สมดุลของวัตถุคงรูป

บทที่ 4 สมดุลของวัตถุคงรูป

สมดุล

หมายถึง สภาวะของแรงที่แตกต่างกันทั้งขนาดและทิศทาง แต่พฤติกรรมสุดท้ายของแรงเหล่านั้นจะหักล้างกันหมด

เนื้อหา

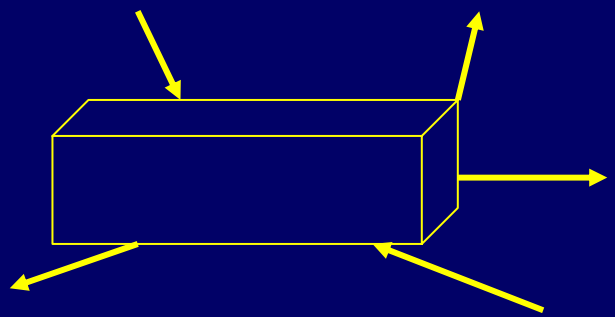
4.1 วัตถุคงรูปในสภาวะสมดุล
4.2 แผนภาพวัตถุอิสระ
4.3 ปฏิกิริยาที่จุดรองรับและจุดต่อในโครงสร้าง 2 มิติ
4.4 สมดุลของวัตถุคงรูปใน 2 มิติ
4.5 Statically indeterminate reaction & Partial constrains
4.6 สมดุลของวัตถุคงรูปภายใต้การกระทำของแรง 2 แรง
4.7 สมดุลของวัตถุคงรูปภายใต้การกระทำของแรง 3 แรง
4.8 แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ และจุดต่อในโครงสร้าง 3 มิติ
4.9 สมดุลของวัตถุคงรูปใน 3 มิติ

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาหรือคำนวณหาค่าแรงต่าง ๆ
ที่จะทำให้
วัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล
เพื่อประโยชน์ในการออกแบบส่วนประกอบโครงสร้าง
ให้เกิดประโยชน์ในการใช้งานได้เต็มที่และปลอดภัย

4.1 วัตถุคงรูปในสภาวะสมดุล

ระบบแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุนั้นมีแรงลัพท์เท่ากับ 0



$$\sum F = 0 \qquad \sum M = \sum (\bar{r} \times \bar{F}) = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

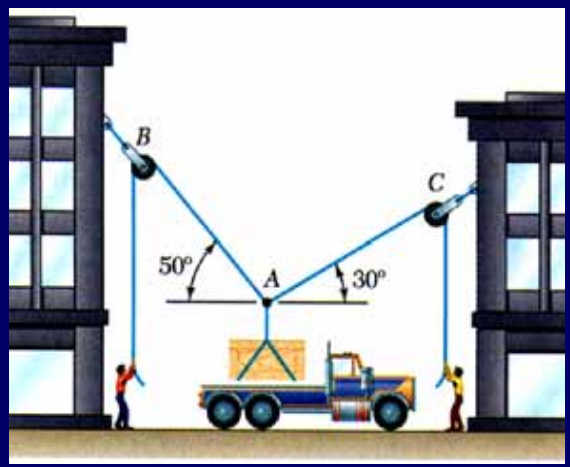
4.2 แผนภาพวัตถุอิสระ (Free Body Diagram ; FBD)

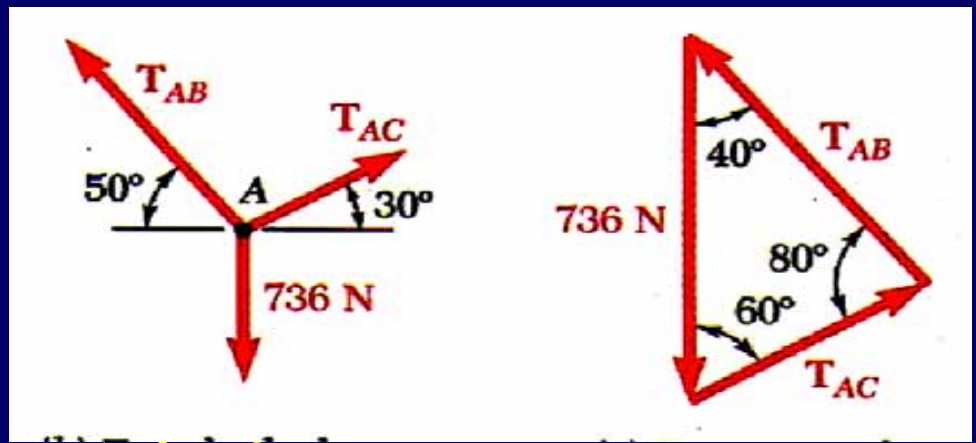
เป็นการเขียนภาพแสดงพฤติกรรมเชิงเส้นของแรง แทนรูปภาพที่ปรากฏ

