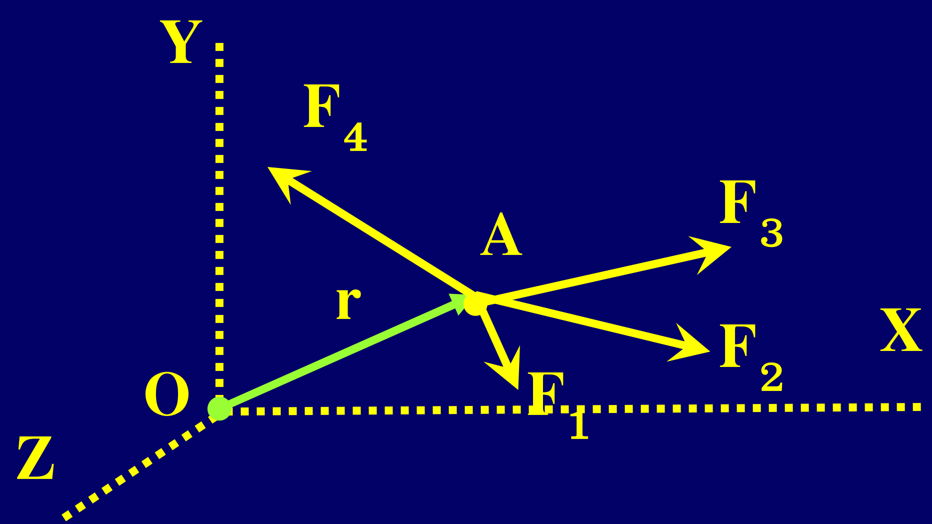
ทิศทางของเวคเตอร์ $\overline{M}_O$ เป็นไปตามกฎมือขวา

ขนาดของ M_O = $F(r \sin\theta)$ = Fd
d คือระยะตั้งฉากจากจุด O มายังแนวแรง F

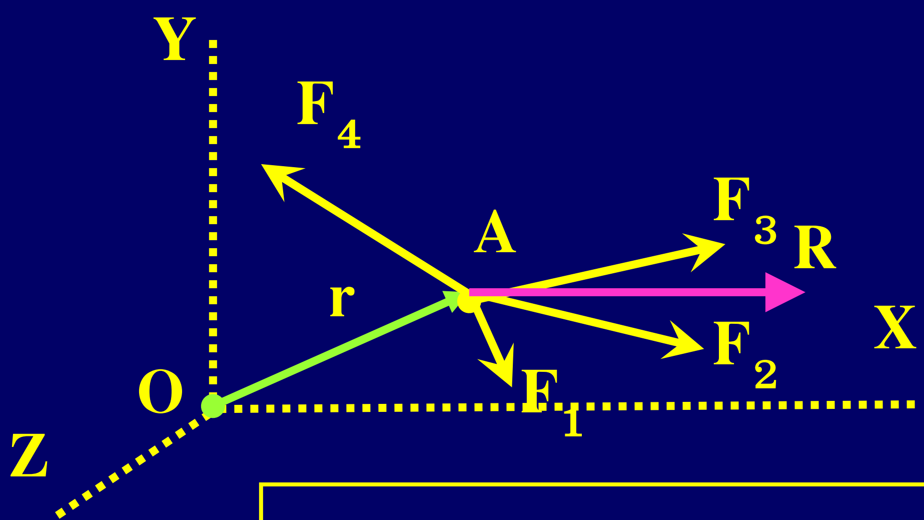


เครื่องหมาย + หรือ – ของโมเมนต์
เป็นไปตามระบบแกนสมมุติ ดังรูป

3.4 ทฤษฎีของวาริยอง Varignon’s Theorem



โมเมนต์ของแรงลัพท์ซึ่งเกิดจาก Concurrent Forces หลายแรงเท่ากับผลรวมของโมเมนต์ของแรงย่อยทั้งหมดรอบจุดเดียวกัน



แรง F_1 , F_2 , F_3 , F_4
กระทำร่วมจุด A
มีค่าแรงลัพท์เท่ากับ R
อยู่ห่างจุด O เท่ากับ r

$$\overline{r} \times \overline{R} = \overline{r} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4)$$

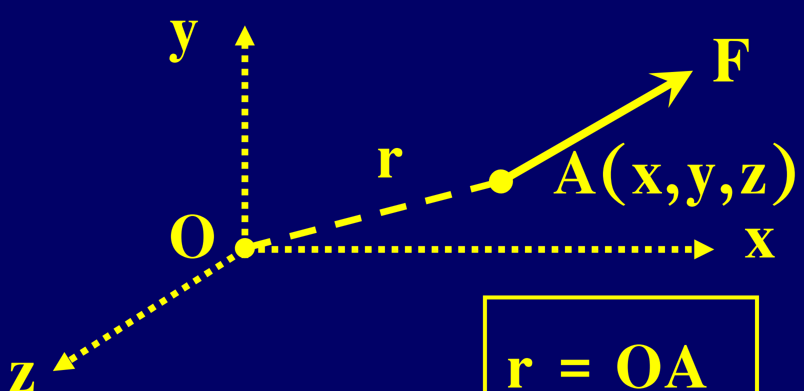
$$= \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2 + \overline{r} \times \overline{F}_3 + \overline{r} \times \overline{F}_4$$

$\overline{r}$ คือ Position Vector ของจุด A

$$\overline{M}_O = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \overline{M}_4$$

3.5 โมเมนต์ย่อยในแนวตั้งฉากกันของแรงใด ๆ

คำว่า แนวของโมเมนต์ หมายถึงทิศทางพุ่งไปของโมเมนต์ หรือเรียกว่า Position Vector ของ โมเมนต์



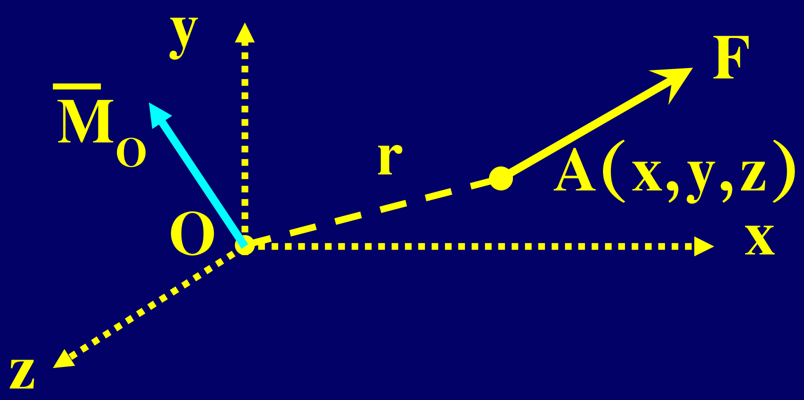
แรง F กระทำที่จุด A ใน 3 มิติ

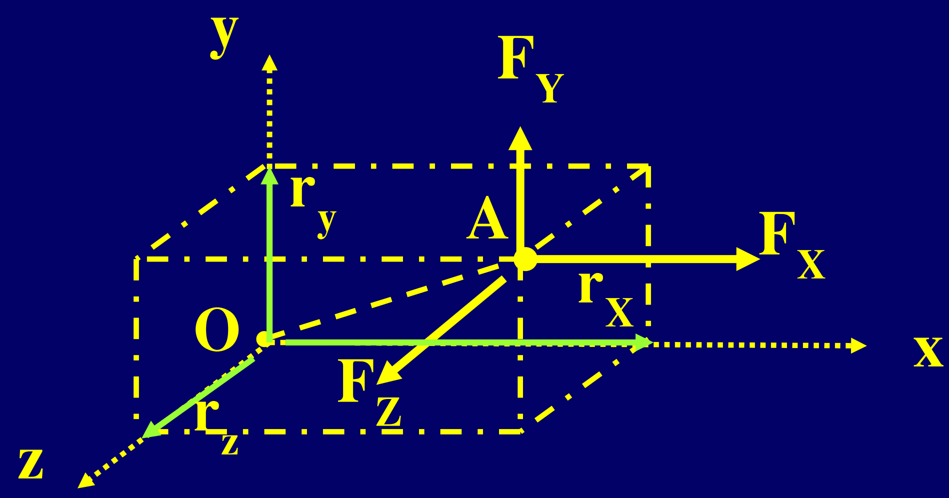
r = OA

พิกัดจุด A(x,y,z)

แตกแรง F ให้อยู่ในแกนทั้งสาม

3.5 โมเมนต์ย่อยในแนวตั้งฉากกันของแรงใด ๆ

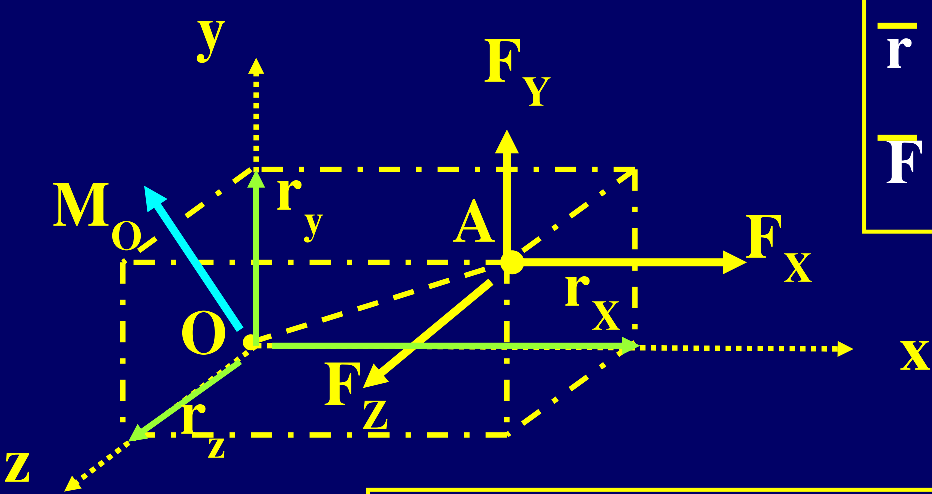




แตกแรง F ให้อยู่ในแกนทั้งสาม	F_X, F_Y, F_Z
แตกระยะ r ให้อยู่ในแกนทั้งสาม	$r_X = X$, $r_Y = Y$, $r_Z = Z$

$$\overline{r} = Xi + Yj + Zk$$

$$\overline{F} = F_X\, i + F_Y\, j + F_Z\, k$$



$$\bar{r} = Xi + Yj + Zk$$

$$\bar{F} = F_X\, i + F_Y\, j + F_Z\, k$$

จากสมการ $\bar{M}_O = \bar{r} \; X \; \bar{F}$

$$\bar{M}_O = (Xi + Yj + Zk)\; X\; (F_X\, i + F_Y\, j + F_Z\, k)$$

$$= (YF_Z - ZF_Y)\, i + (ZF_X + XF_Z) j + (XF_Y - YF_X)\, k$$

Determinant

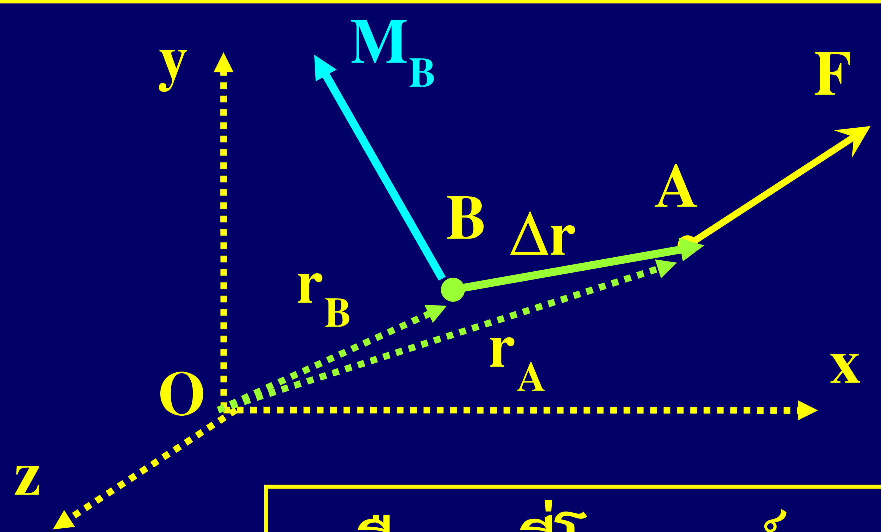
$$\bar{M}_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & Z \\ F_X & F_Y & Y_Z \end{vmatrix}$$

$$M_X = YF_Z - ZF_Y$$

$$M_Y = ZF_X + XF_Z$$

$$M_Z = XF_Y - YF_X$$

กรณีโมเมนต์เกิดขึ้นรอบจุดใด ๆ ที่ไม่ใช่จุด Origin



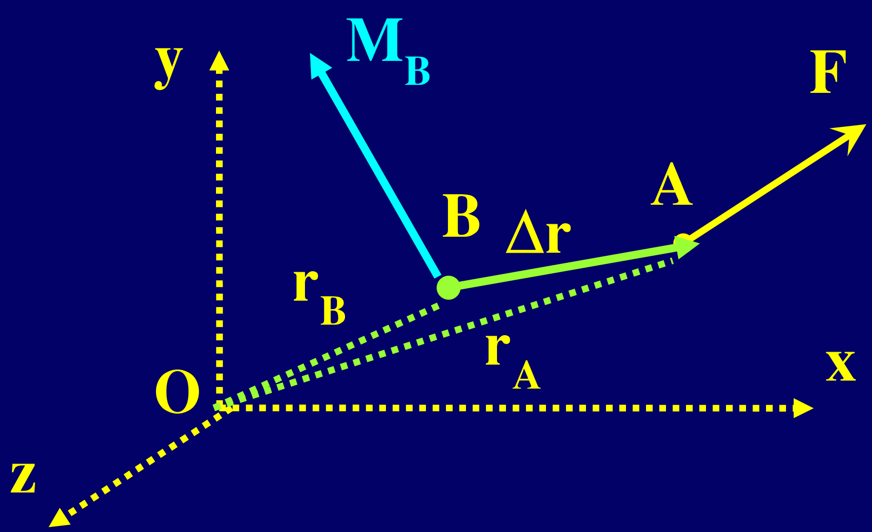
B คือจุดที่โมเมนต์จากแรง F หมุนรอบ

Δr คือระยะจาก B ไป A

M_B คือค่าโมเมนต์ที่หมุนรอบ B

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_A - \bar{r}_B$$

กรณีโมเมนต์เกิดขึ้นรอบจุดใด ๆ ที่ไม่ใช่จุด Origin



พิกัด จุด A และ จุด B คือ

$A(X_A, Y_A, Z_A)$

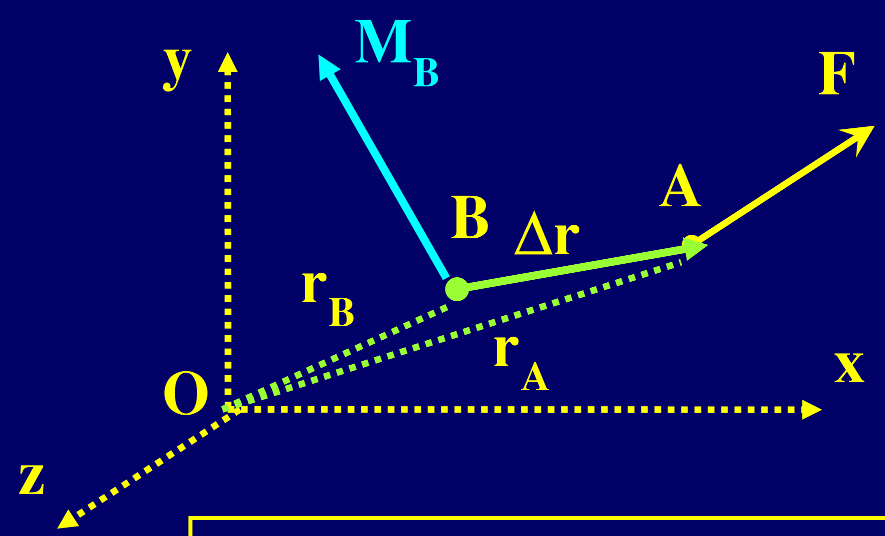
$B(X_B, Y_B, Z_B)$

$$\Delta X = X_A - X_B$$
$$\Delta Y = Y_A - Y_B$$
$$\Delta Z = Z_A - Z_B$$

เวคเตอร์ย่อยของ เวคเตอร์ Δr

$$\Delta\bar{r} = \Delta Xi + \Delta Yj + \Delta Zk$$

กรณีโมเมนต์เกิดขึ้นรอบจุดใด ๆ ที่ไม่ใช่จุด Origin



$$\overline{M}_B = \overline{\Delta r} \times \overline{F} = (\overline{r}_A - \overline{r}_B) \times \overline{F}$$

$$\overline{\Delta r} = \overline{r}_A - \overline{r}_B$$

$$\overline{\Delta r} = \Delta X i + \Delta Y j + \Delta Z k$$

$$\overline{M}_B = \overline{\Delta r} \times \overline{F} = (\Delta X i + \Delta Y j + \Delta Z k) \times (F_X i + F_Y j + F_Z k)$$

$$\overline{M}_B = (\Delta Y F_Z - \Delta Z F_Z) i + (\Delta X F_Z - \Delta Z F_X) j + (\Delta X F_Y - \Delta Y F_X) k$$

determinant

$$\overline{M}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta X & \Delta Y & \Delta Z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix}$$

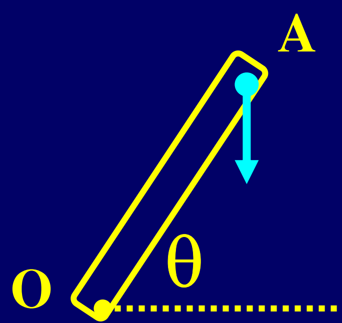
ระบบแรงซึ่งสมมูล

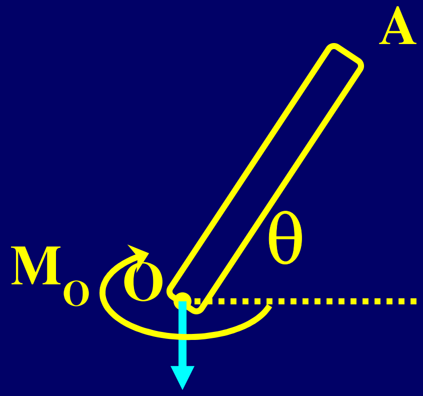
แรงซึ่งสมมูล

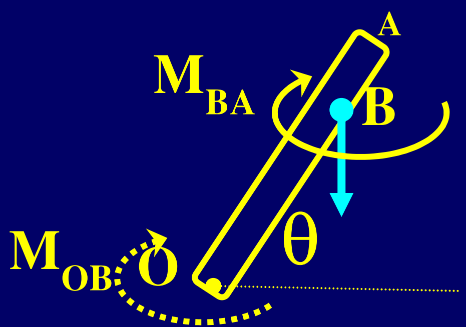
คือ แรงใด ๆ ณ ตำแหน่งใหม่ ที่ทำให้เกิดผลต่อวัตถุ เหมือนกับแรงเดิม

ด้วยเงื่อนไข

1. **ขนาดเท่าเดิม**
2. **ทิศทางเดียวกัน**
3. **โมเมนต์รอบจุดใด ๆ เท่ากัน**







ระบบแรงดั้งเดิม

มีแรงกระทำที่ A

100 N ลงแนวดิ่ง

M รอบจุด O

M_O = M_{OA}

M_{OA} คือ M ที่เกิด

จากแรง 100N

กระทำที่ A

แรงสมมูล 1

ที่ O มีแรงดิ่งลง

100N

มีโมเมนต์ที่ O=M_O

และมี M_O= M_{OA}

แรงสมมูลลักษณะ 2

แรง 100N ดิ่งลงที่ B

มีโมเมนต์อยู่ด้วย = M_{BA}

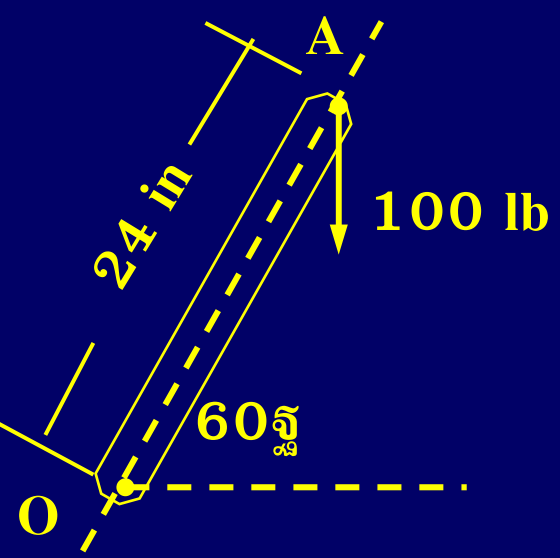
และที่O ก็มีโมเมนต์= M_{OB}

โมเมนต์รวมที่ O

M_O=M_{BA}+M_{OB} = M_{OA}

ตัวอย่าง 3.1

ข้อมูล   แรง 100 lb กระทำต่อวัตถุดังรูป



ปัญหา

a) หาโมเมนต์จากแรง 100 lb ที่ O

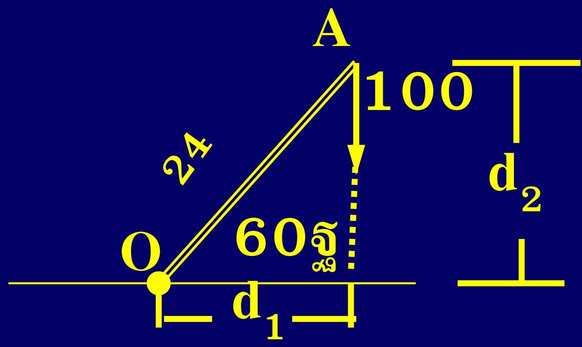
b) หาขนาดของแรงในแนวนอนที่ A
ซึ่งทำให้เกิดโมเมนต์รอบ O เท่าเดิม

c) แรงที่น้อยที่สุดซึ่งกระทำที่ A
แล้วเกิดโมเมนต์รอบ O เท่าเดิม

d) แรงแนวดิ่ง 240 lb กระทำห่าง O
เท่าใด จึงจะเกิดโมเมนต์รอบ O เท่าเดิม

e) มีระบบแรงใดบ้างจากข้อ b) ถึง d)
ที่มีลักษณะสมมูลกับระบบแรงในข้อ a)