จะเขียนแผนภาพทั้งหมด

หรือแยกเขียนบางส่วนก็ได้ตามความจำเป็น

ข้อสำคัญ จะต้องใส่แรงให้ครบทุกแรง





สมดุลวัตถุคงรูป

ใน 2 มิติ

4.3 แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับและจุดซึ่งติดต่อกัน สำหรับโครงสร้างแบบ 2 มิติ

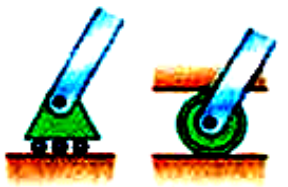
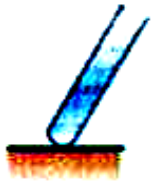
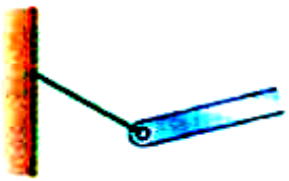
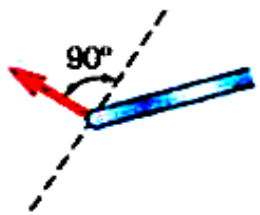
เมื่อมีระบบแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุ

จะมีแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับหรือจุดต่อเนื่องต่าง ๆ

แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้น มี 3 ลักษณะ ดังนี้

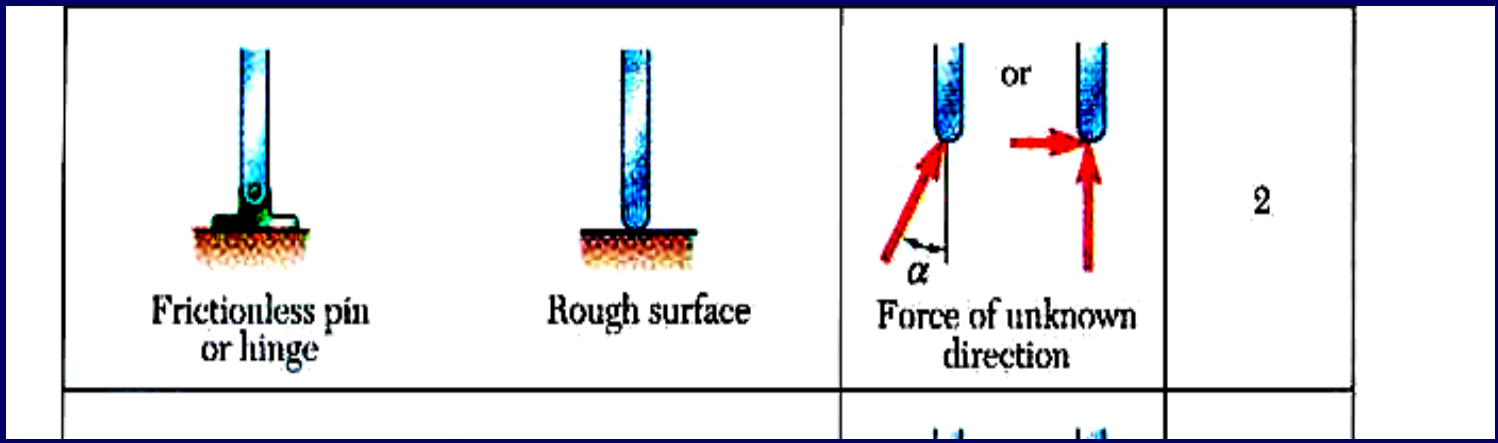
1. แรงปฏิกิริยา 1 แรง ไม่รู้ขนาด รู้แนวกระทำ