ตัวอย่าง 3.1

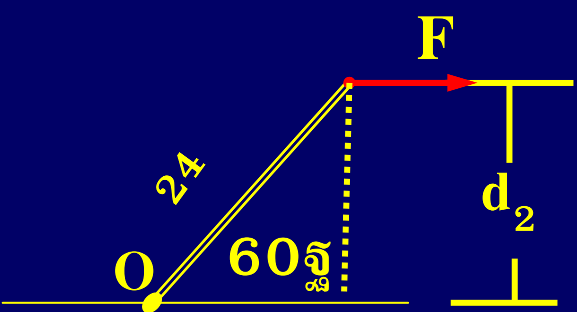


a) หาโมเมนต์ที่จุด O ; Mo

d_1 = 24(cos60ฐ) = 12 in

M_O = F.d_1=(100lb)(12in) = 1200 lbฐ in

b)หาค่าแรง F ที่ทำให้ Mo เท่าเดิม



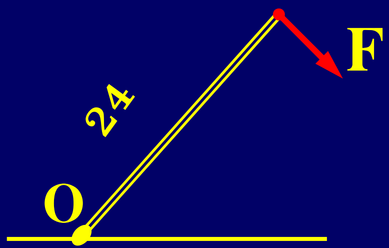
d_2 = (24)(sin60ฐ) = 20.8 in

M_O = F d_2 = (F)(20.8in) = 1200 lbฐ in

F = 57.5 lb

ตัวอย่าง 3.1

c) แรง F น้อยที่สุด เกิดโมเมนต์เท่าเดิม

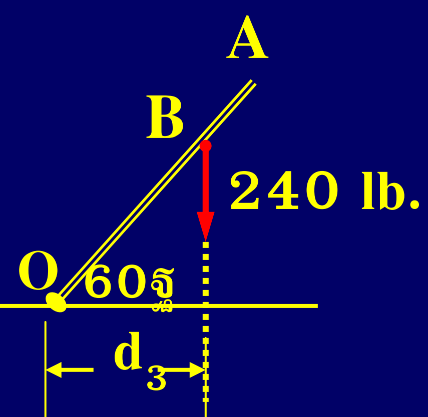


แรง F น้อยที่สุดเมื่อ F ตั้งฉากกับ OA ; d=24

M_O = F d = (F)(24) = 1200 lbฐ in

F = 50 lb

d)หาตำแหน่งแรง 240 lb. ที่เกิด Mo เท่าเดิม



M_O = F d_3 = (240)(d_3) = 1200 lbฐ in

d_3 = 5 in ; OB = d_3 /cos 60ฐ = 10 in

e) มีระบบแรงใดสมมูลกับข้อ a) หรือไม่

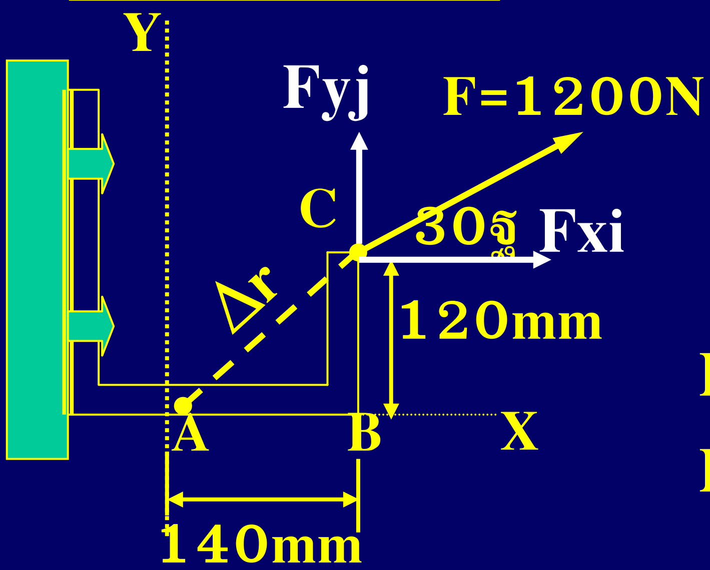
ไม่มีระบบแรงใดสมมูลกับ ข้อ a)

เพราะถึงแม้ค่าโมเมนต์เท่าเดิม แต่ลักษณะแรง F ไม่เหมือนกัน

ตัวอย่าง 3.2

ข้อมูล แรง 1200 N กระทำต่อ Bracket ดังรูป

ปัญหา ให้หาโมเมนต์รอบ A



140 mm = 0.14 m

120 mm = 0.12 m

วิธีทำ

แตกแรง

$$F_X = F\cos 30 = 1200(\cos 30) = 1039$$

$$F_Y = F\sin 30 = 1200(\sin 30) = 600$$

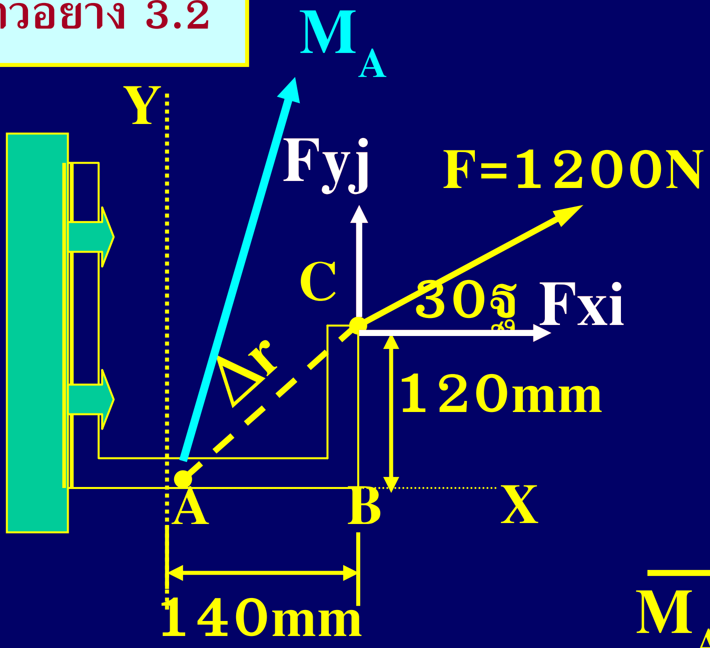
$$\overline{\Delta r} = \Delta X i + \Delta y j$$

$$\boxed{\overline{\Delta r} = (0.14m)i + (0.12m)j}$$

$$\overline{F} = F_X i + F_Y j$$

$$\boxed{\overline{F} = (1039)i + (600)j}$$

ตัวอย่าง 3.2



$$\overline{\Delta r} = (0.14m)i + (0.12m)j$$

$$\overline{F} = (1039)i + (600)j$$

$$\overline{M}_A = \overline{\Delta r} \ X \ \overline{F}$$

$$\overline{M}_A = [\ (0.14m)i + (0.12m)j\ ]\ X\ [\ (1039N)i + (600N)j\ ]$$

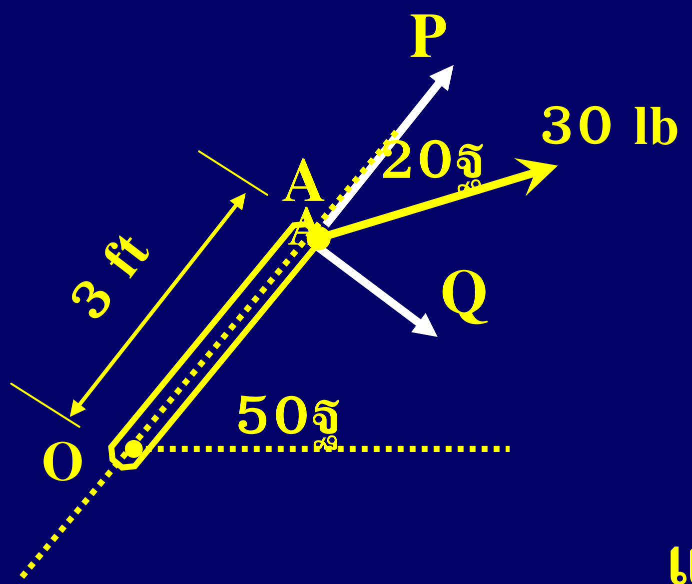
$$\overline{M}_A = (84.0\ N\ ฐ\ m)k - (124.7\ N\ ฐ\ m)k$$

$$\overline{M}_A = -(40.7\ N\ ฐ\ m)k$$

$$M_A = 40.7\ \ N\ ฐ\ m$$

ตัวอย่าง 3.3

ข้อมูล แรง 30 lb กระทำที่ A



ปัญหา หาโมเมนต์ของแรงนี้รอบจุด O

วิธีทำ

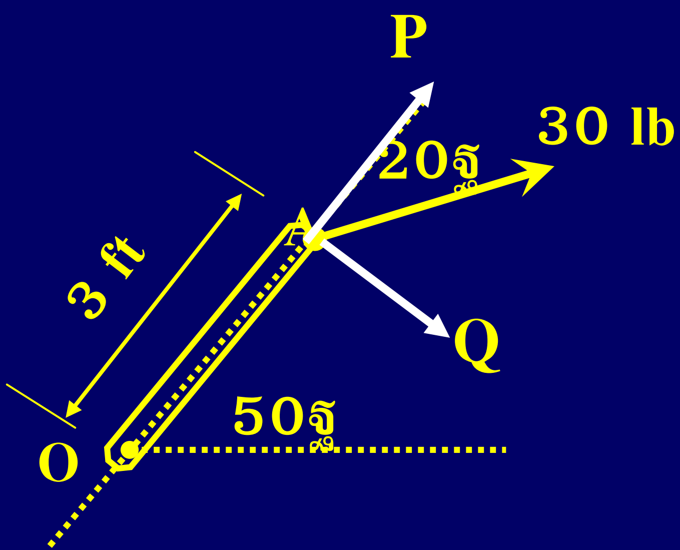
ตั้งแกนโดยให้ Y อยู่ในแนว OA

แตกแรง 30 lb. ให้เป็นแรงคู่ฉาก P,Q

P = 30cos20ฐ = 18.8 lb

Q = 30sin20ฐ = 10.26 lb

ตัวอย่าง 3.3



$M_O = Fd$

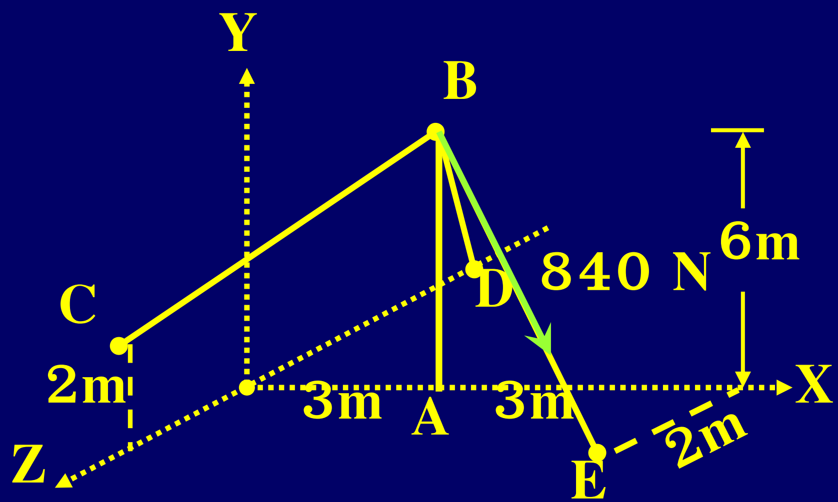
$M_O = P(0) + Q(3)$

$M_O = 10.26(3) = 30.8$ lbฐft

ดูจากรูป ทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกา เครื่องหมายเป็น –

โมเมนต์รอบจุด O จากแรง 30 lb เท่ากับ 30.8 lb.ฐft

ตัวอย่าง 3.4



ข้อมูล

เสา AB ยาว 6 ม

ยึดด้วยลวด 3 เส้น BC,BD,BE

แรงเกิดจากลวด BE = 840 N

ปัญหา

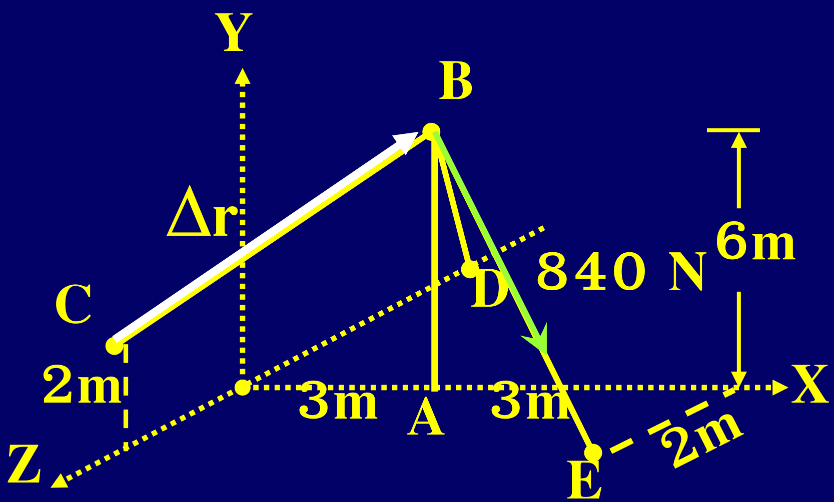
ให้หาโมเมนต์รอบจุด C

ซึ่งเกิด จากแรงดึงในลวด BE

ตัวอย่าง 3.4

วิธีทำ

จาก $\bar{M}_C = \bar{\Delta r} \times \bar{F}$



$\bar{\Delta r}$ คือระยะ CB

หา $\bar{\Delta r}$ จาก พิกัด B และ C

B(3,6,0) ; C(0,2,3)

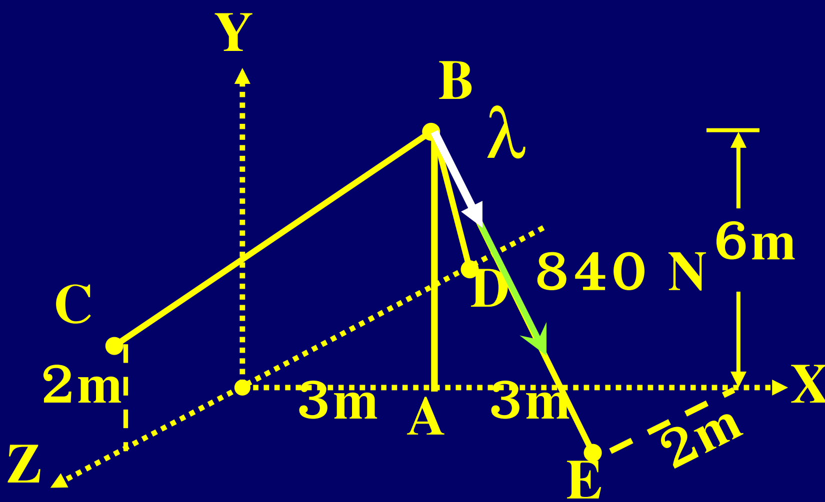
$\Delta x = 3-0 \quad \Delta y = 6-2 \quad \Delta z = 0-3$

$\bar{\Delta r} = (\Delta x)i + (\Delta y)j + (\Delta z)k$

$\bar{\Delta r} = 3i + 4j + (-3)k$

ตัวอย่าง 3.4

ทำแรง F(840) ให้เป็นเวคเตอร์ โดยอาศัย แนวเส้น BE จากพิกัด B และ E : B(3,6,0) ; E(6,0,2)



เวคเตอร์ $\overline{BE} = 3i - 6j + 2k$

ความยาว BE $= \sqrt{3^2+6^2+2^2} = 7$ m

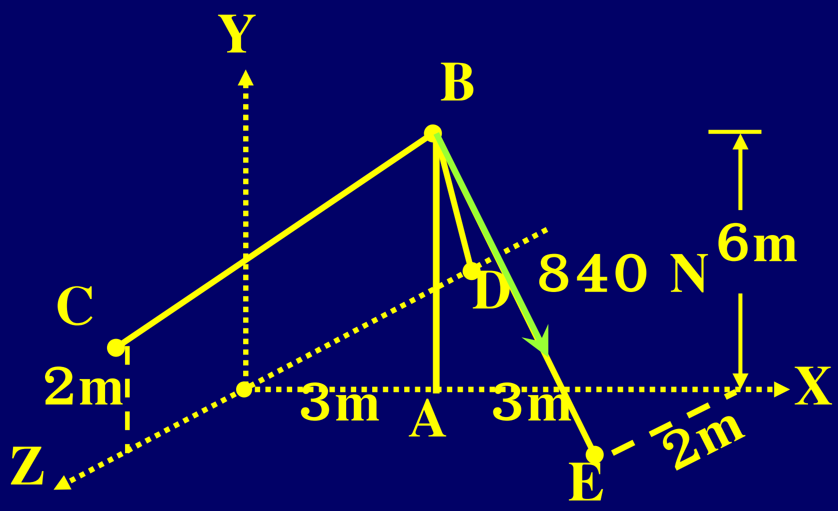
Unit Vector BE; $\bar{\lambda} = \overline{BE}/BE$

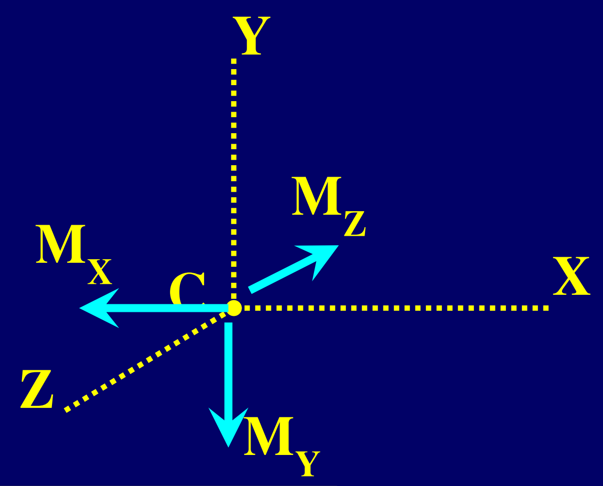
$\overline{F} = F(\text{Unit vector BE}) = F(\lambda)$

$\overline{F} = 840\ [\ (3i - 6j + 2k)/7\ ]$

$\overline{F} = 360i - 720j + 240k$

ตัวอย่าง 3.4





$\Delta\bar{r} = 3i + 4j + (-3)k$

$\bar{F} = 360i - 720j + 240k$

$\bar{M}_C = \Delta\bar{r} \text{ X } \bar{F} = (3i + 4j -3)k) \text{ X } (360i - 720j + 240k)$

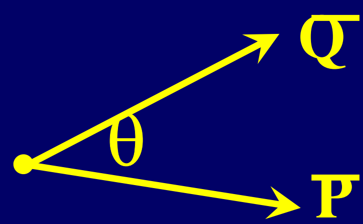
$\bar{M}_C = -(1200)i - (1800)j - (3600)k$

$M_X = -$ 1200 N ฐ m

$M_Y = -$ 1800 N ฐ m

$M_Z = -$ 3600 N ฐ m

3.6 ผลคูณแบบสกาลาร์ ของ 2 เวคเตอร์



$\overline{P} \cdot \overline{Q} = PQ\cos\theta$ **Dot product**

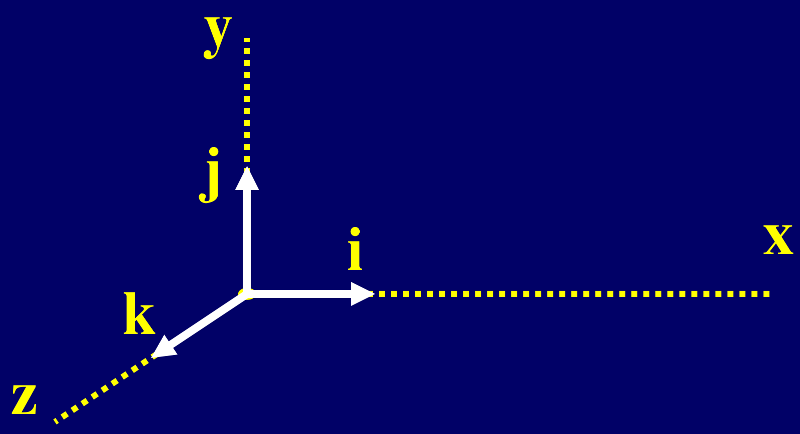
คุณลักษณะที่สำคัญ

1. สลับที่กันได้ $\overline{P} \cdot \overline{Q} = \overline{Q} \cdot \overline{P}$

2. กระจายเทอมได้ $\overline{P} \cdot (\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2) = \overline{P} \cdot \overline{Q}_1 + \overline{P} \cdot \overline{Q}_2$

3. ไม่สามารถจัดกลุ่มได้ $(\overline{P} \cdot \overline{Q}) \cdot \overline{S}$ ไม่มีความหมาย
เนื่องจากเมื่อ $(\overline{P} \cdot \overline{Q})$ แล้วเป็นค่าสกาลาร์ dot กับ $\overline{S}$ ไม่ได้

Dot product ของ Unt vector ในแกนทั้ง 3 จะเป็นดังนี้

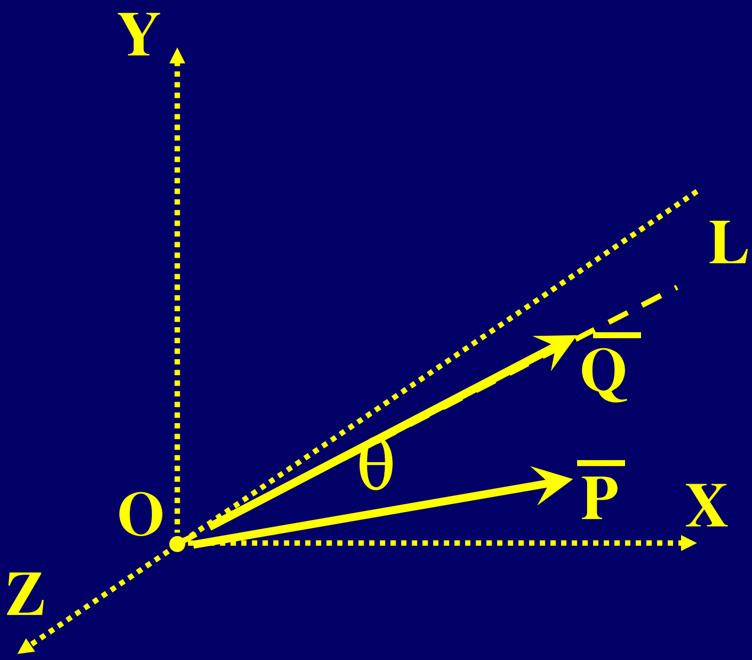


i . i = 1	i . K = 0
j . j = 1	j . K = 0
k . k = 1	k . i = 0

ทั้งนี้เพราะ

แกนทับกัน	แกนตั้งฉากกัน
θ = 0	θ= 90
cos0ฐ = 1	cos90ฐ = 0

การนำมาประยุกต์ใช้



1. หาค่ามุมระหว่างเวคเตอร์

$$\overline{P} = P_X i + P_Y j + P_Z k$$

$$\overline{Q} = Q_X i + Q_Y j + Q_Z k$$

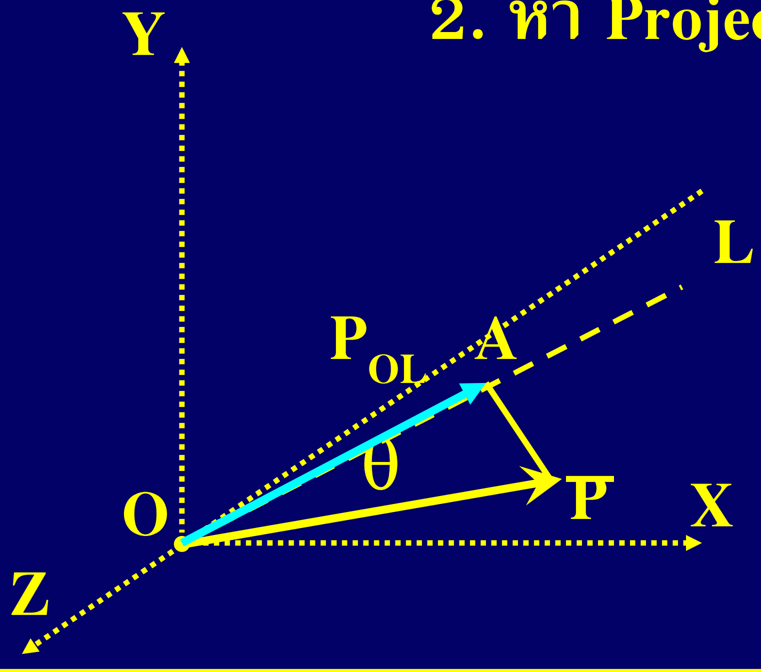
$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = PQ\cos\theta$$
$$= P_X Q_X + P_Y Q_Y + P_Z Q_Z$$

$$PQ\cos\theta = P_X Q_X + P_Y Q_Y + P_Z Q_Z$$

$$\cos\theta = (P_X Q_X + P_Y Q_Y + P_Z Q_Z)/(PQ)$$

2. หา Projection ของเวคเตอร์บนแกนที่กำหนดให้

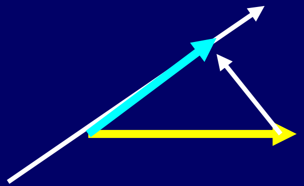
หา Projection ของ P บนแกน OL



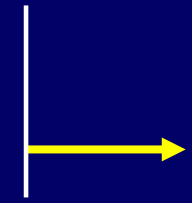
$P_{OL} = P\cos\theta$ [P_{OL} คือ OA]