1 Unknown

Support or Connection	Reaction	Number of Unknowns
 Rollers Rocker  Frictionless surface	Force with known line of action	1
 Short cable Short link	Force with known line of action	1
Collar on frictionless rod Frictionless pin in slot	 Force with known line of action	1

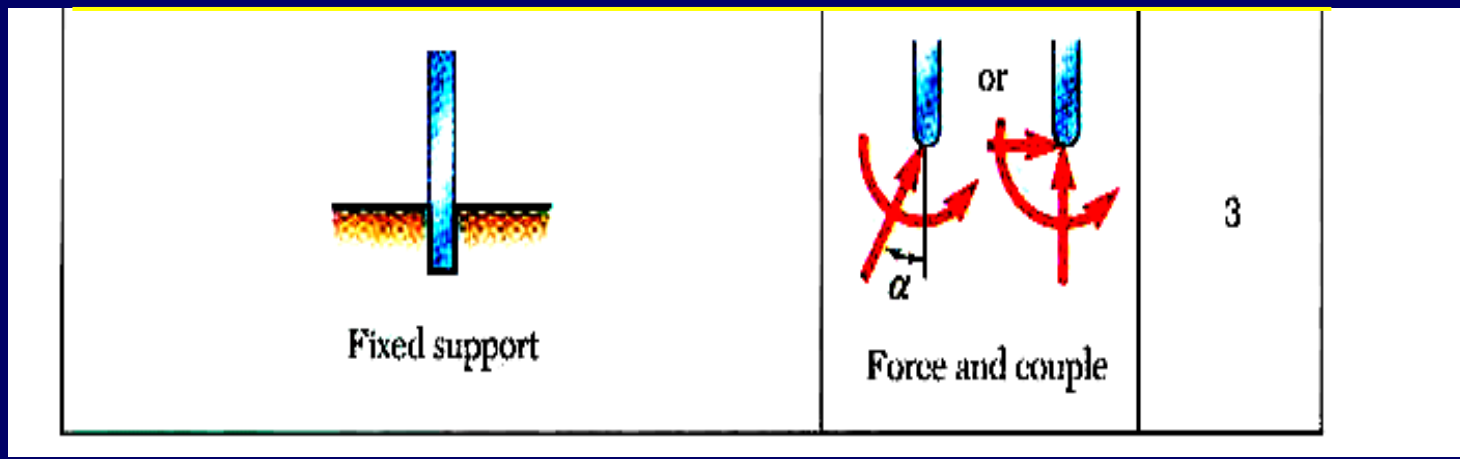
2. แรงปฏิกิริยา 1 แรง ไม่รู้ขนาด ไม่รู้แนวกระทำ

2 Unknown



3. แรงปฏิกิริยา 1 แรง ไม่รู้แนว โมเมนต์คู่ควบ 1 คู่

3 Unknown



4.4 สมดุลของวัตถุคงรูปใน 2 มิติ

สมดุลของวัคถุคงรูปใน 2 มิติ จะมีสมการสมดุล 3 สมการ คือ

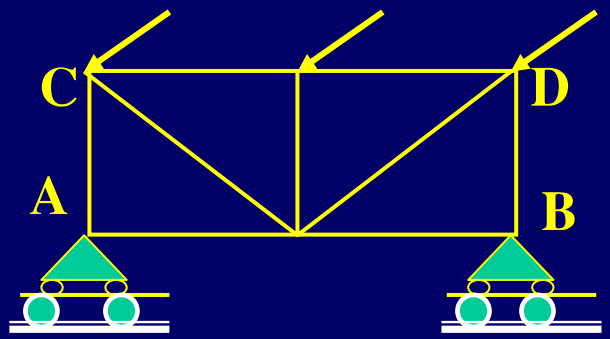
$$\sum F_X = 0$$

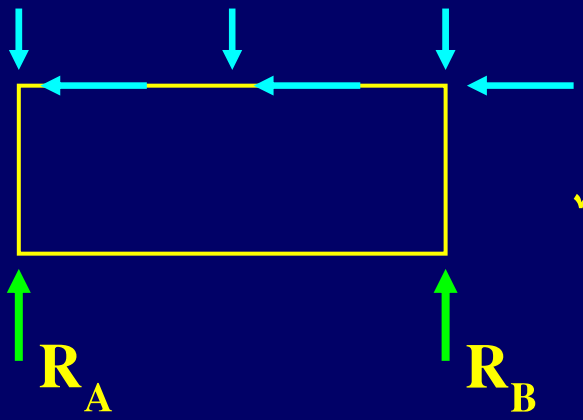
$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum M = 0$$