ทิศทางของเวคเตอร์ตัวใหม่

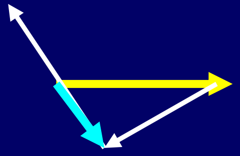
มุม AOP < 90 ทิศทางไปทางเดียวกันกับแนวเส้น



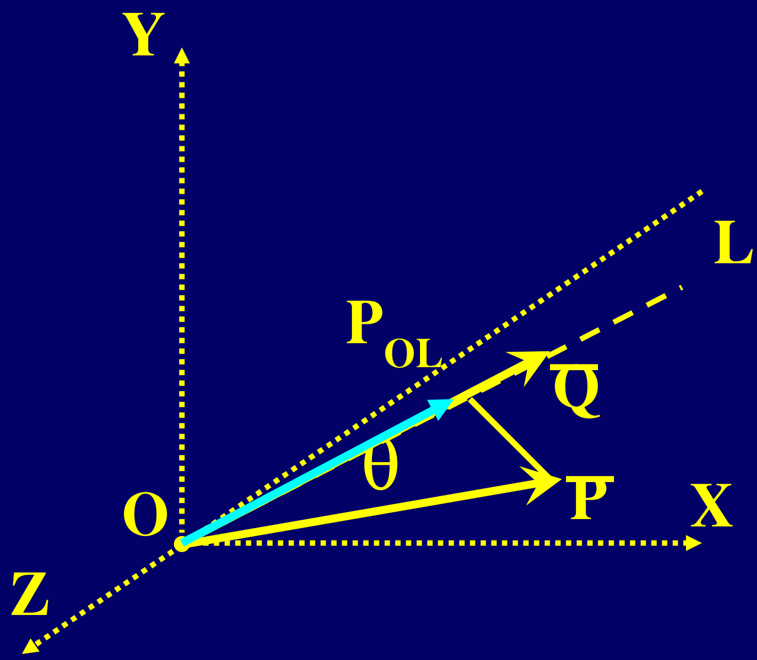
มุม AOP = 90 ค่าเท่ากับ 0



มุม AOP > 90 ทิศทางตรงกันข้ามกับแนวเส้น



การนำมาประยุกต์ใช้



$$\overline{P}\cdot\overline{Q} = PQ\cos\theta$$

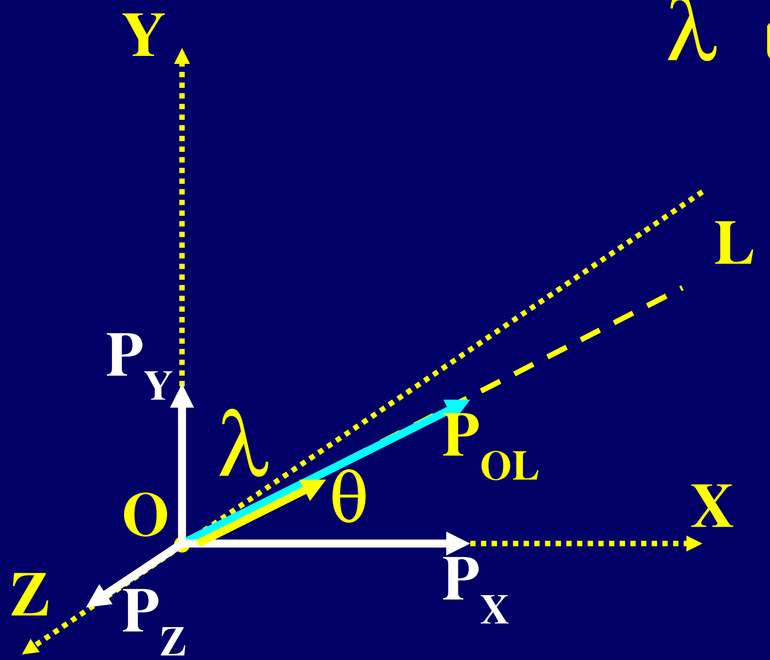
$$\overline{P}\cdot\overline{Q} = (P\cos\theta)Q$$

$$\overline{P}\cdot\overline{Q} = P_{OL}Q$$

$$P_{OL}Q = (\overline{P}\cdot\overline{Q})$$

$$P_{OL} = (\overline{P}\cdot\overline{Q})/Q$$

$$P_{OL} = (P_XQ_X+P_YQ_Y+P_ZQ_Z)/Q$$



λ **เป็น Unit Vector ในแนว OL**

$$\boxed{P_{OL} = \overline{P} \cdot \overline{\lambda}}$$

พิจารณา แกน X,Y,Z

แรงย่อย P คือ P_X, P_Y, P_Z

มุมที่ OL ทำกับแกนคือ $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$

$$\boxed{P_{OL} = P_X \cdot \lambda + P_Y \cdot \lambda + P_Z \cdot \lambda}$$

$$\boxed{P_{OL} = P_X \lambda \cos\theta_X + P_Y \lambda \cos\theta_Y + P_Z \lambda \cos\theta_Z}$$

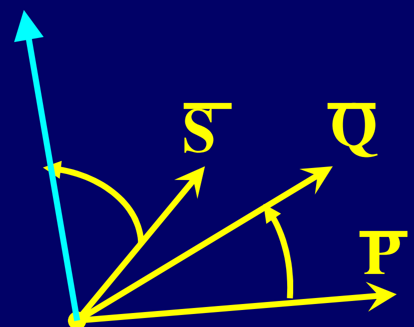
$\boxed{\lambda \text{ มี Magnitude } = 1}$

$$\boxed{P_{OL} = P_X \cos\theta_X + P_Y \cos\theta_Y + P_Z \cos\theta_Z}$$

3.7 การคูณเวคเตอร์แบบผสม

$\overline{S} \cdot (\overline{P} \times \overline{Q})$

$\overline{V} = \overline{P} \times \overline{Q}$



$\overline{P} \times \overline{Q}$ ยังได้ เวคเตอร์ จึง dot กับ $\overline{S}$ ได้ สกาลาร์

เนื่องจาก $\overline{P} \times \overline{Q}$ จะได้เวคเตอร์ $\overline{V}$

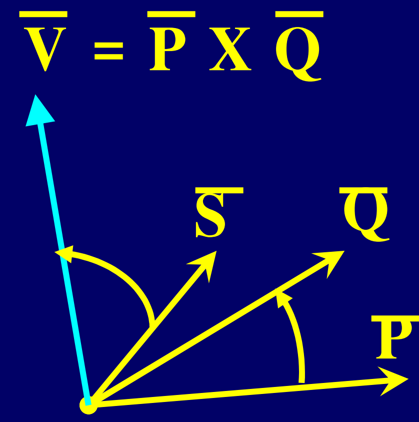
$\overline{V}$ ตั้งฉากกับระนาบที่เกิดจาก $\overline{P}$ กับ $\overline{Q}$

ถ้าหาก $\overline{S}$ อยู่ในระนาบเดียวกับ $\overline{P}$ และ $\overline{Q}$

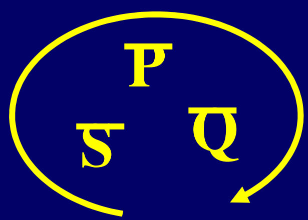
$\overline{S}$ จะตั้งฉากกับ $\overline{V}$ ค่า $\overline{S} \cdot \overline{V}$ ที่ได้จะเป็น 0

เพราะ cos90ฐ = 0 ดังได้กล่าวมาแล้ว

เมื่อพิจารณาผลลัพท์จากการคูณแบบผสม
ซึ่งเป็นสกาลาร์
จะทำให้การจัดรูปแบบการคูณ
เป็นไปได้ 6 รูปแบบ ดังนี้

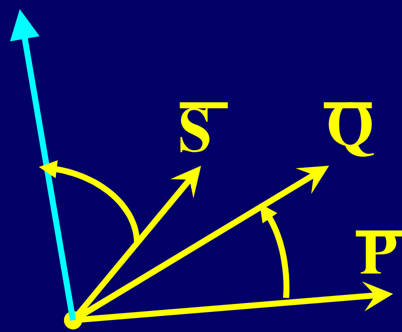


$$\bar{S} \cdot (\bar{P} \times \bar{Q})$$
$$= \bar{P} \cdot (\bar{Q} \times \bar{S})$$
$$= \bar{Q} \cdot (\bar{S} \times \bar{P})$$
$$= -\bar{S} \cdot (\bar{Q} \times \bar{P})$$
$$= -\bar{P} \cdot (\bar{S} \times \bar{Q})$$
$$= -\bar{Q} \cdot (\bar{P} \times \bar{S})$$



3.7 การคูณเวคเตอร์แบบผสม

$$\overline{V} = \overline{P} \times \overline{Q}$$



เมื่อ $\overline{P} \times \overline{Q} = \overline{V}$

$$\overline{S} \cdot (\overline{P} \times \overline{Q}) = \overline{S} \cdot \overline{V}$$

$$\overline{S} = S_X\, i + S_Y\, j + S_Z k$$

$$\overline{V} = V_X\, i + V_Y\, j + V_Z k$$

$$\overline{V} = (P_Y Q_Z - P_Z Q_Y) i + (P_Z Q_X - P_X Q_Z) j + (P_X Q_Y - P_Y Q_X) k$$

จะได้

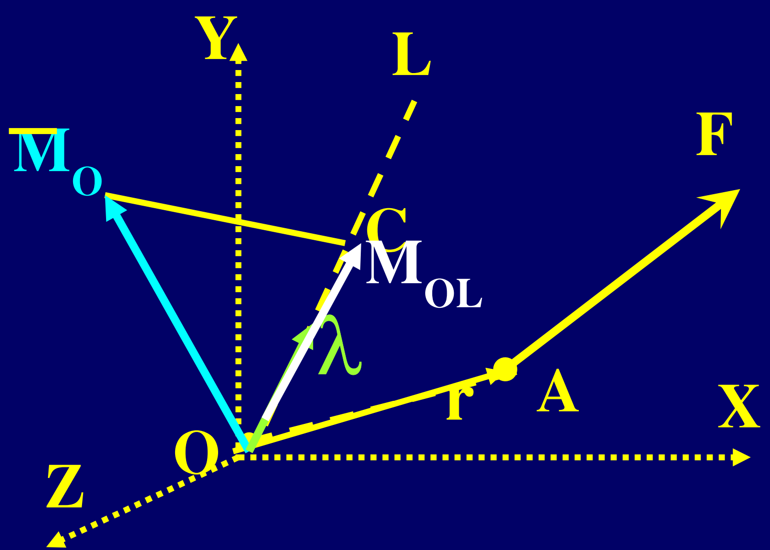
$$\overline{S} \cdot \overline{V} = S_X V_X + S_Y V_Y + S_Z V_Z$$

$$\overline{S} \cdot \overline{V} = S_X (P_Y Q_Z - P_Z Q_Y) + S_Y (P_Z Q_X - P_X Q_Z) + S_Z (P_X Q_Y - P_Y Q_X)$$

Determinant

$$\overline{S} \cdot (\overline{P} \times \overline{Q}) = \begin{vmatrix} S_X & S_Y & S_Z \\ P_X & P_Y & P_Z \\ Q_X & Q_Y & Q_Z \end{vmatrix}$$

3.8 โมเมนต์ของแรงรอบแกนที่กำหนดให้



แรง F กระทำที่จุด A ใน 3 มิติ

OL เป็นแนวเส้นตรงผ่านจุด O

OL ไม่ตั้งฉากกับระนาบของ OAF

ต้องการหาโมเมนต์ของ F รอบแกน OL

หาโมเมนต์ของ F รอบจุด O : M_O

$$\boxed{\overline{M}_O = \overline{r} \times F}$$

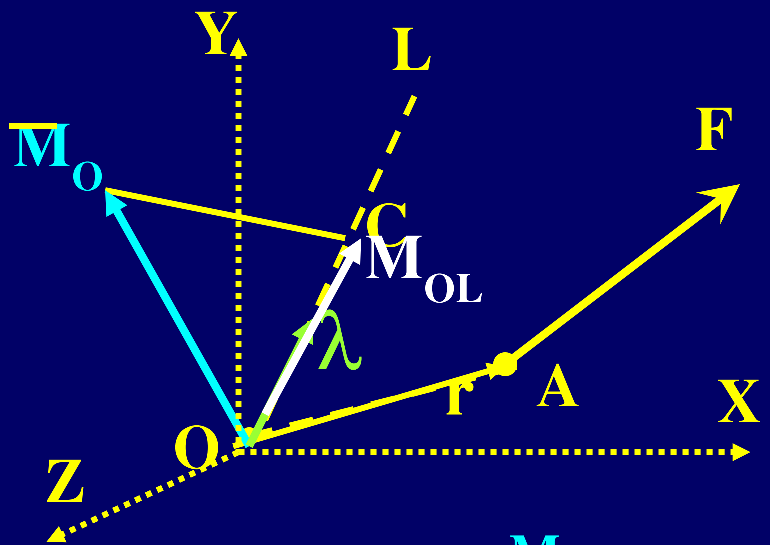
λ เป็น Unit Vector ของ OL

$$\boxed{\begin{aligned} M_{OL} &= \overline{\lambda} \cdot \overline{M}_O \\ &= \overline{\lambda} \cdot (\overline{r} \times \overline{F}) \end{aligned}}$$

3.8 โมเมนต์ของแรงรอบแกนที่กำหนดให้

$\lambda_X, \lambda_Y, \lambda_Z$ เป็น direction cosine ของ OL

X, Y, Z เป็นพิกัดจุดที่แรง F กระทำ (A)



$$\boxed{M_{OL} = \bar{\lambda} \cdot \bar{M}_O = \bar{\lambda} \cdot (\bar{r} \times \bar{F})}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_X i + \lambda_Y j + \lambda_Z k$$

$$\bar{r} = Xi + Yj + Zk$$

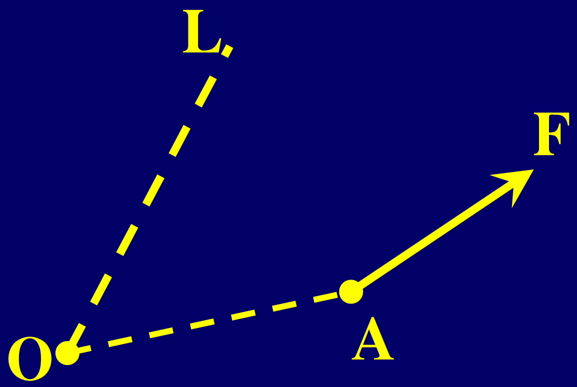
$$\bar{F} = F_X i + F_Y j + F_Z k$$

$$\boxed{M_{OL} = \lambda_X \cdot \overset{M_X}{(Y F_Z - Z F_Y)} + \lambda_Y \cdot \overset{M_Y}{(X F_Z - Z F_X)} + \lambda_Z \cdot \overset{M_Z}{(X F_Y - Y F_X)}}$$

Determinant

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_X & \lambda_Y & \lambda_Z \\ X & Y & Z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะแกน OL โดยไม่มีแกนฉาก X,Y,Z



ต้องการหาโมเมนต์รอบแกน OL โดยตรง

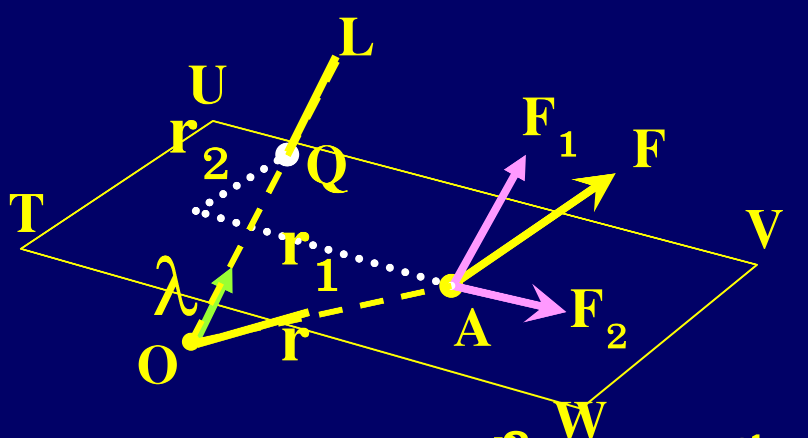
แตกแรง F เป็น F_1, F_2

F_1 ขนานกับแนวเส้น OL

F_2 ตั้งฉากกับแนวเส้น OL

ระนาบราบ TUVW ตั้งฉากกับ OL

ผ่านจุด A และตัด OL ที่ Q

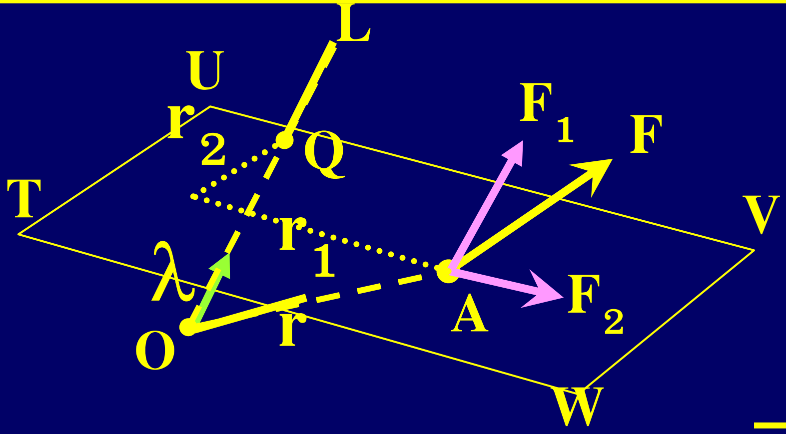


แตกระยะ r ให้เป็น r_1 และ r_2

r_1 อยู่ในแนวเดียวกับ F_2

r_2 เป็นระยะจาก OL ไปตั้งฉากกับแนว r_1 และแนว F_2

เมื่อพิจารณาเฉพาะแกน OL โดยไม่มีแกนฉาก X,Y,Z



M_{OL} ที่เกิดจาก F_1 ไม่มี
เพราะ F_1 ขนานกับ OL

มีเฉพาะ M_{OL} ที่เกิดจาก r_2 และ F_2

$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}$

$\overline{r} = \overline{r}_1 + \overline{r}_2$ $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$

$M_{OL} = \overline{\lambda} \cdot \overline{M}_O = \overline{\lambda} \cdot (\overline{r} \times \overline{F})$

$M_{OL} = \overline{\lambda} \cdot (\overline{r}_1 \times \overline{F}_1) + \overline{\lambda} \cdot (\overline{r}_1 \times \overline{F}_2) + \overline{\lambda} \cdot (\overline{r}_2 \times \overline{F}_1) + \boxed{\overline{\lambda} \cdot (\overline{r}_2 \times \overline{F}_2)}$

0 0 0

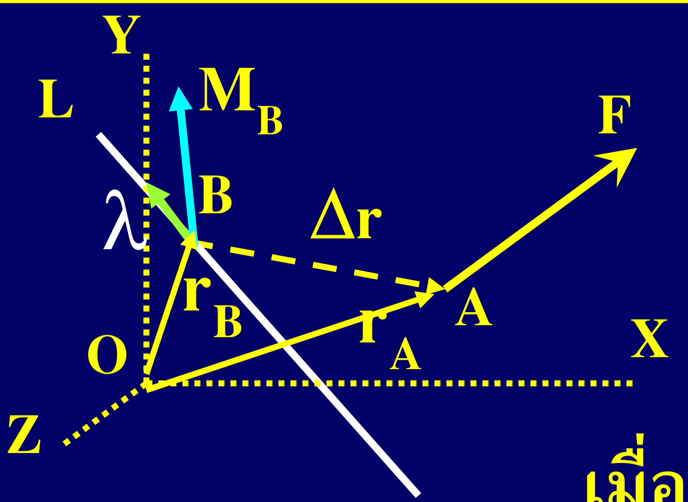
เพราะ
$\overline{\lambda} \perp$ กับ $\overline{r}_1 \times \overline{F}_1$

เพราะ
$\overline{r}_1 \parallel \overline{F}_2$

เพราะ
$\overline{\lambda} \perp$ กับ $\overline{r}_2 \times \overline{F}_1$

$\overline{M}_{OL} = \overline{\lambda} \cdot (\overline{r}_2 \times \overline{F}_2)$

กรณีแนวเส้น ลอยอยู่ใน 3 มิติ ไม่ผ่านจุด Origin ของ X, Y, Z



หาโมเมนต์ของ F รอบจุด B

$$\overline{M}_B = \overline{\Delta r} \times \overline{F}$$

$$M_{BL} = \overline{\lambda} \cdot \overline{M}_B = \overline{\lambda} \cdot (\overline{\Delta r} \times \overline{F})$$

เมื่อ

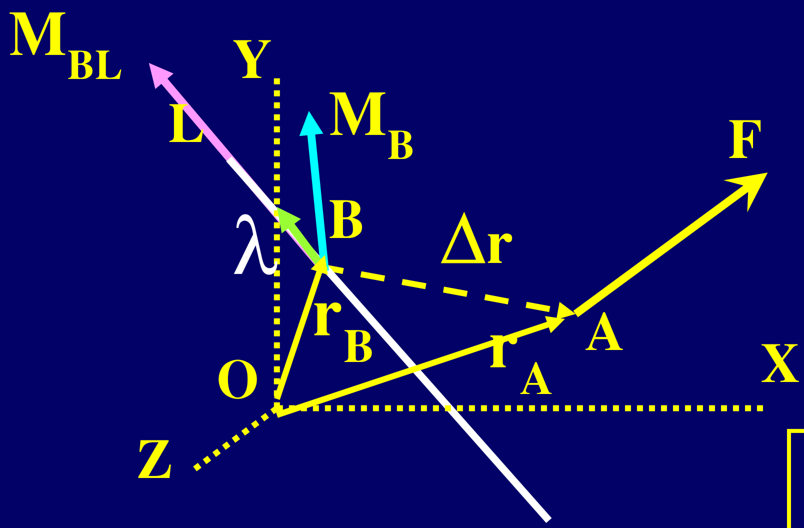
$$\overline{\Delta r} = \overline{r}_A - \overline{r}_B = \Delta\overline{X} + \Delta\overline{Y} + \Delta\overline{Z}$$

ΔX, ΔY, ΔZ เป็น ระยะย่อย ของ Δr

λ_X, λ_Y, λ_Z เป็น direction cosine ของ BL

F_X, F_Y, F_Z เป็นแรงย่อยของ F

กรณีแนวเส้นใด ๆ ลอยอยู่ใน 3 มิติ ไม่ผ่านจุด Origin ของ แกน X, Y, Z



$$\Delta\bar{r} = \Delta X i + \Delta Y j + \Delta Z k$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_X i + \lambda_Y j + \lambda_Z k$$

$$\bar{F} = F_X i + F_Y j + F_Z k$$

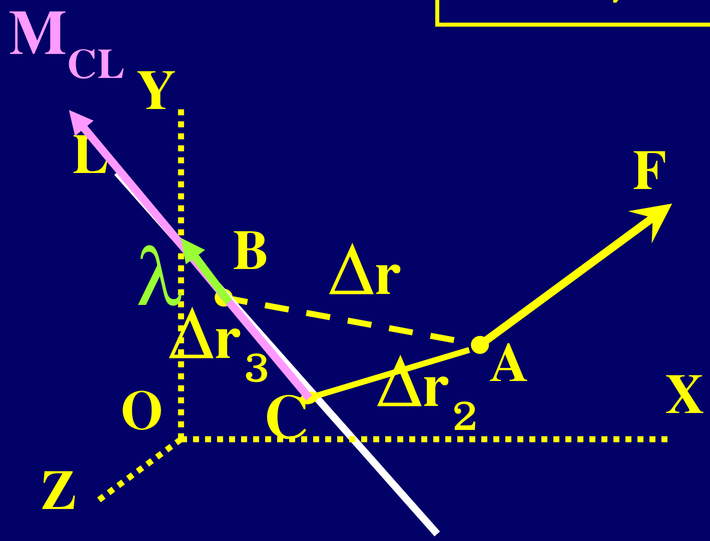
$$\boxed{M_{BL} = \bar{\lambda} \cdot \bar{M}_B = \bar{\lambda} \cdot (\Delta\bar{r} \times \bar{F})}$$

$$M_{BL} = \lambda_X(\Delta Y\, F_Z - \Delta Z\, F_Y) + \lambda_Y(\Delta X\, F_Z - \Delta Z\, F_X) + \lambda_Z(\Delta X\, F_Y - \Delta Y\, F_X)$$

Determinant

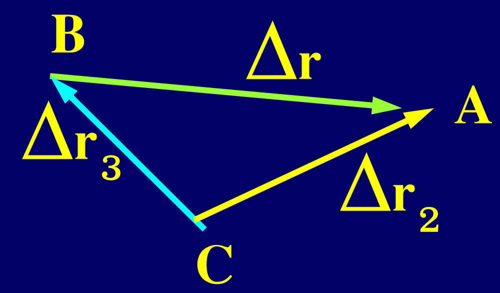
$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_X & \lambda_Y & \lambda_Z \\ \Delta X & \Delta Y & \Delta Z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix}$$

กรณีจุดใด ๆ บนแนวเส้น



C เป็นจุดใด ๆ บนแนวเส้น OL

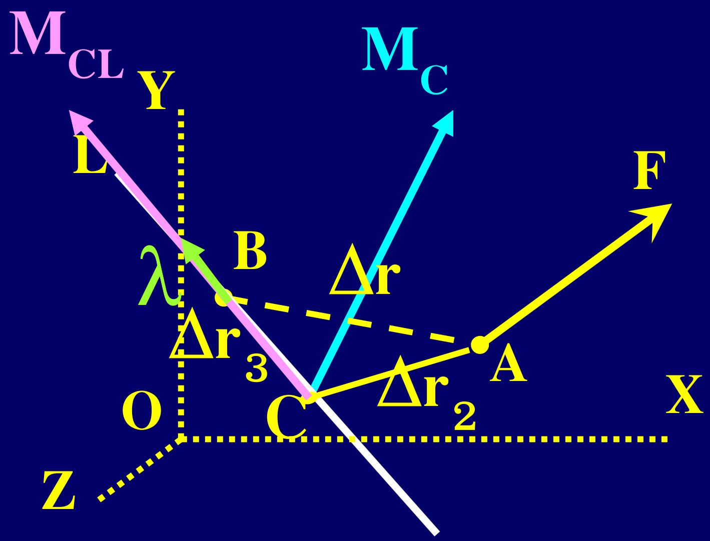
ต้องการหาโมเมนต์รอบแกน ที่ C



จากสามเหลี่ยม ABC

$$\overline{\Delta} r_2 = \overline{\Delta} r + \overline{\Delta} r_3$$

กรณีจุดใด ๆ บนแนวเส้น



$$\boxed{\overline{\Delta r}_2 = \overline{\Delta r} + \overline{\Delta r}_3}$$

$$M_{CL} = \bar{\lambda} \,.\, \bar{M}_C = \bar{\lambda} \,.\, (\overline{\Delta r}_2 \text{ X } \bar{F})$$

$$M_{CL} = \bar{\lambda} \,.\, [\, \overline{\Delta r} + \overline{\Delta r}_3 \,)\, \text{X } \bar{F} \,]$$

$$M_{CL} = \bar{\lambda} \,.\, (\overline{\Delta r} \text{ X } \bar{F}\,) + \underbrace{\cancel{\bar{\lambda} \,.\, (\overline{\Delta r}_3 \text{ X } \bar{F})}}_{=0}$$

$\overline{\Delta r}_3$ ทาบอยู่กับ BL และ $\bar{\lambda}$ เพราะฉะนั้น $\bar{\lambda}$ จะตั้งฉากกับ ($\overline{\Delta r}_3$ X $\bar{F}$)

ทำให้ $\bar{\lambda} \,.\, (\overline{\Delta r}_3 \text{ X } \bar{F}) = 0$

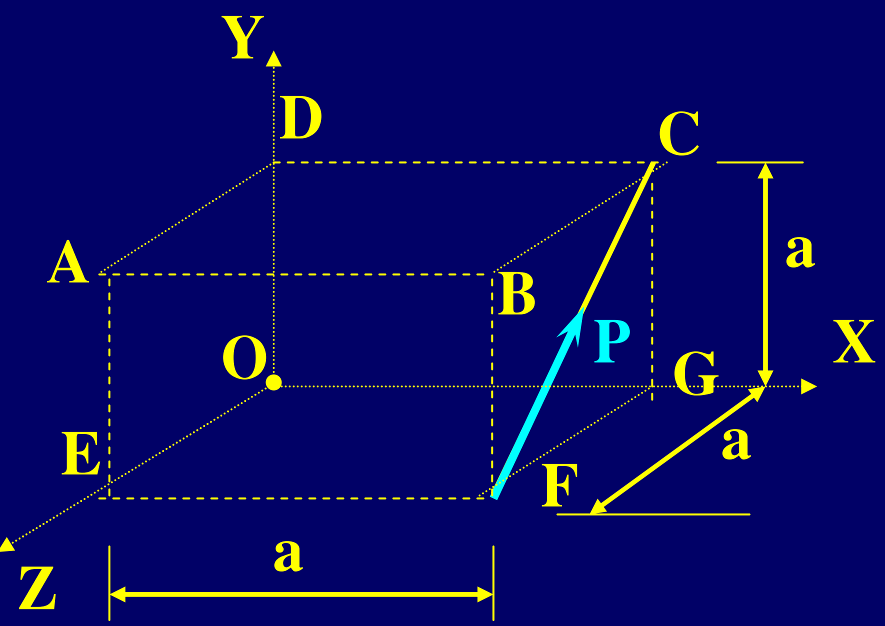
$M_{CL} = \bar{\lambda} \,.\, (\overline{\Delta r} \text{ X } \bar{F})$ เหมือนกับ $\boxed{\bar{M}_{BL} = \bar{\lambda} \,.\, (\overline{\Delta r} \text{ X } \bar{F})}$

สรุปได้ว่า ณ จุดใด ๆบนแนวเส้นเดียวกัน

จะเกิดโมเมนต์รอบแนวเส้นจากแรงเดียวกัน เท่ากันหมด

ตัวอย่าง 3.5

ข้อมูล กล่องลูกบาศก์ มีแรง P ดังรูป



ปัญหา

a) หา M_A

b) หา M_{AB}

c) หา M_{AG}

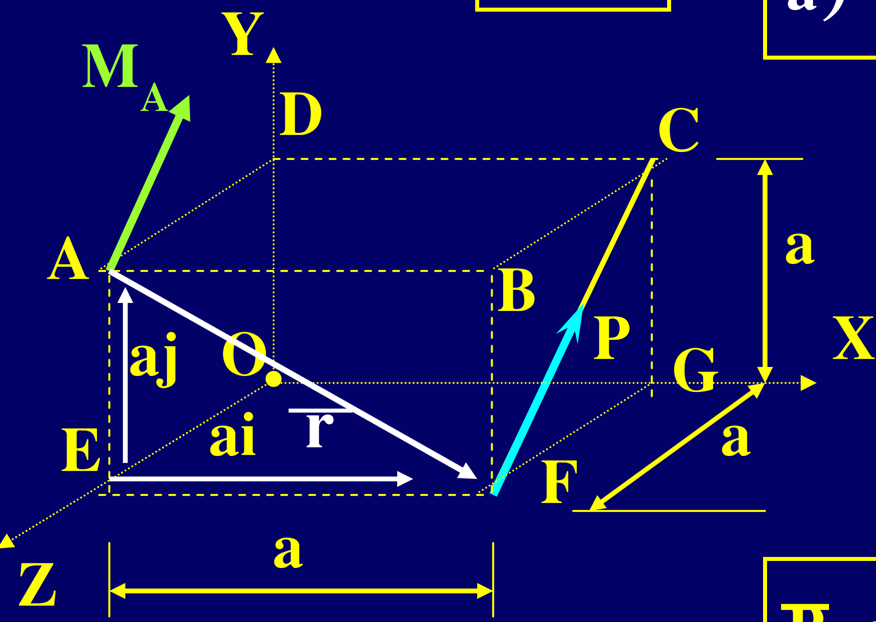
d) จาก c) หาระยะตั้งฉากจาก AG ไปยังแนวแรง P หรือ FC

ตัวอย่าง 3.5

วิธีทำ

a) หา M_A

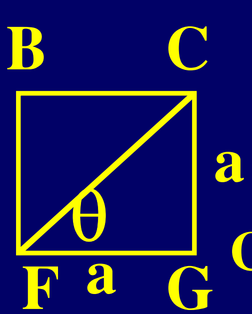
โมเมนต์รอบจุด A



$$\overline{M}_A = \overline{r} \times \overline{P}$$

$$\overline{r} = ai - aj = a(i-j)$$

$$\overline{P} = Pyj - Pzk = (P/\sqrt{2})j - (P/\sqrt{2})k$$
$$= (P/\sqrt{2})(j-k)$$



θ = 45ฐ

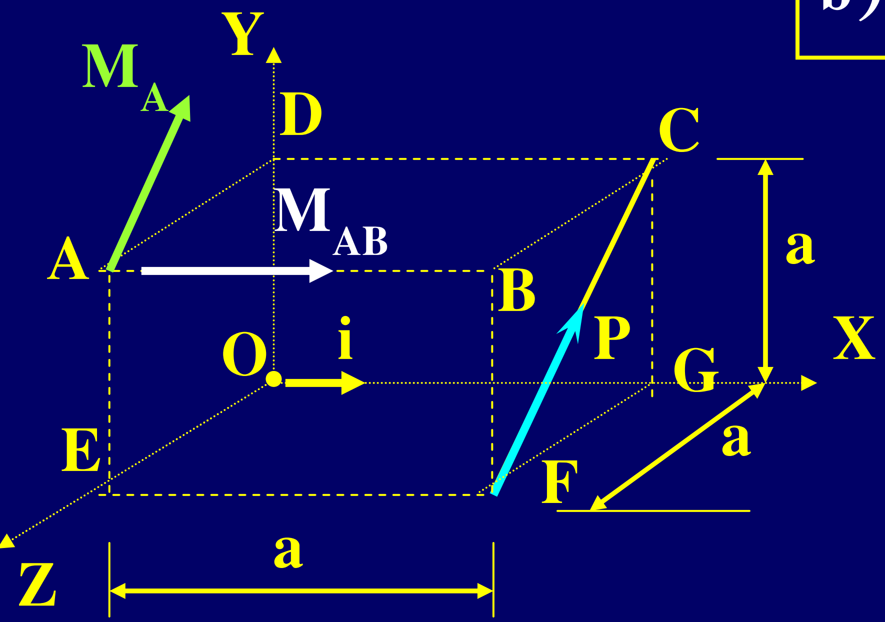
COS 45ฐ $= 1/\sqrt{2}$

$$\overline{M}_A = [a(i-j)] \times [(P/\sqrt{2})(j-k)]$$

$$\overline{M}_A = (aP/\sqrt{2})(i+j+k)$$

ตัวอย่าง 3.5

b) หา M_{AB}



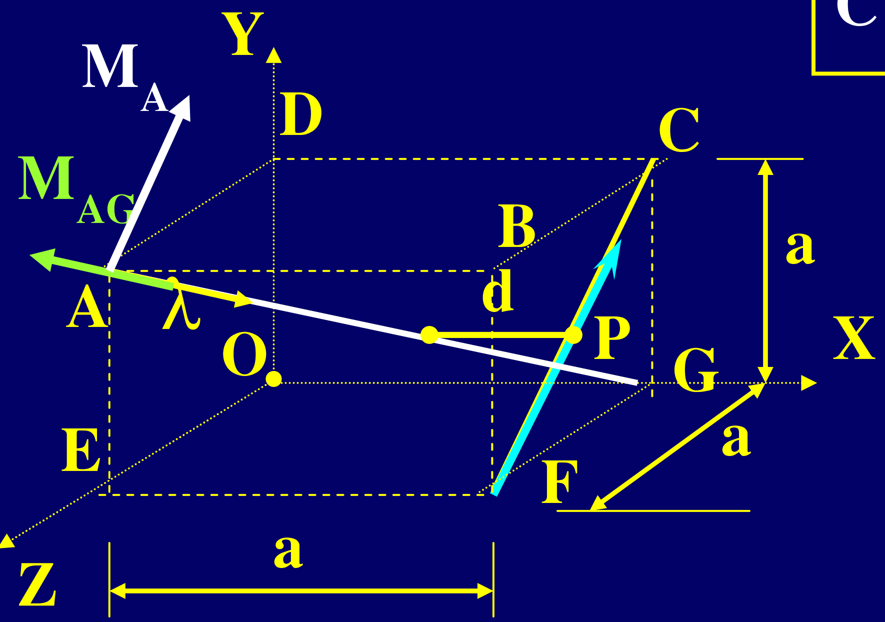
เนื่องจาก AB ขนานกับ แกน X

$$M_{AB} = \bar{i} \cdot \bar{M}_A$$
$$= i \cdot (aP/\sqrt{2})(i+j+k)$$
$$= (aP/\sqrt{2})[i.(i+j+k)]$$

$$\bar{M}_A = (aP/\sqrt{2})(i+j+k)$$

$$M_{AB} = (aP/\sqrt{2})$$

ตัวอย่าง 3.5



C) หา M_{AG}

$$M_{AG} = \bar{\lambda} \cdot \bar{M}_A$$

Unit vector $\bar{\lambda} = \overline{AG}/AG$

$$\bar{\lambda} = (ai - aj - ak)/(a\sqrt{3})$$

$$\bar{\lambda} = (1/\sqrt{3})(i - j - k)$$

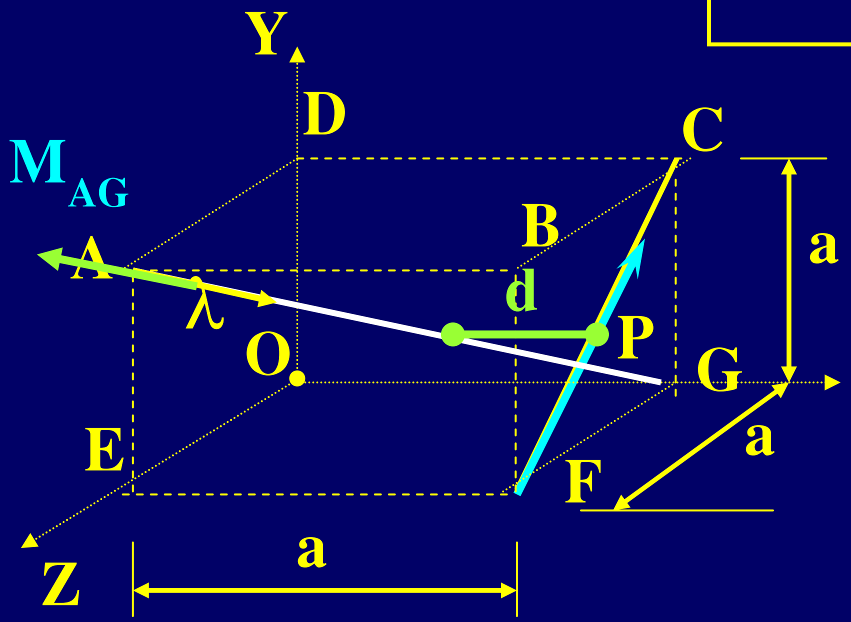
$$\bar{M}_A = (aP/\sqrt{2})(i + j + k)$$

$$\bar{M}_{AG} = (1/\sqrt{3})(i - j - k) \cdot (aP/\sqrt{2})(i + j + k)$$

$$M_{AG} = -aP/\sqrt{6}$$

ตัวอย่าง 3.5

d) จากข้อ c) หาระยะตั้งฉากจาก AG ไปยังแนวแรง P หรือ FC



ให้ระยะที่จะหาคือ d

$$M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \qquad \text{———} (1)$$

และ

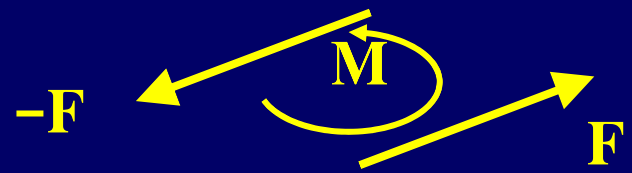
$$M_{AG} = -Pd \qquad \text{———} (2)$$

(1) = (2)

$$-Pd = -aP/\sqrt{6}$$

$$d = a/\sqrt{6}$$

3.9 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Moment of Couple)

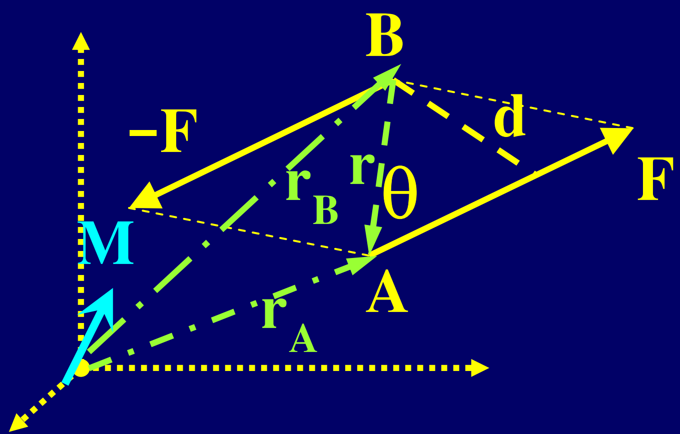


ลักษณะแรงคู่ควบ

1. แรง 2 แรงขนานกัน
2. ขนาดเท่ากัน
3. ทิศทางตรงข้ามกัน
4. ไม่เกิดแรงผลัก มีแต่หมุนอยู่กับที่
5. ไม่ว่าจะพิจารณาที่ตำแหน่งใด ค่าโมเมนต์เท่าเดิมเสมอ

3.9 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Moment of Couple)

3.9 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Moment of Couple)



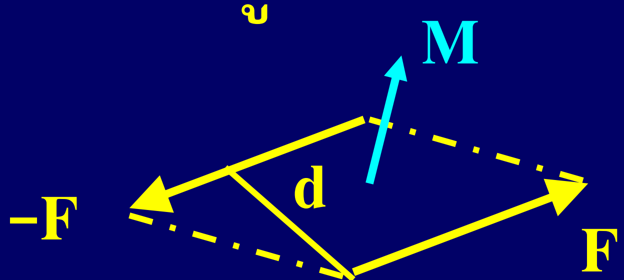
ให้ r_A , r_B เป็น Position Vector ของ แรง F กับ –F

$$\overline{M} = \overline{r}_A \text{ X } \overline{F} + \overline{r}_B \text{ X}(-\overline{F}) = (\overline{r}_A - \overline{r}_B) \text{ X } \overline{F}$$

$$\overline{r} = \overline{r}_A - \overline{r}_B$$

$$\overline{M} = \overline{r} \text{ X } \overline{F}$$

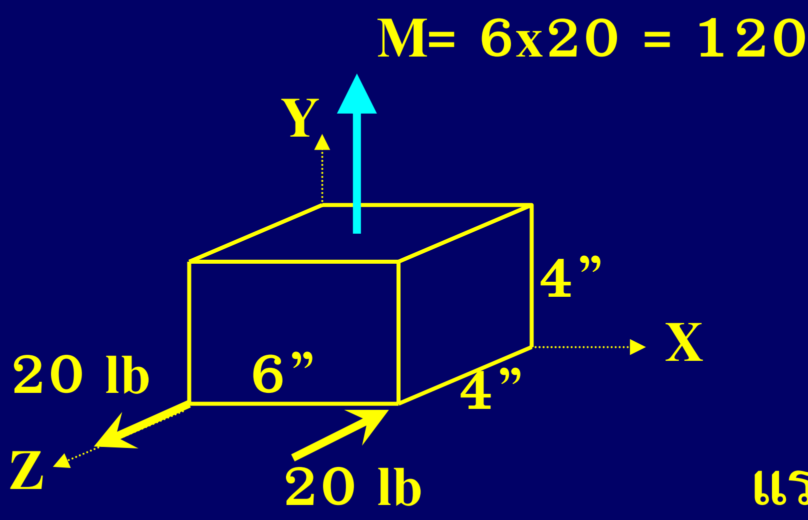
เป็นโมเมนต์คู่ควบ ทิศทางเวคเตอร์ ตั้งฉากกับระนาบของแรงทั้ง 2