ทำให้สามารถหาค่า Unknown ได้ ไม่เกิน 3 ค่า

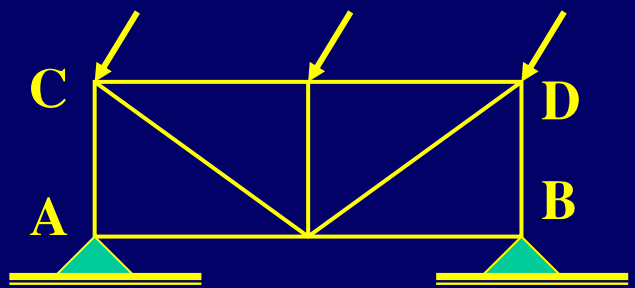
วัตถุคงรูปบางลักษณะไม่สามารถหาค่า Unknown ได้ด้วยสมการสมดุลปกติ (Indeterminate) เช่น

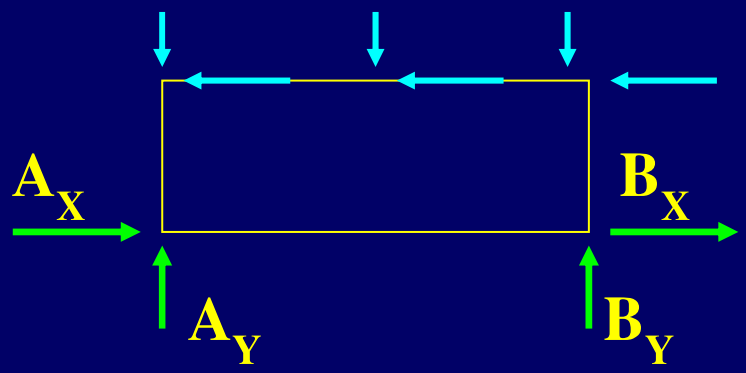




ไม่สมดุล

มี Unknown มากกว่าสมการ



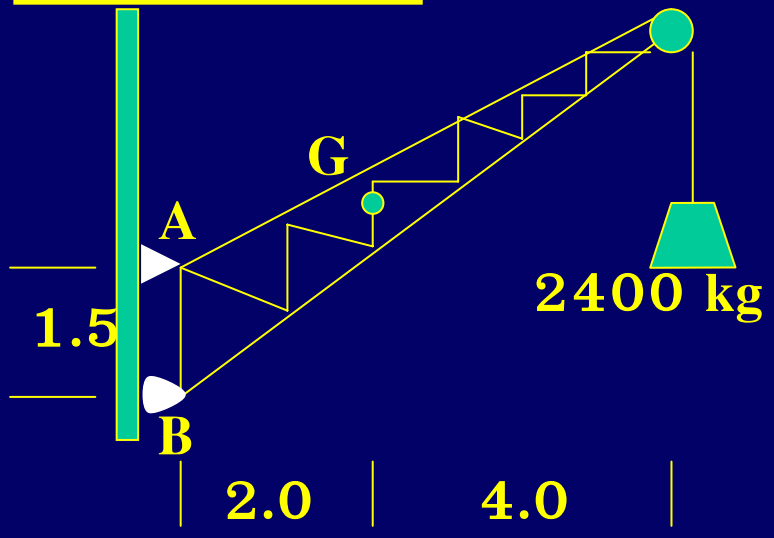


สมดุล

แต่ Unknown

มากกว่า 3 ตัว

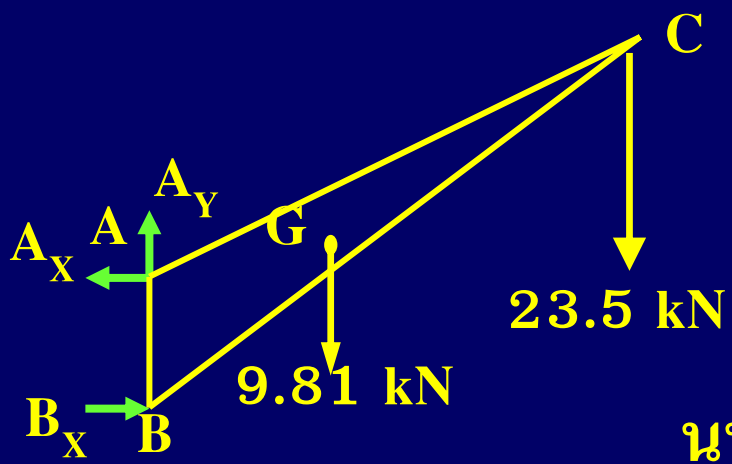