ทิศทางของเวคเตอร์ ใช้กฎมือขวา

ขนาดโมเมนต์ $M = Fd$

3.10 แรงคู่ควบซึ่งสมมูลกัน (Equivalent Couple)

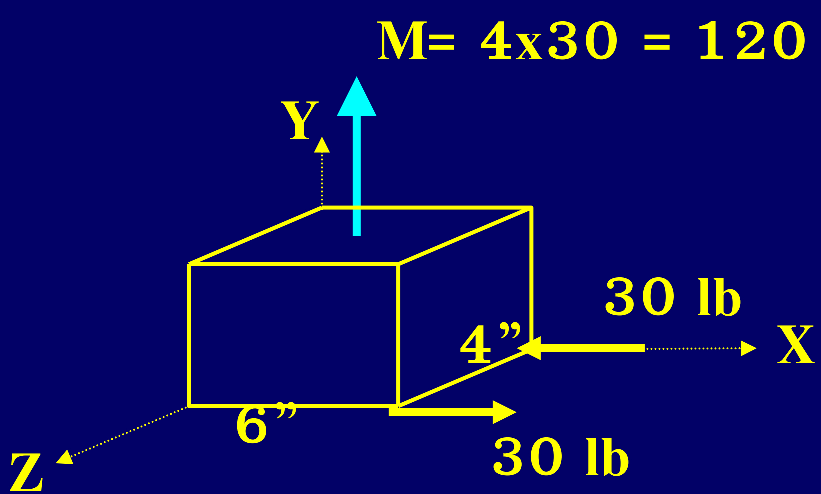


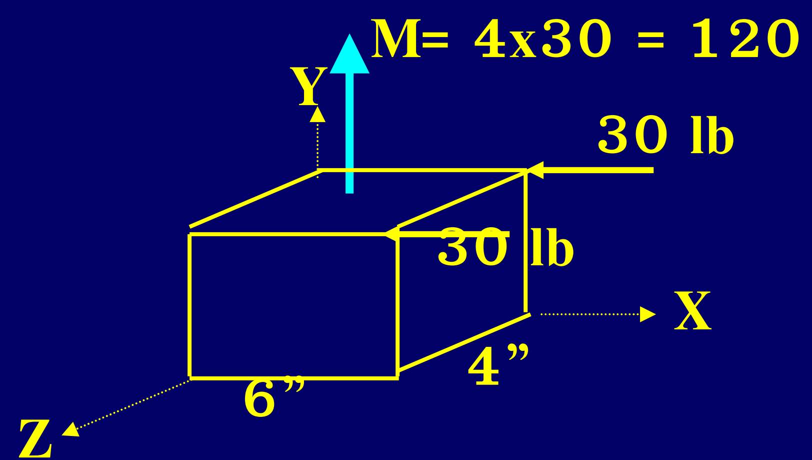
ระบบแรง 2 ระบบ จะสมมูลกัน

เมื่อ มีผลต่อวัตถุคงรูปเหมือนกัน

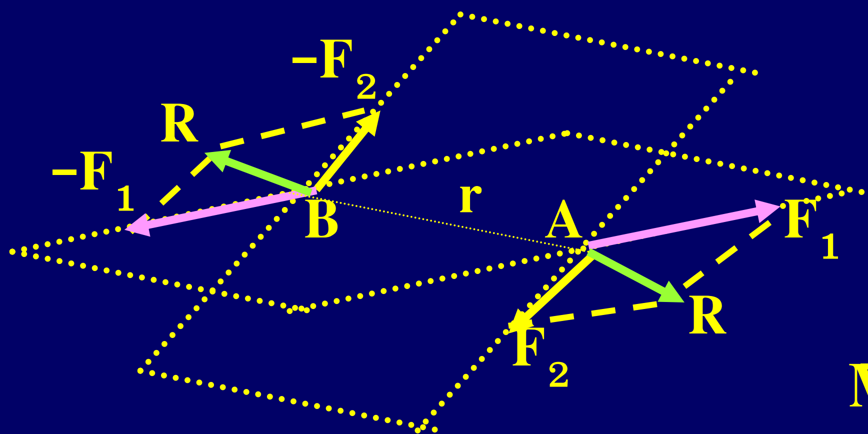
$$F_1d_1 = F_2d_2 = F_3d_3$$

แรงสุดท้ายเท่ากับ 0 เหมือนกัน โมเมนต์เท่ากัน





3.11 การรวมแรงคู่ควบ



พิจารณาแรง F_1, $-F_1$ และ F_2, $-F_2$ ซึ่งเป็นแรงคู่ควบสองคู่ กระทำที่ A,B อยู่ในระนาบ 2 ระนาบ

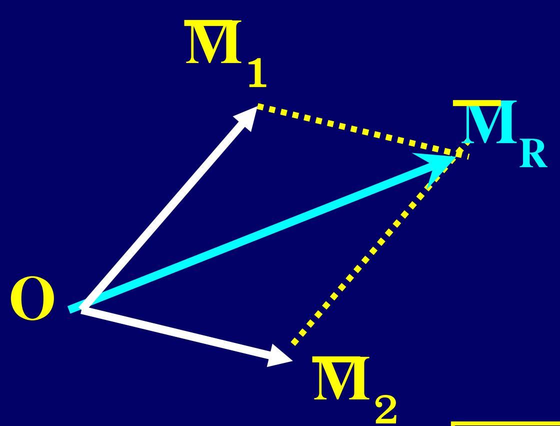
$M_1 = \bar{r} \times F_1$ และ $M_2 = \bar{r} \times F_2$

$M_R = \bar{r} \times R$ เมื่อ $R = F_1 + F_2$

$\bar{M}_R = \bar{r} \times (F_1 + F_2)$

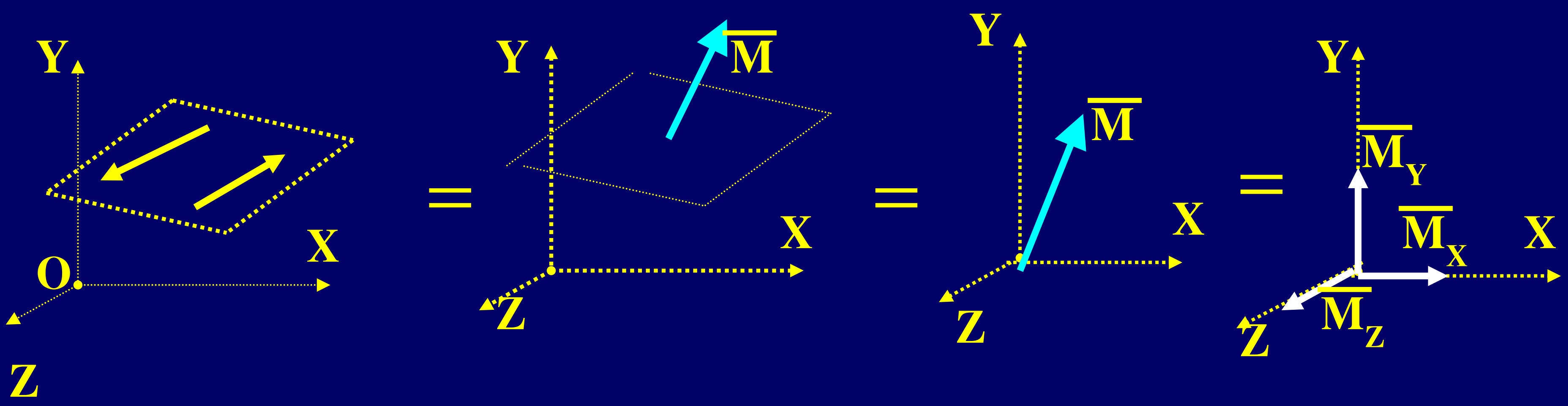
$M_R = (\bar{r} \times F_1) + (\bar{r} \times F_2)$

$= M_1 + M_2$



$$\boxed{M_R = M_1 + M_2}$$

3.12 โมเมนต์แรงคู่ควบอาจแทนด้วยเวคเตอร์



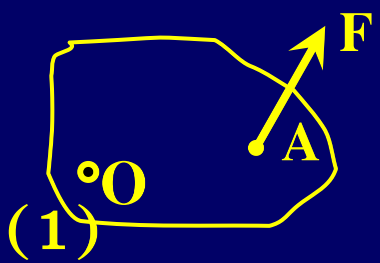
โมเมนต์ของแรงคู่ควบ
เป็น FREE VECTOR

$$\overline{M} = \overline{M}_X + \overline{M}_Y + \overline{M}_Z$$

ทิศทาง เป็นไปตามกฎมือขวา

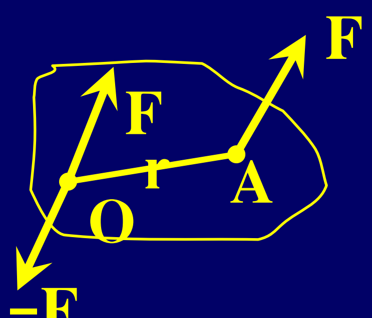
3.13 การเปลี่ยนตำแหน่งแรงไปกระทำ ณ จุดใด ๆ

เป็นการพิจารณาผลของแรง ณ จุดใด ๆบนวัตถุนั้น



แรง F กระทำที่จุด A

พิจารณาที่จุด O

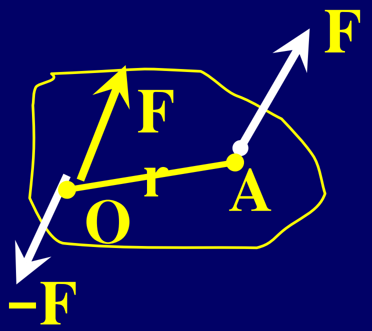


เมื่อใส่แรงกระทำที่จุด O
ขนาดและทิศทางเท่ากับ F
จำนวน 2 แรงทิศทางตรงข้ามกัน (F, –F)

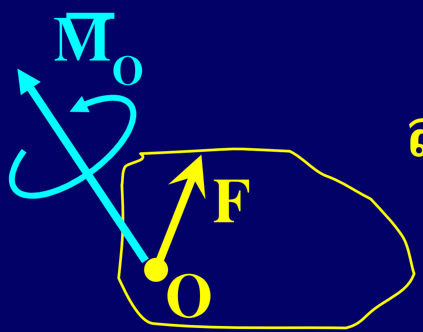
(2)

ขณะนี้ ผลที่เกิดกับวัตถุ ยังคงเท่ากับรูปที่ 1

3.13 การเปลี่ยนตำแหน่งแรงไปกระทำ ณ จุดใด ๆ



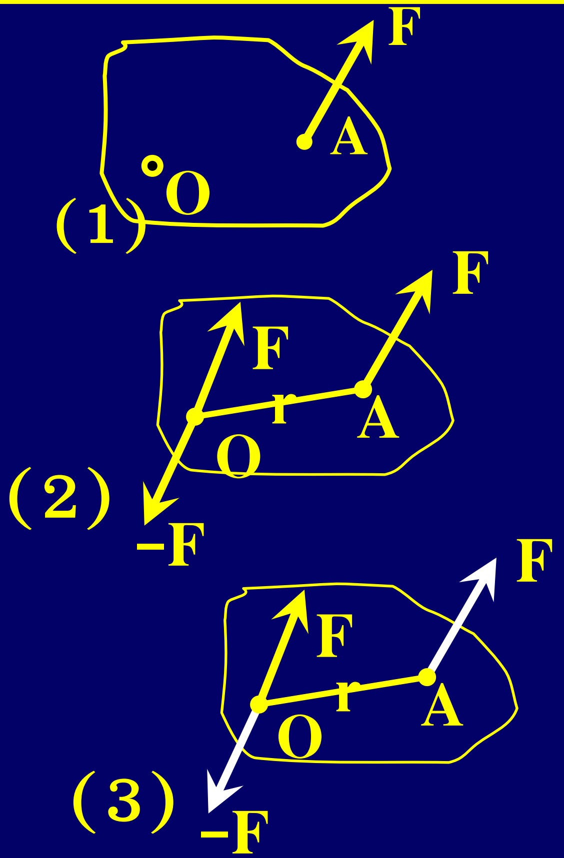
จับคู่แรง **F** ที่ A และ −**F** ที่ O จะเป็นแรงคู่ควบ 1 คู่

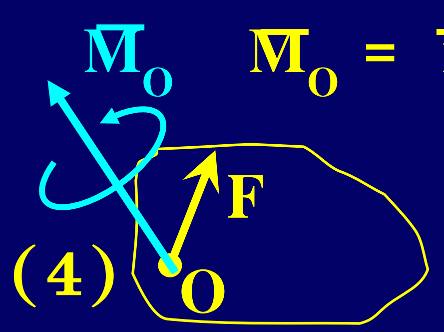


ลดแรงคู่ควบให้เป็นโมเมนต์คู่ควบ กระทำที่ O

จะเหลือแรงกระทำที่ O 1 แรง เท่ากับ **F**

และโมเมนต์แรงคู่ควบ M_O ($\overline{M}_O = \overline{r} \times F$)





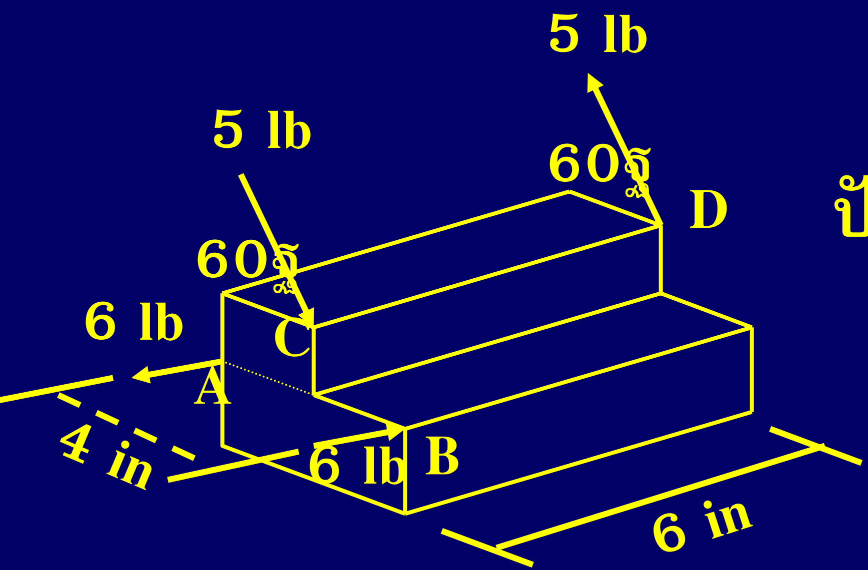
$\overline{M}_O = \overline{r} \times F$

เสมือนกับย้ายแรงมากระทำที่ O

โดยที่ ผลทีเกิดต่อวัตถุ ยังเหมือนเดิม ตั้งแต่ รูปที่ (1) ถึง (4)

เมื่อพิจารณาจุดอื่น ๆอีก
โดยให้แรง F มีขนาดและทิศทางเท่าเดิม
(หรือย้ายแรง F ไป ณ จุดใด ๆ)
ค่าที่เปลี่ยนไป คือ โมเมนต์
เพราะ $\overline{r}$ เปลี่ยนไป

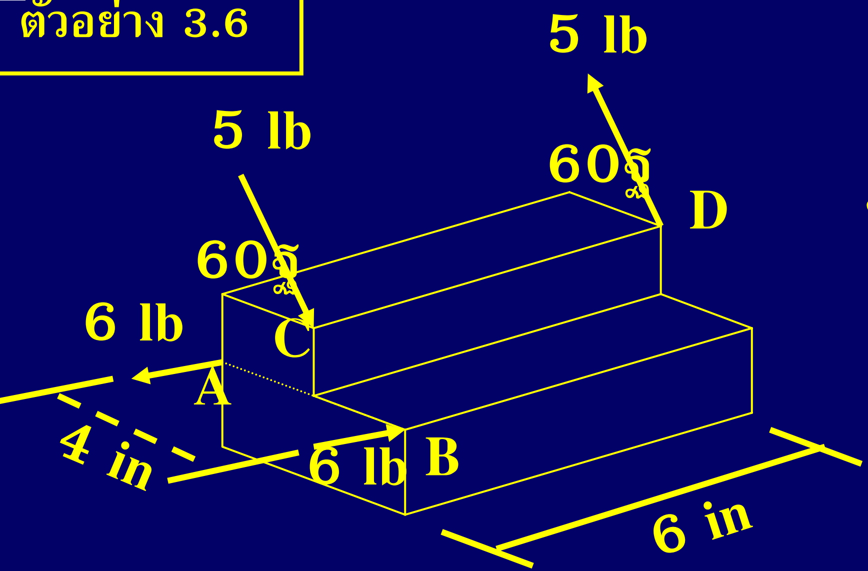
ตัวอย่าง 3.6



ข้อมูล แรงคู่ควบ 2 คู่ กระทำต่อวัตถุดังรูป

ปัญหา ให้หาแรงคู่ควบ 1 คู่มาแทนแรงคู่ควบทั้ง 2

ตัวอย่าง 3.6



วิธีทำ

หาโมเมนต์ลัพท์ ของแรงคู่ควบทั้ง 2

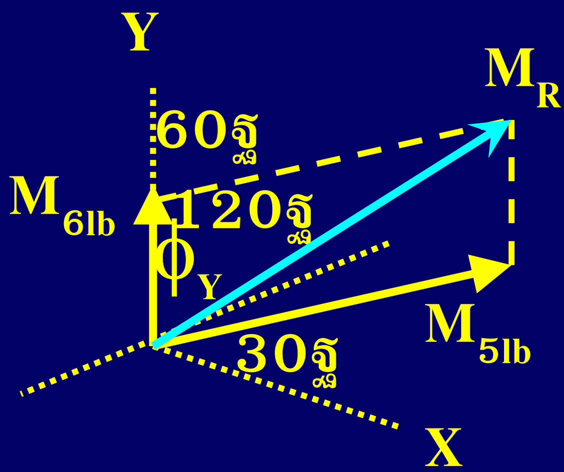
M_{5lb} = Fd = 5x6 = 30 lb ฐ in

M_{6lb} = Fd = 6x4 = 24 lb ฐ in

ใช้ Cosines Law

$M_R{}^2$ = $M_{5lb}{}^2$ + $M_{6lb}{}^2$ – (M_{5lb})(M_{6lb})2cos 120ฐ

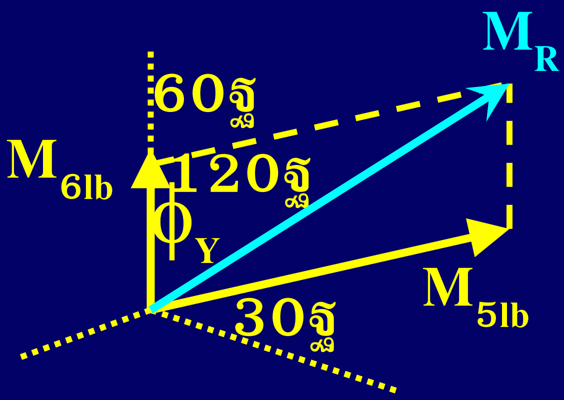
M_R = 46.9 lb ฐ in



จากรูป ทราบว่า M_{5lb}, M_{6lb} อยู่ในระนาบ XY

M_{6lb} อยู่ในแกน Y, M_{5lb} ทำมุมกับแกน X 30ฐ

ตัวอย่าง 3.6



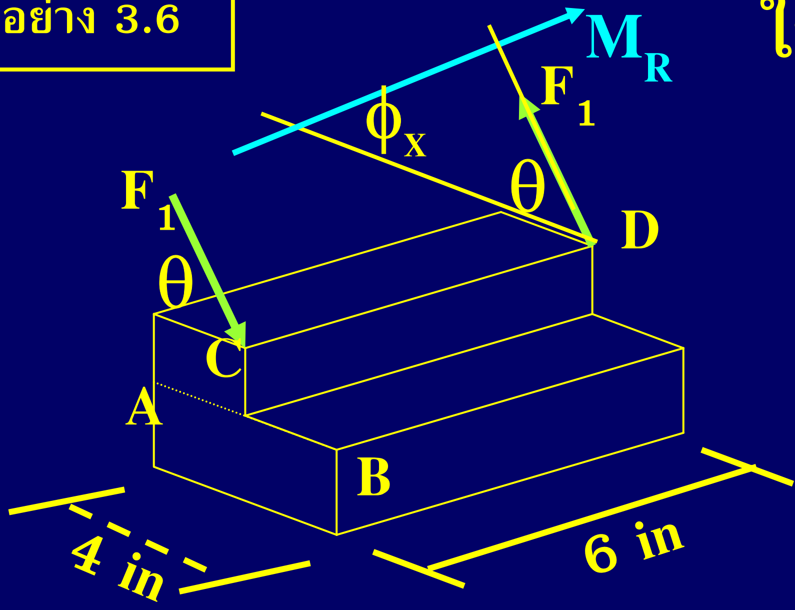
หาทิศทาง M_R จาก Sine Law

M_R /sin120ฐ = M_{5lb} /sin ϕ_Y

sin ϕ_Y = (sin120ฐ)(M_{5lb})/ M_R

ϕ_Y = 33.6ฐ ; ϕ_X = 56.4 ฐ

ตัวอย่าง 3.6



ให้แรงคู่ควบคู่ใหม่คู่เดียวกระทำที่ C,D

$M_1 = M_R$ F_1 จะเป็นเท่าใด

$M_1 = F_1 d_1 = 6F_1 = 46.9$

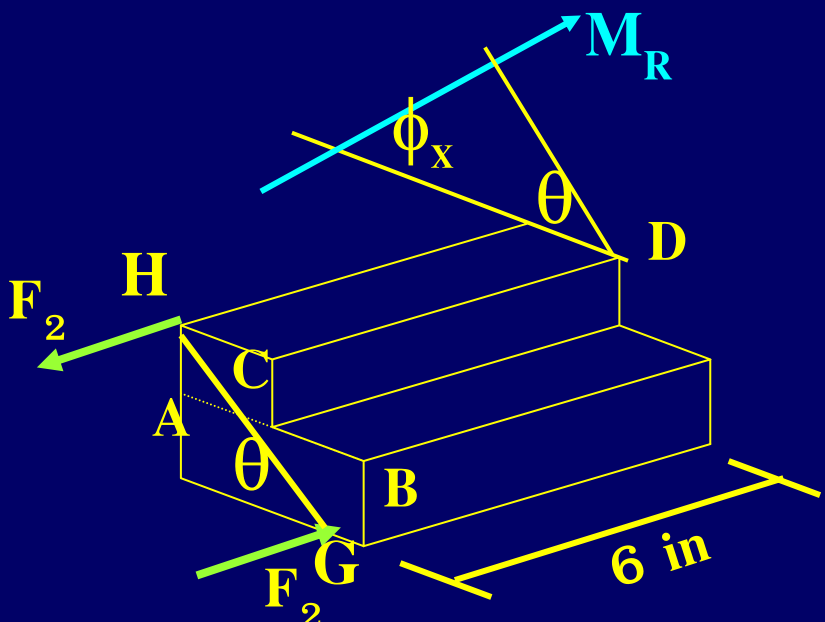
$F_1 = 46.9/6 = 7.82$ lb

หามุมที่ F_1 ทำกับแกน X(θ)

ϕ_X = 56.4 ฐ ทิศทางเดิม

จากรูป $\theta = 90 - \phi_X = 90 - 56.4$

= 33.6ฐ

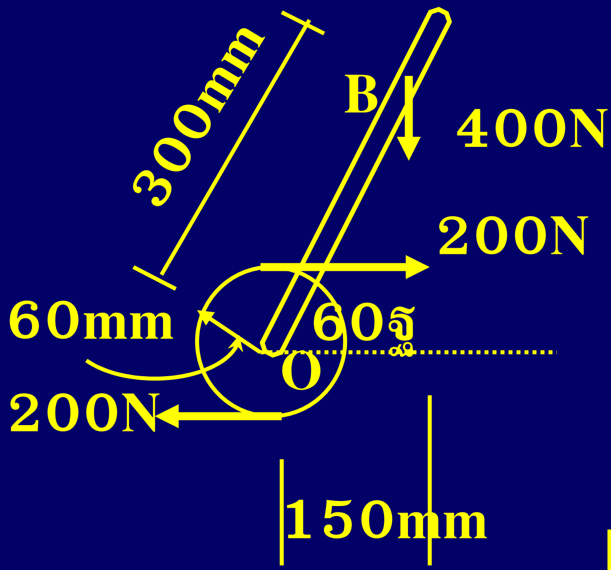


หากให้แรงคู่ควบคู่ใหม่กระทำที่ G,H

ก็ใช้หลักการเดียวกัน θ เท่ากัน

โดยค่าแรงจะเปลี่ยนไป

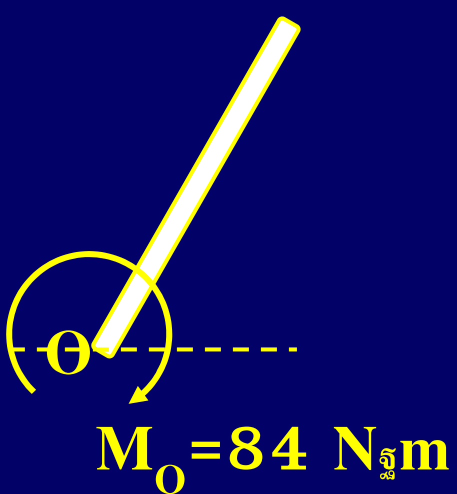
ตัวอย่าง 3.7



ข้อมูล ระบบแรงกระทำต่อวัตถุดังรูป

ปัญหา ให้หาแรง 1 แรง ซึ่งสมมูลกับระบบดังกล่าว

วิธีทำ พิจารณาจุด O

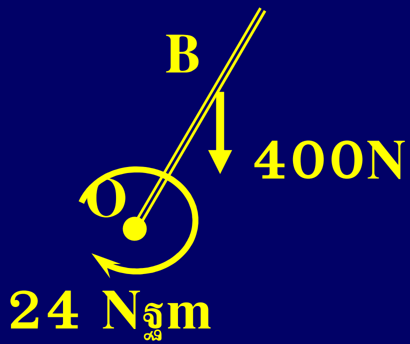


โมเมนต์จากแรงคู่ควบ = 24 N ฐ m

โมเมนต์จากแรง 400N = 60 N ฐ m

รวมโมเมนต์ทั้ง 2 = 84 N ฐ m

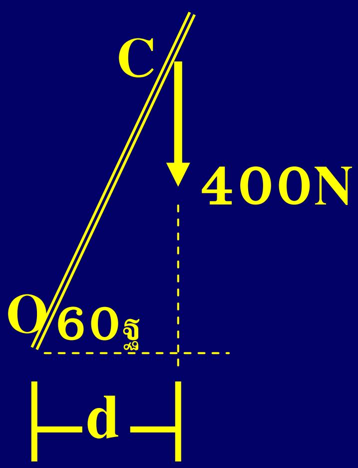
ตัวอย่าง 3.7



แรง 1 แรงที่จะมาแทนระบบแรงอย่างสมมูล

ต้องมีขนาด 400 N และกระทำ ณ ตำแหน่ง

ที่จะทำให้เกิด โมเมนต์รวมM_O เท่ากับ 84 Nฐm



สมมุติให้แรง 400 N กระทำที่จุด C

หาระยะ OC ที่ทำให้ M_O = 84 Nฐm

(400N)d = 84 Nฐm

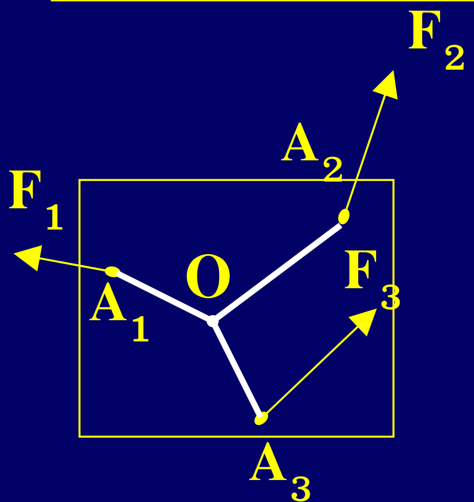
d = OC(cos60 ฐ)

(400N)(OC)(cos60 ฐ) = 84 Nฐm

OC = 420 mm

3.14 การลดระบบแรงให้เหลือแรง 1 แรง และโมเมนต์คู่ควบ 1 คู่

ความจริงก็คือการหาแรงลัพท์ของระบบแรง ณ จุดที่ต้องการ โดยแรงลัพท์ จะเหลือแรง 1 แรง และโมเมนต์คู่ควบ

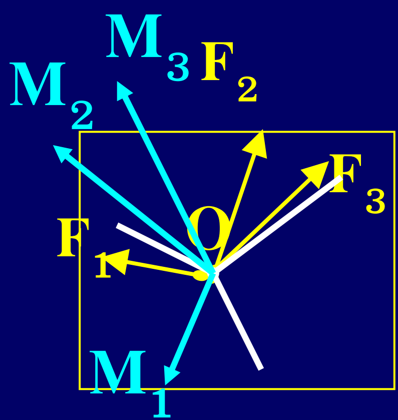


ต้องการลดระบบแรงดังรูป ให้เหลือแรง 1 แรง ที่จุด O

หรือก็คือ

ต้องการหาผลลัพท์ของระบบแรงที่จุด O

3.14 การลดระบบแรงให้เหลือแรง 1 แรง และโมเมนต์คู่ควบ 1 คู่

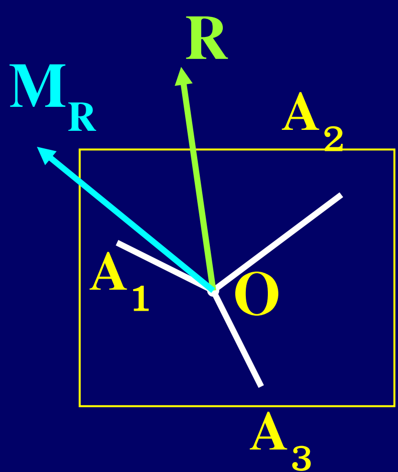


วิธีทำ ย้ายแรงไปที่ O ทั้งหมด เป็นแรงร่วมจุด

จะเกิดโมเมนต์ของแต่ละแรง

หาแรงลัพท์ และ โมเมนต์ลัพท์

หาทิศทางของแรงลัพท์ และทิศทางของมเมนต์



$$\overline{R} = \sum \overline{F}$$

$$\overline{M}_R = \sum \overline{M}_O = \sum (\overline{r} \times \overline{F})$$

ทิศทางของแรงลัพท์ และทิศทางของโมเมนต์

บอกเป็น $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$

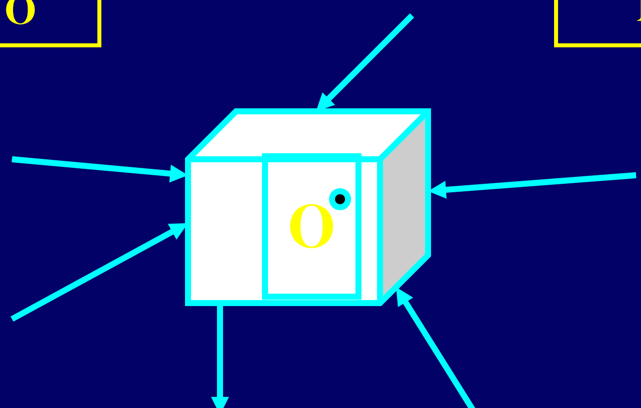
3.15 ระบบซึ่งสมมูลของแรงหลายแรง

ระบบแรง 2 ระบบ จะสมมูลกัน ถ้าพิสูจน์ได้ว่า

แรงลัพท์และโมเมนต์คู่ควบ ณ จุดเดียวกัน เท่ากัน

$$\Sigma F = \Sigma F_{ข}$$
$$\Sigma M_O = \Sigma M_{Oข}$$

$$R_1 = R_2$$
$$M_{R1} = M_{R2}$$



3.16 ระบบแรงสมมูลจะใช้ได้เมื่อ กระทำต่อวัตถุคงรูปเท่านั้น

3.17 การลดระบบแรงในลักษณะอื่น

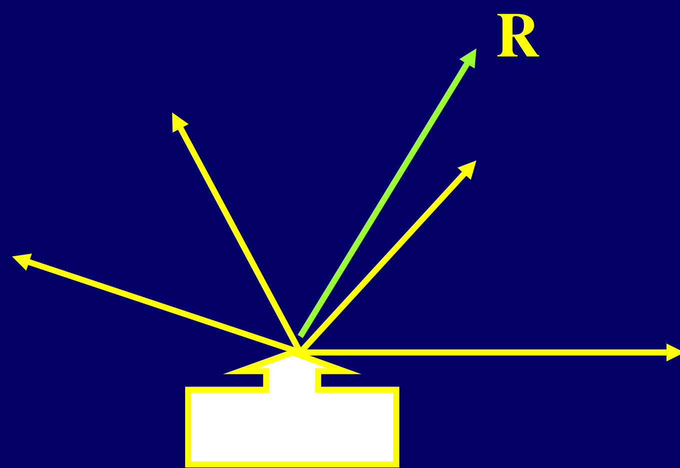
การลดระบบแรง ให้เหลือแรงเดี่ยว 1
หรือการหาแรงลัพท์ของระบบแรง

จะกระทำได้เมื่อ

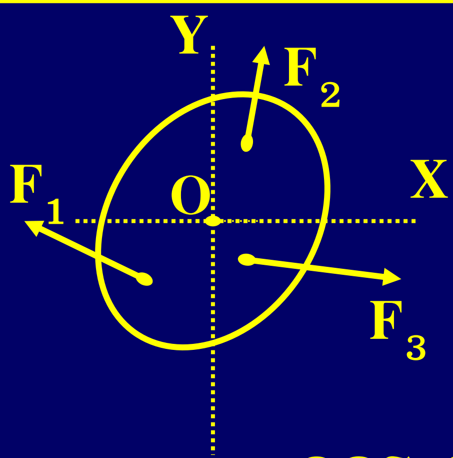
1. แรงทั้งหมด พบกันที่จุด ๆหนึ่ง (Concurrent) หรือ
2. แรงทั้งหมดอยู่ในระนาบเดียวกัน (Coplanar) หรือ
3. แรง ทั้งหมดขนานกัน (Parallel)

ตำแหน่งที่แรงลัพท์กระทำ อาจจะมีโมเมนต์คู่ควบอยู่ด้วย หรือ เหลือแรงลัพท์เพียงแรงเดียว ไม่มีโมเมนต์

กรณี แรงร่วมจุด จะเหลือแรงเดี่ยว 1 แรง ไม่มีโมเมนต์



กรณีแรงทั้งหมดอยู่ในระนาบเดียวกัน

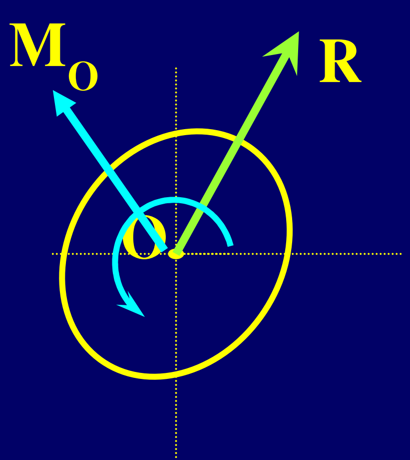


ตัดระนาบนั้นออกมาเป็น 2 มิติ

แรง 3 แรง อยู่ในระนาบเดียวกัน

ปรับเป็นระนาบ X–Y

ลดระบบแรงลงที่จุด O หรือหาค่าแรงลัพท์ที่ O นั่นเอง

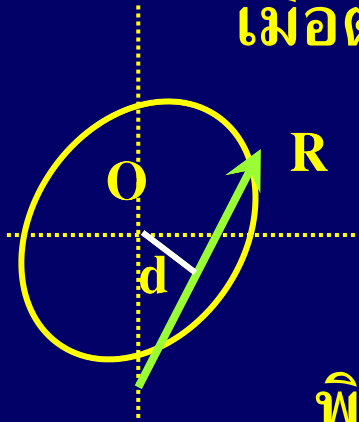


ผลจากการลดระบบแรงมาที่ O จะได้ R และ M_O

$$R = \sum F$$

$$M_O = \sum M$$

กรณีแรงทั้งหมดอยู่ในระนาบเดียวกัน



เมื่อต้องการหาแนวที่แรงลัพท์กระทำ โดยไม่มีโมเมนต์

หรือการหาตำแหน่งที่แท้จริงของแรงลัพท์

ต้องพิจารณาเทียบกับผลที่เกิดกับจุด O

พิจารณาแนวแรงลัพท์ อยู่ที่ระยะห่างจาก O เท่ากับ d

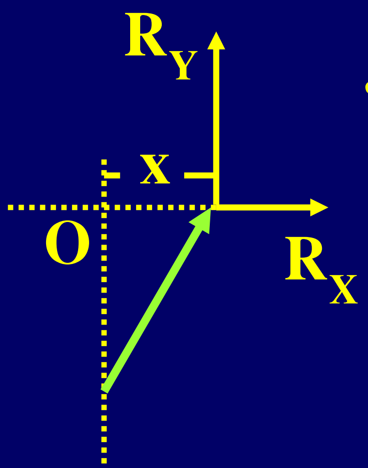
จะได้

$$(R)(d) = M_O \qquad M_O \text{ จากแรงย่อย}$$

$$d = M_O / R$$

ทุกจุดบนแนวนี้ จะเหลือแรงลัพท์ 1 แรง ไม่มีโมเมนต์

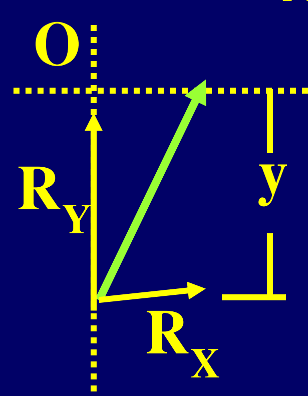
การบอกตำแหน่งแนวแรงลัพท์ R บอกโดย ระยะตัดแกน X และ Y



พิจารณาที่จุดตัด X ; $(R_Y)(X) = M_O$

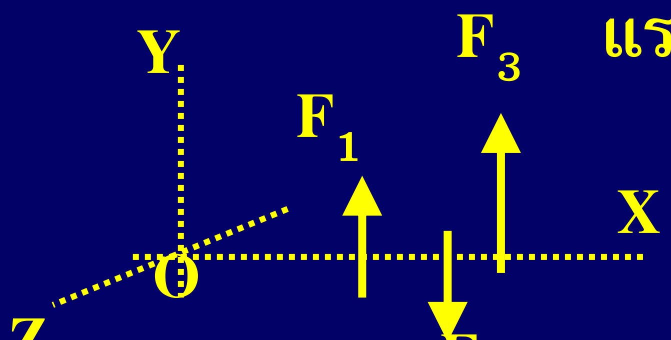
$$X = M_O / R_Y$$

พิจารณาจุดตัด Y ; $(R_X)(Y) = M_O$



$$Y = M_O / R_X$$

กรณีแรงทั้งหมด ขนานกัน



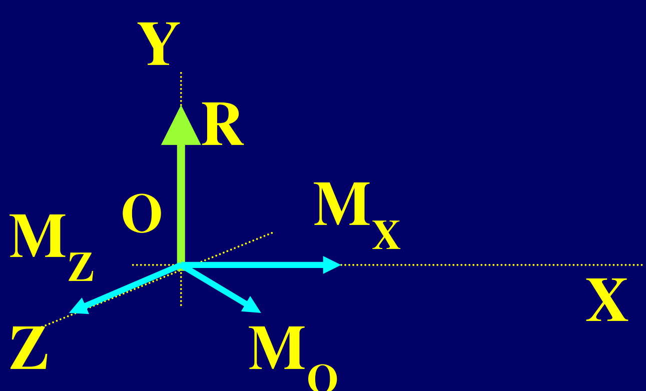
(a)

แรงทั้ง 3 ขนานกัน และให้ขนานกับแกน Y

$$R_Y = \sum F_Y$$

$$M_X = \sum M_X$$

$$M_Z = \sum M_Z$$



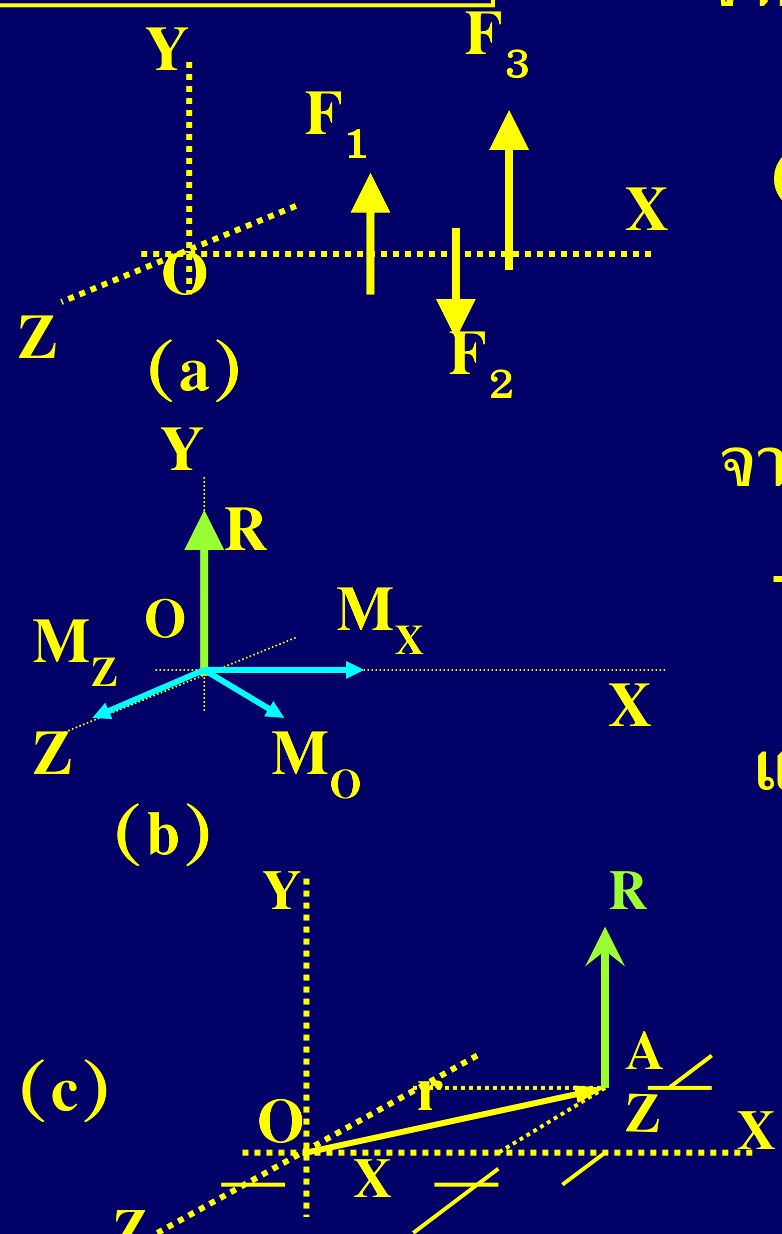
(b)

$R_X = 0$ (เพราะแรงตั้งฉากกับแกน X)

$R_Z = 0$ (เพราะแรงตั้งฉากกับแกน Z)

$M_Y = 0$ (เพราะแรงขนานกับแกน Y)

กรณีแรงทั้งหมด ขนานกัน



จากรูป (C)

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O$$

$$(Xi + Zk) \times (R_y j) = M_X i + M_Z k$$

$$XR_Y k - ZR_Y i = M_X i + M_Z k$$

จากสัมประสิทธิ์ของ i, k จะได้

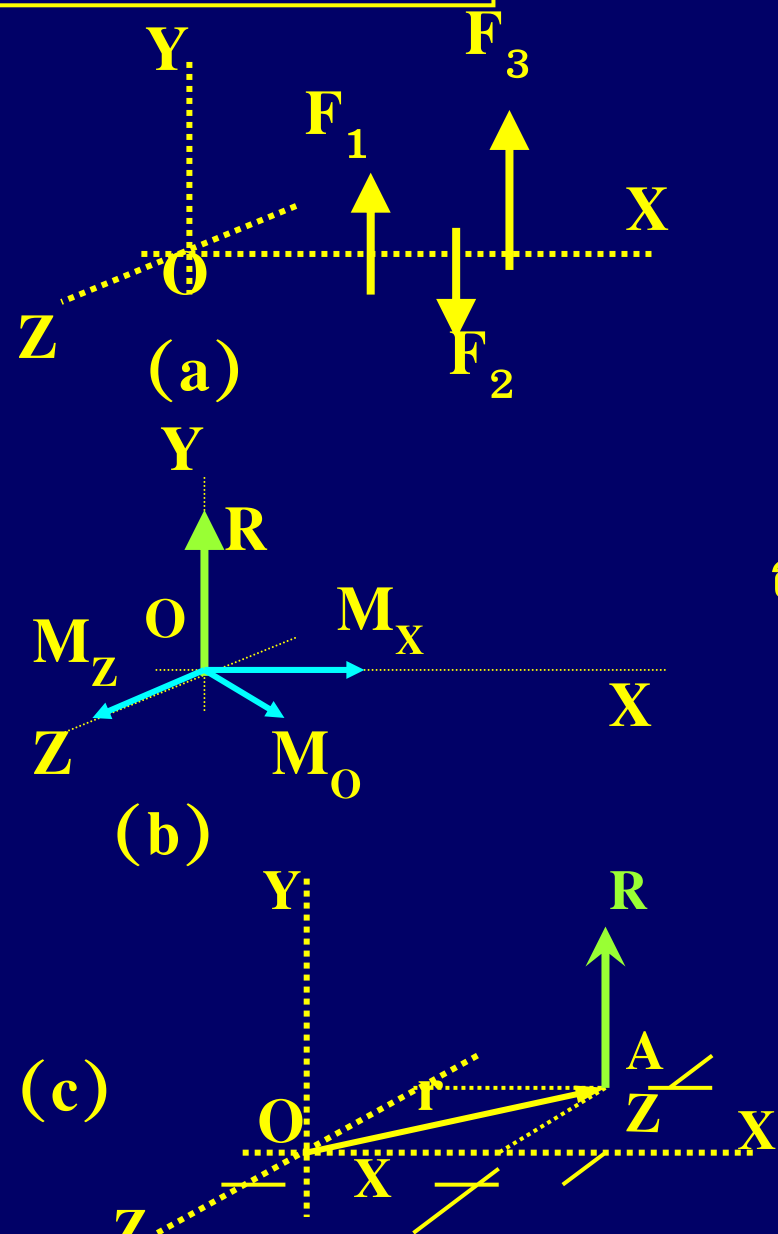
$-ZR_Y = M_X$ และ $XR_Y = M_Z$

แสดงว่า

โมเมนต์รอบแกน X คือ M_X

โมเมนต์รอบแกน Z คือ M_Z

กรณีแรงทั้งหมด ขนานกัน



โมเมนต์รอบแกน X คือ M_X

โมเมนต์รอบแกน Z คือ M_Z

ถ้า A เป็นตำแหน่งที่แท้จริงของ R

ถ้าหาก $M_A = 0$

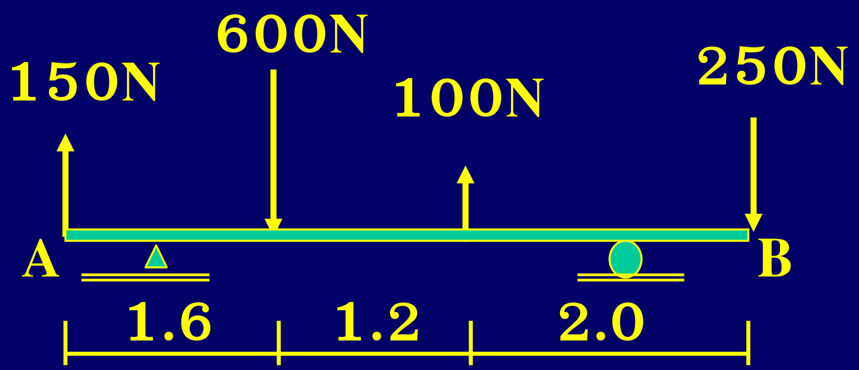
จะเหลือแรงเดี่ยว 1 แรง

และถ้าหาก $R = 0$

จะเหลือโมเมนต์คู่ควบเท่านั้น

(แรงหักล้างกันหมดแบบแรงคู่ควบ)

ตัวอย่าง 3.8



ข้อมูล คานยาว 4.8 ม ถูกแรงกระทำ ดังรูป

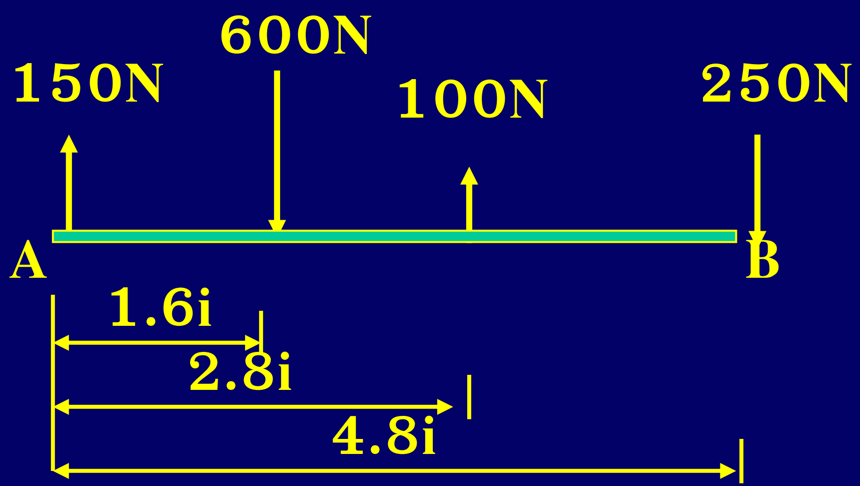
ปัญหา ให้ลดระบบแรงเป็นดังนี้

a) ระบบแรงซึ่งสมมูลกระทำที่ A

b) ระบบแรงซึ่งสมมูลกระทำที่ B

c) เหลือแรงเดี่ยว 1 แรง เท่านั้น

ตัวอย่าง 3.8



a)

สมมูลที่ A มี R และ M_A

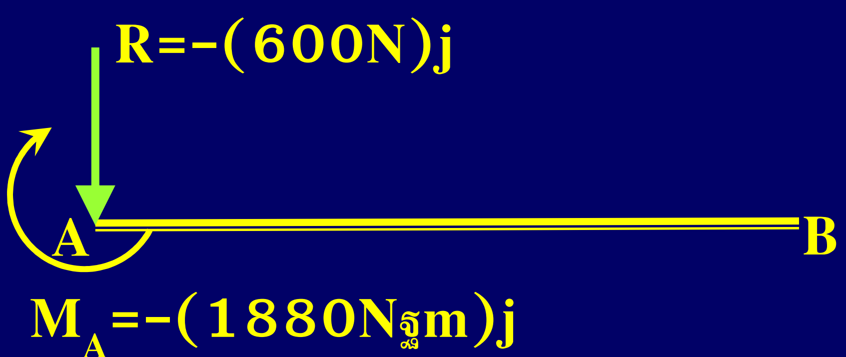
$$\bar{R} = \sum \bar{F}$$

$$\bar{R} = 150j - 600j + 100j - 250j$$

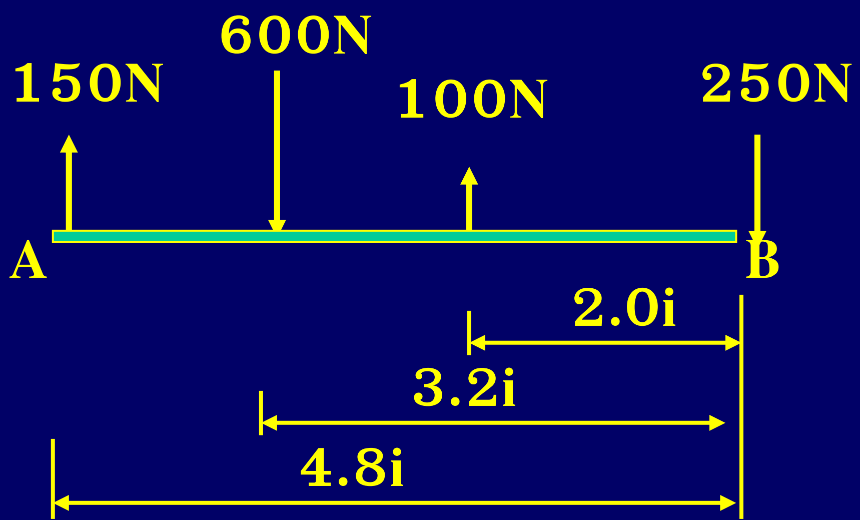
$$\bar{R} = -600j$$

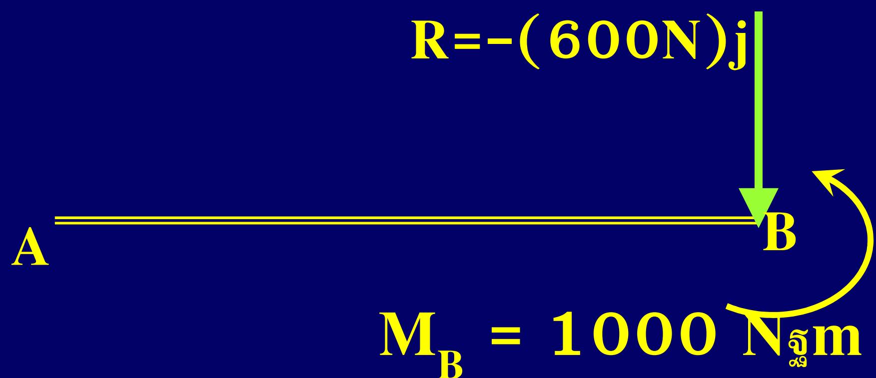
$$\bar{M}_A = \sum (\bar{r} \times \bar{F})$$

$$\bar{M}_A = -1880k$$



ตัวอย่าง 3.8





b)

สมมูลที่ B มี R และ M_B

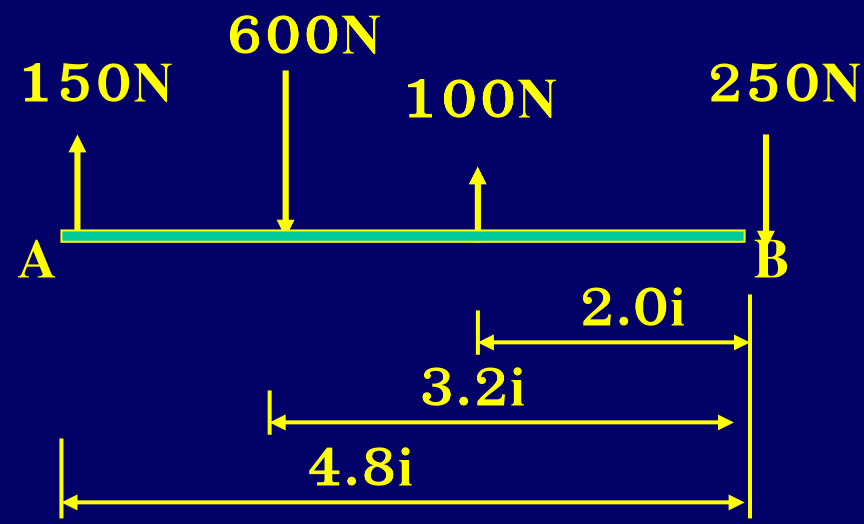
$$\bar{R} = \sum \bar{F}$$

$$\bar{R} = -600j$$

$$\bar{M}_B = \sum (\bar{r} \times \bar{F})$$

$$\bar{M}_B = 1000k$$

ตัวอย่าง 3.8



c)

แรงเดี่ยว 1 แรงเท่านั้น

ให้แรงเดี่ยวหรือแรงลัพท์กระทำที่ C

ระยะ AC = r_C

$$\overline{R} = \sum \overline{F}$$

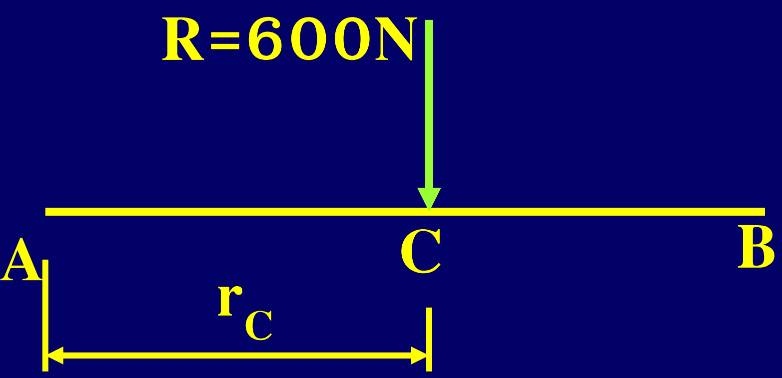
$$\overline{R} = -600j$$

พิจารณาโมเมนต์รอบ A

$$\overline{M}_A = \overline{(r_C \, \overline{X} \, R)}$$

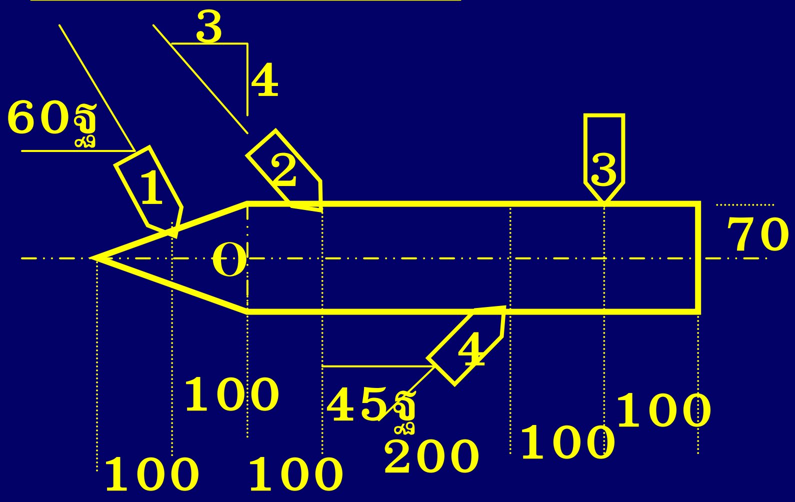
$$-1880k = (r_C i)X(-600)j$$

$$r_C = -(1880)/(600) = 3.13 \text{ ม}$$



เป็นตำแหน่งที่แรงลัพท์เหลือแรงเดี่ยว 1 แรงเท่านั้น

ตัวอย่าง 3.9



ข้อมูล

เรือ Tugboat 4 ลำ

ลากจูงเรือเดินสมุทร

ด้วยแรงลำละ 5000 lb ดังรูป

ปัญหา

ให้หา

a) แรงสมมูลที่เสากระโดง O

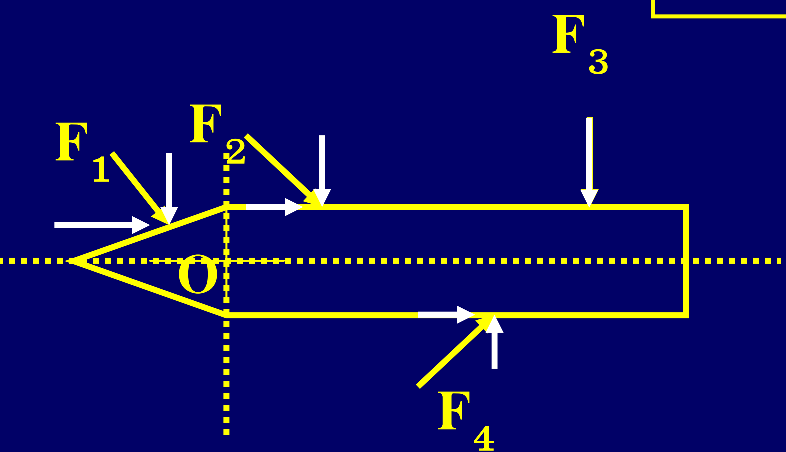
b) ตำแหน่งที่เรือ Tugboat ลำเดียว

มาแทนที่เรือ Tugboat ทั้ง 4 ลำ

ตัวอย่าง 3.9

วิธีทำ เขียน FBD

แตกแรงเข้าสู่แกนทั้งหมด



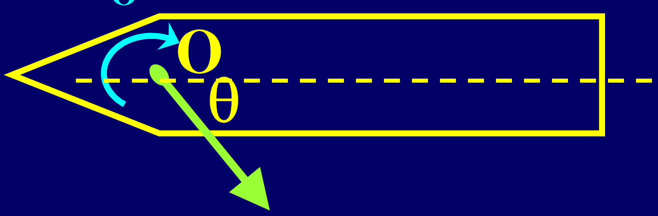
$\bar{F}_{1X} = 2.50i$; $\bar{F}_{1Y} = -4.33j$

$F_{2X} = 3.00i$; $F_{2Y} = -4.00j$

$F_{3X} = 0$; $F_{3Y} = -5.00j$

$F_{4X} = 3.54i$; $F_{4Y} = 3.54j$

M^R_O =1035 lb.ฐft



R=13.33 lb

a) แรงสมมูลที่ O

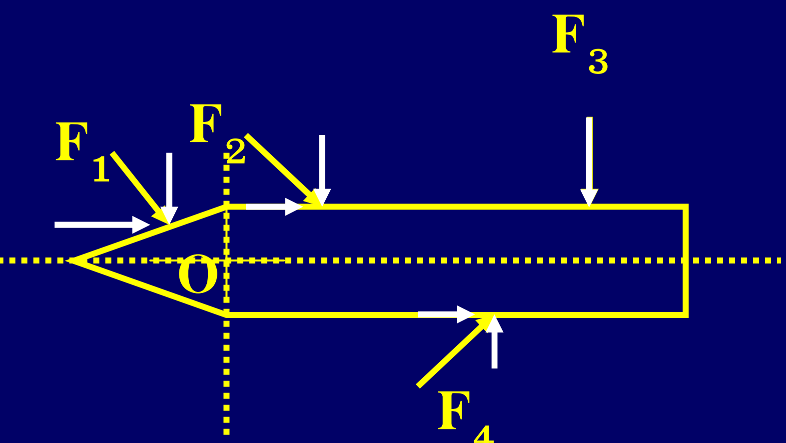
$\bar{R} = \sum F = 9.04i - 9.79j$

R=13.33 lb

$\bar{M}_O = \sum (\bar{r} \times \bar{F}) = -1035k$

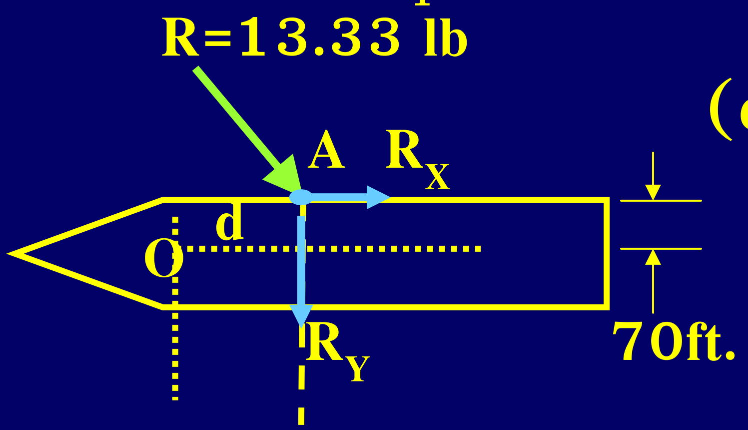
θ_R = tan-1(9.79)/(9.04) = 47.3 ฐ

ตัวอย่าง 3.9



$$\bar{R} = \sum \bar{F} = 9.04i - 9.79j$$

R=13.33 lb



b)

ให้เรือ 1 ลำ กระทำที่ A ระยะ OA=d

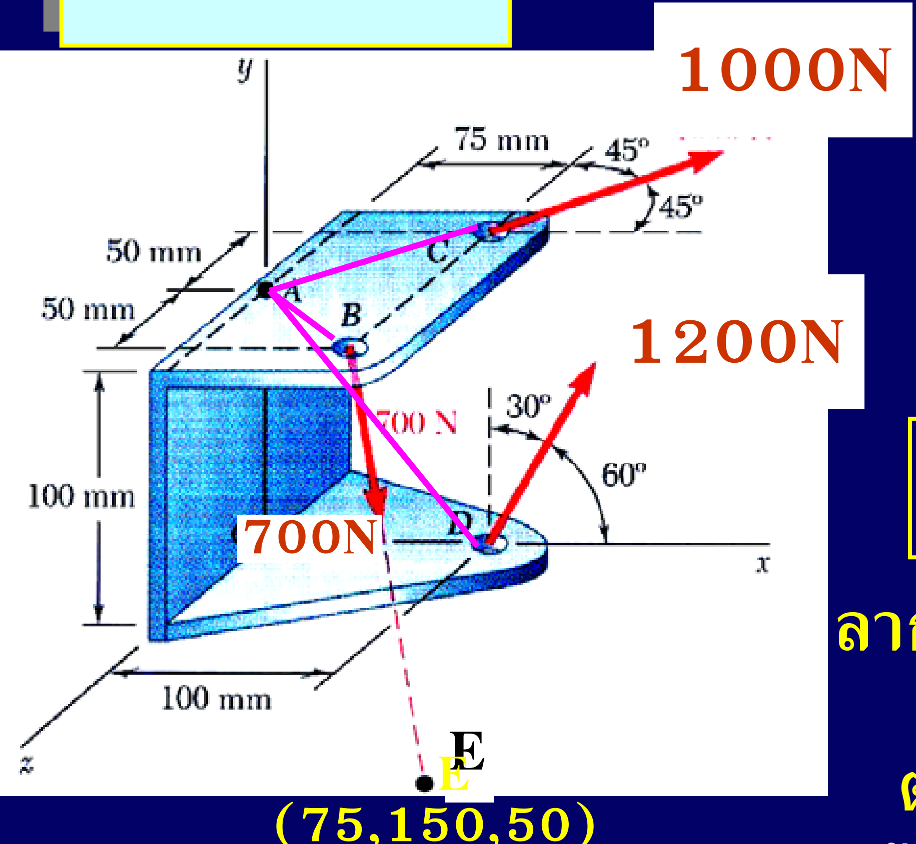
$$(d)\,(R_Y)+(70)(R_X) = M^R_O$$

$$(d)(9.79)+(70)(9.04) = 10.35$$

$$d = 41.1 \text{ ft}$$

เรือ 1 ลำ กระทำที่ขอบเรือเดินสมุทร ห่างเสากระโดงไปทางท้ายเรือ 41.1 ft

ตัวอย่าง 3.10



ข้อมูล เคเบิล 3 เส้นยึดติดกับ Bracket ดังรูป

ปัญหา ให้แทนระบบแรงด้วยแรงและแรงคู่ควบที่ A

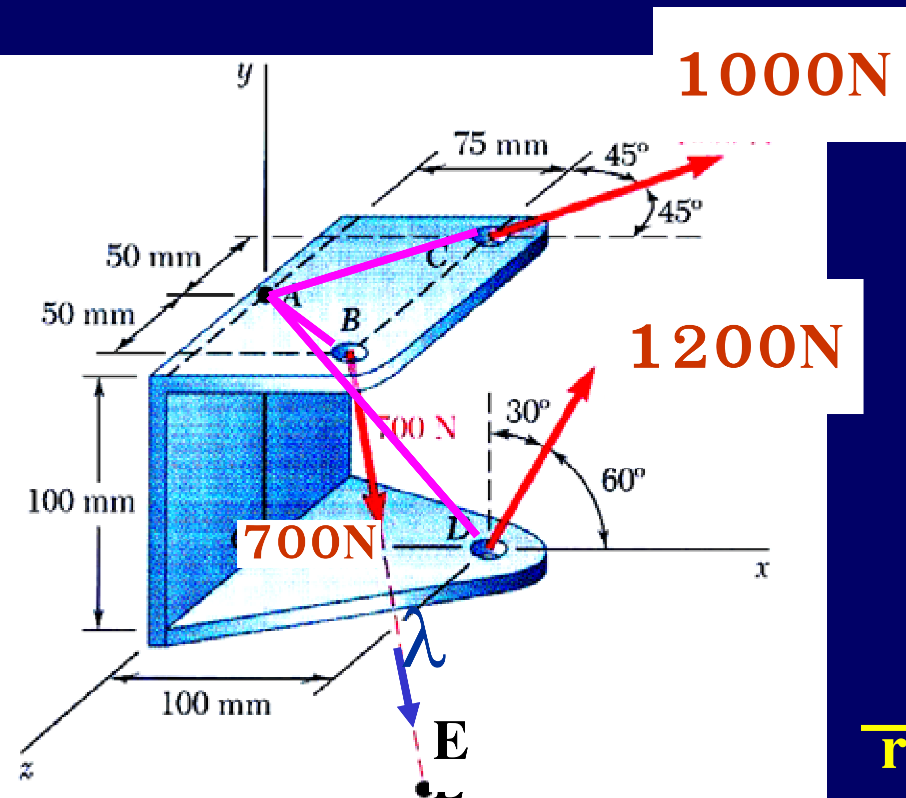
วิธีทำ

ลากเส้นเชื่อมจากจุด A ไปยังแรงต่าง ๆ

ตั้งแกน X, Y, Z

แตกแรงทั้งหมดเป็นแรงย่อยตามแนวแกน

ตัวอย่าง 3.10



(75,150,50)

ที่ B ; $\overline{F}_B = (700)(\overline{\lambda})$

$\overline{\lambda}$ คือ Unit Vector ในแนว BE

$\overline{\lambda} = (75i - 150j + 50k)/BE$

$BE = \sqrt{75^2+150^2+50^2} = 175$

$\overline{F}_B = 700(75i-150j+50k)/175$

$F_B = 300i-600j+200k$

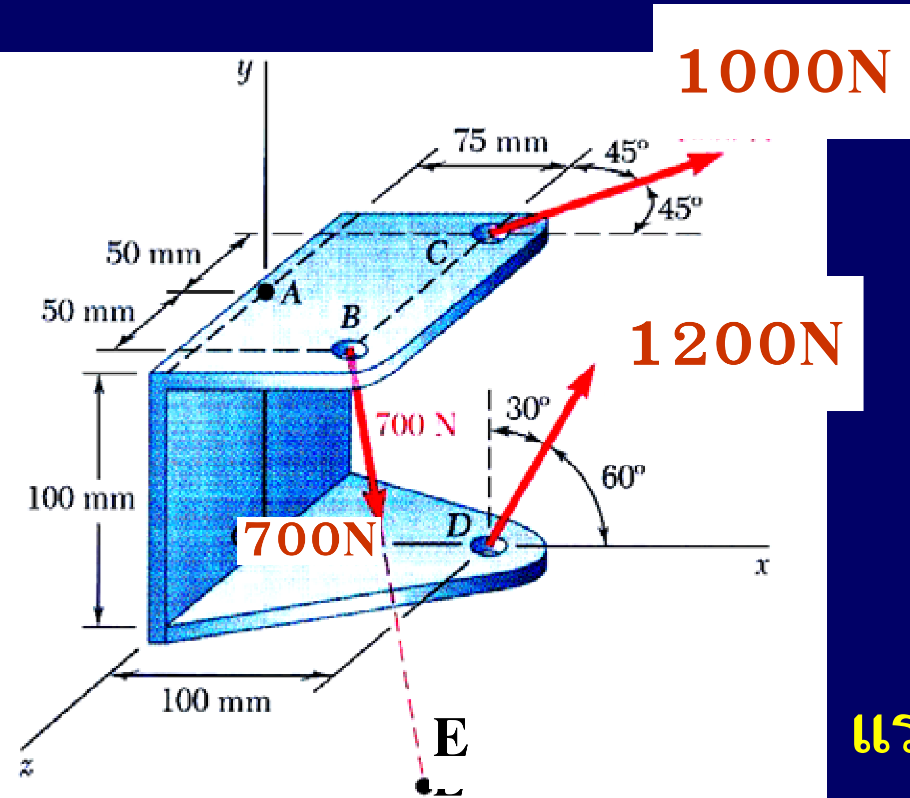
$\overline{r}_B = AB = 0.075i + 0.050k$

$\overline{r}_C = AC = 0.075i-0.050k$

$F_C = 707i-707k$

$\overline{r}_D = AD = 0.100i-0.100j$

$\overline{F}_D = 600i+1039j$



(75,150,50)

$\overline{r}_B = \overline{AB} = 0.075i + 0.050k$

$\overline{F}_B = 300i - 600j + 200k$

$\overline{r}_C = \overline{AC} = 0.075i - 0.050k$

$\overline{F}_C = 707i - 707k$

$\overline{r}_D = \overline{AD} = 0.100i - 0.100j$

$\overline{F}_D = 600i + 1039j$

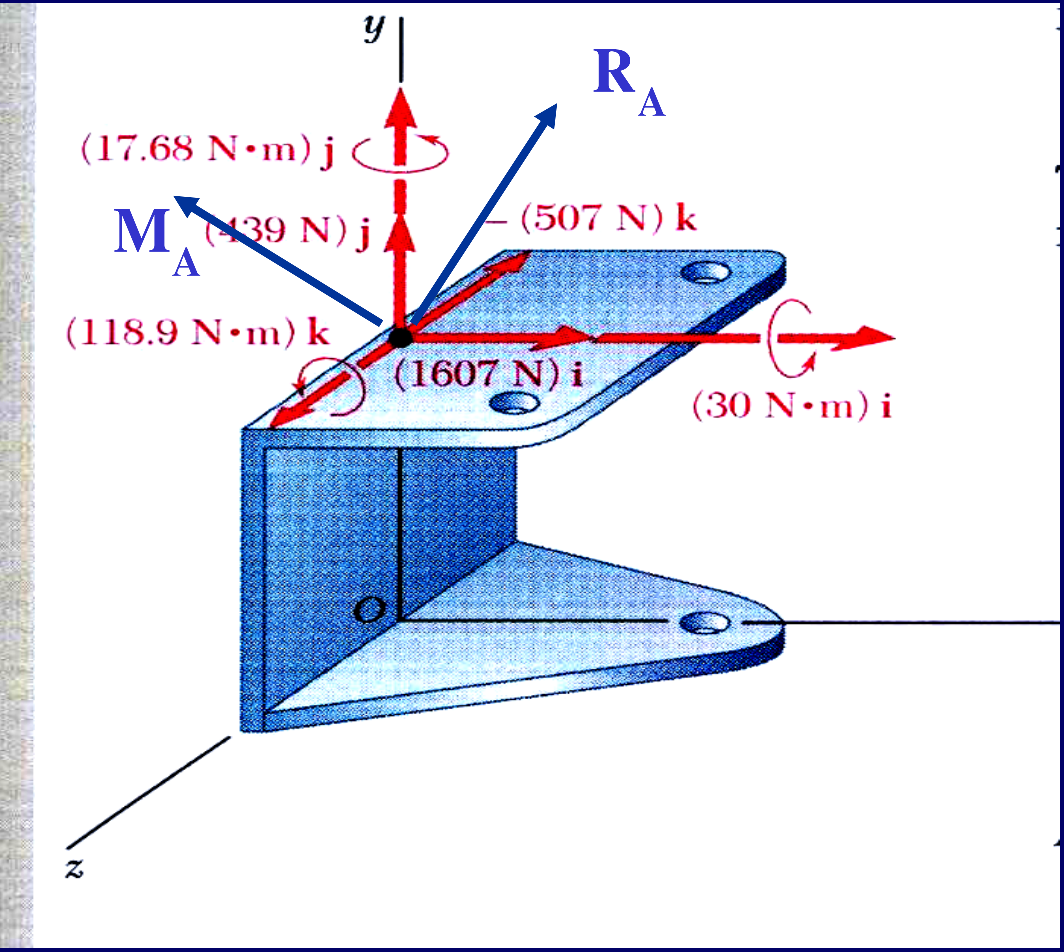
แรงลัพท์ที่ A ; $\overline{R} = \sum \overline{F} = \overline{F}_B + \overline{F}_C + \overline{F}_D$

$\overline{R} = 1607i + 439j - 507k = 1741.3$ N

โมเมนต์ที่ A ; $\overline{M}^R_A = \sum (\overline{r} \times \overline{F}) = (\overline{r}_B \times \overline{F}_B) + (\overline{r}_C \times \overline{F}_C) + (\overline{r}_D \times \overline{F}_D)$

$\overline{M}^R_A = 30i + 17.68j + 118.9k$; $M^R_A = 123.9$ N ฐ m

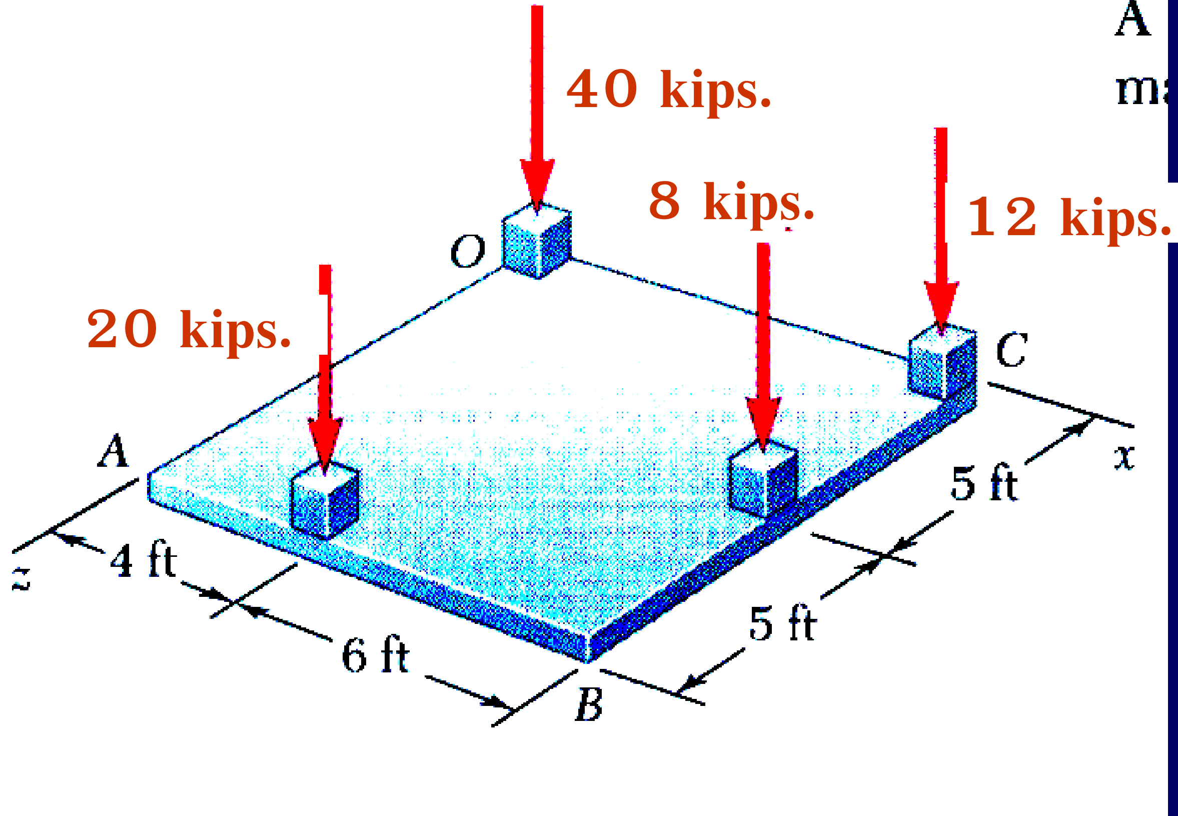
ที่จุด A มีแรง 1 แรง 1741.3 N
โมเมนต์คู่ควบ 1 คู่ 123.9 N ฐ m



หาทิศทางในรูปของ

$\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$

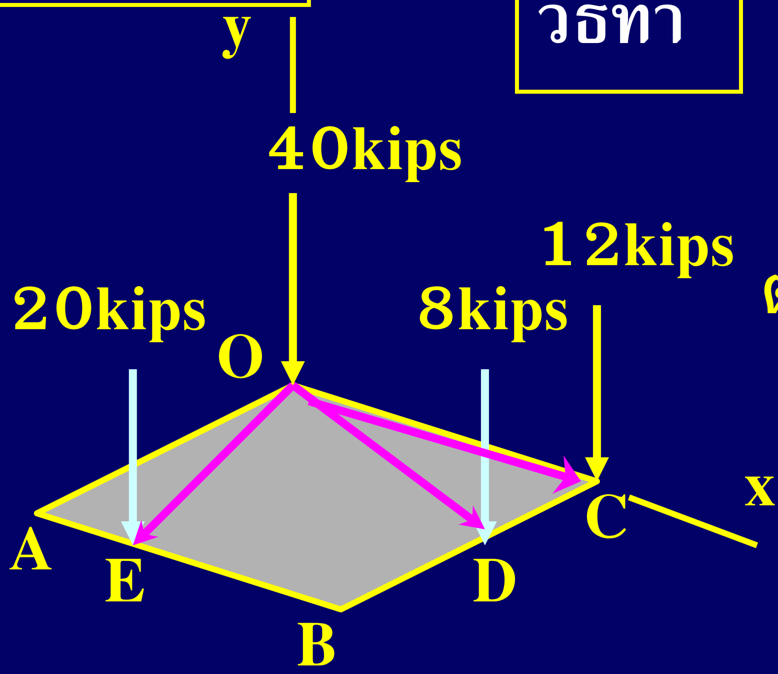
ตัวอย่าง 3.11



ข้อมูล ฐานรากแบบแพ มีเสา 4 ต้น
รับน้ำหนักบรรทุก ดังรูป

ปัญหา ให้หาแรงเดี่ยว 1 แรง ซึ่งสมมูลกับ
ระบบแรงทั้งหมด

ตัวอย่าง 3.11



วิธีทำ

เป้าหมายคือ หาแรงลัพท์ และตำแหน่งแรงลัพท์ ที่ทำให้เหลือแรงเดี่ยว 1 แรง

ตั้งแกน X, Y, Z หา Position Vector ของระยะจาก O มายังแนวแรงต่าง ๆ

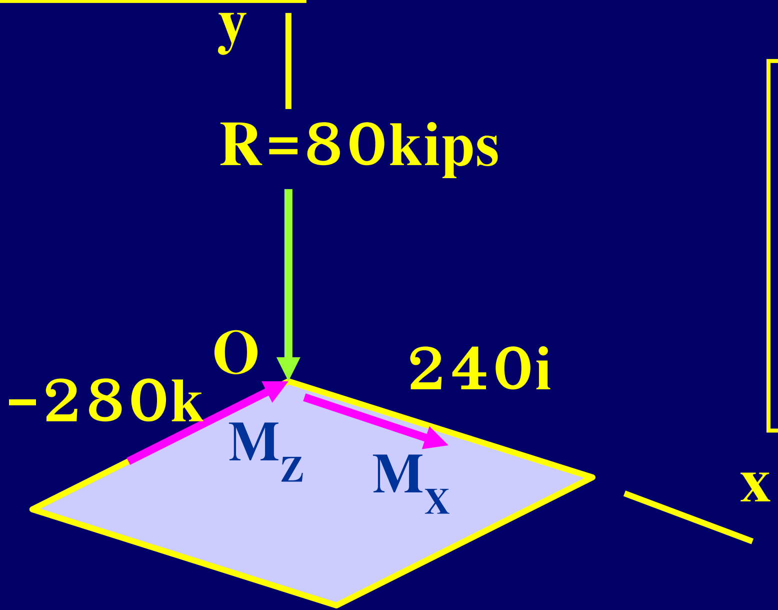
$$\overline{r}_O = 0 \; ; \; \overline{F}_O = -40j$$

$$\overline{r}_C = 10i \; ; \; \overline{F}_C = -12j$$

$$\overline{r}_D = 10i+5k \; ; \; \overline{F}_D = -8j$$

$$\overline{r}_E = 4i + 10k \; ; \; \overline{F}_E = -20j$$

ตัวอย่าง 3.11

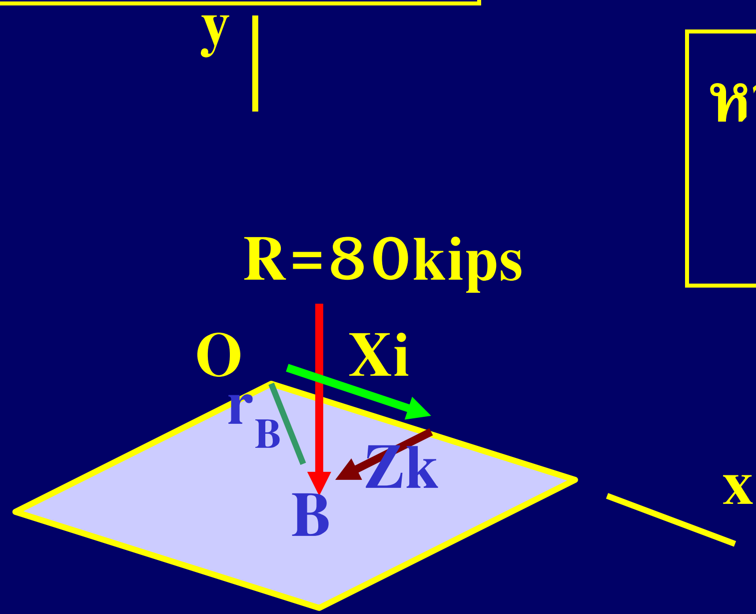


พิจารณาที่จุด O

$\overline{R} = \sum \overline{F} = -80j$

$\overline{M}^R_O = \sum (\overline{r} \times \overline{F}) = 240i - 280k$

ตัวอย่าง 3.11



หาจุดที่ โมเมนต์เป็น O สมมุติอยู่ที่จุด B

$\overline{r}_B = Xi+Zk$

$\overline{r}_B \text{ X } \overline{R} = \overline{M}^R_O$

$(Xi+Zk) \text{ X } (-80j) = 240i - 280k$

$-80Xk + 80Zi = 240i - 280k$

จับคู่ i และ คู่ k

$-80 X = -280$; $X = 3.50$ ft

$80Z = 240$; $Z = 3.00$

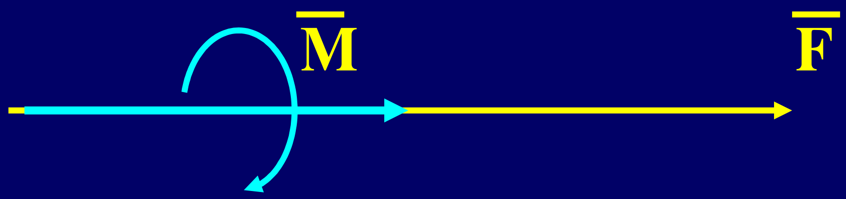
แรงเดี่ยว 1 แรงที่สมมูลมีค่า 80 kip.

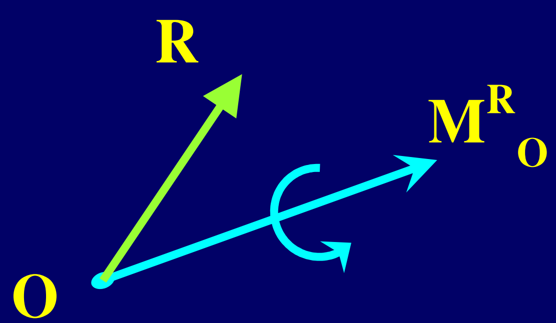
กระทำที่พิกัด B(3.50 ft, 0, 3.00 ft) ตอบ

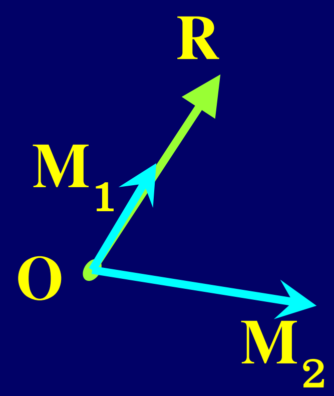
WRENCH

เป็นระบบแรงที่มีลักษณะเหมือนไขควงหมุนตาปูเกลียว

คือ มีแรงบิด(แรงคู่ควบ) และแรงพุ่งตามกฎมือขวา







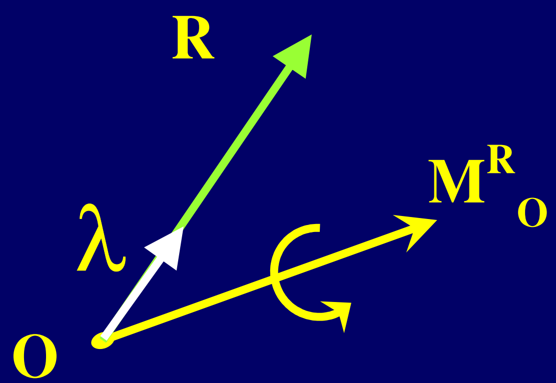
เกิดจากทิศทางโมเมนต์ กับทิศทางแรงเดี่ยวไม่ตั้งฉากกัน ทำให้สามารถแตกค่าโมเมนต์เป็นโมเมนต์ย่อยคู่ฉาก

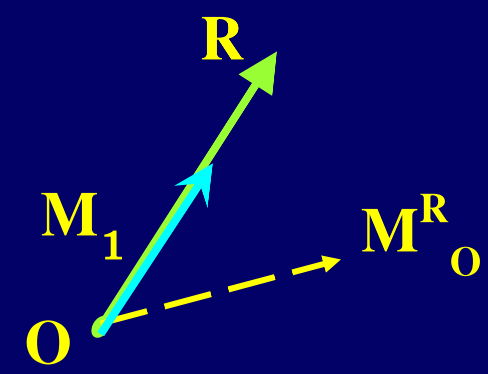
โมเมนต์ย่อยส่วนหนึ่งตั้งฉากกับแรงเดี่ยว

อีกส่วนหนึ่งทาบไปกับแรงเดี่ยว

ส่วนที่ทาบไปกับแรงเดี่ยวทำให้เกิดลักษณะที่เรียกว่า WRENCH อัตราส่วนระหว่างโมเมนต์ต่อแรง เรียกว่า Pitch of Wrench

WRENCH





ให้ $\bar{\lambda}$ เป็น Unit Vector ในแนว R

$\bar{\lambda} = \bar{R}/R$

Projection ของ $\bar{M}^R_O$ ในแนว $\bar{R}$ คือ M_1

$M_1 = \bar{M}^R_O \cdot \bar{\lambda} = \bar{M}^R_O \cdot (\bar{R}/R)$

$$\boxed{\text{Pitch of Wrench} = M_1/R = \bar{M}^R_O \cdot (\bar{R}/R)/(R) = \bar{M}^R_O \cdot \bar{R}/R^2}$$

จบบทที่ 3