ตัวอย่าง 4.1



ข้อมูล ปั้นจั่นตรึง มีมวล 1000 kg ยกหีบหนัก 2400 kg ยึดด้วย pin ที่ A และ Rocker ที่ B

ปัญหา ให้หาแรงปฏิกิริยาที่ A และ B

วิธีทำ



เขียน FBD แสดงแรงต่าง ๆ

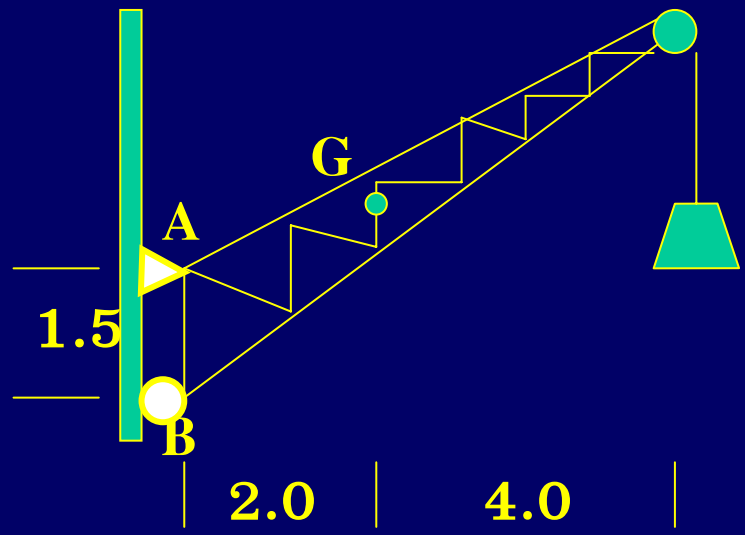
นน.หีบ = (9.81x2400)/1000

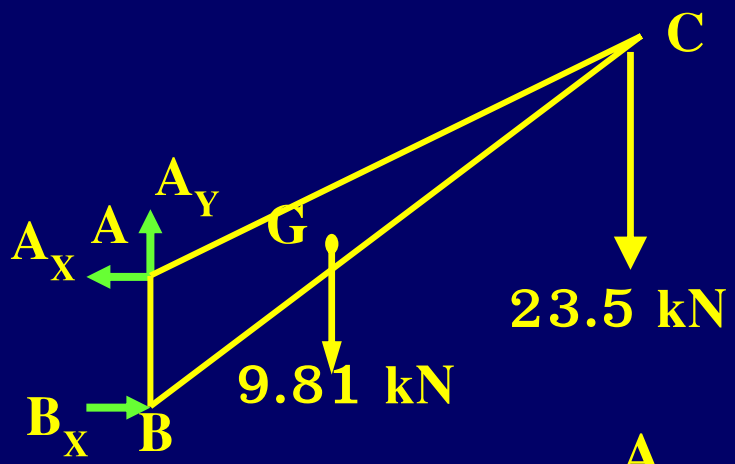
= 23.5 kN

นน. ปั้นจั่น = (9.81x1000)/1000 kN

= 9.81 kN

ตัวอย่าง 4.1



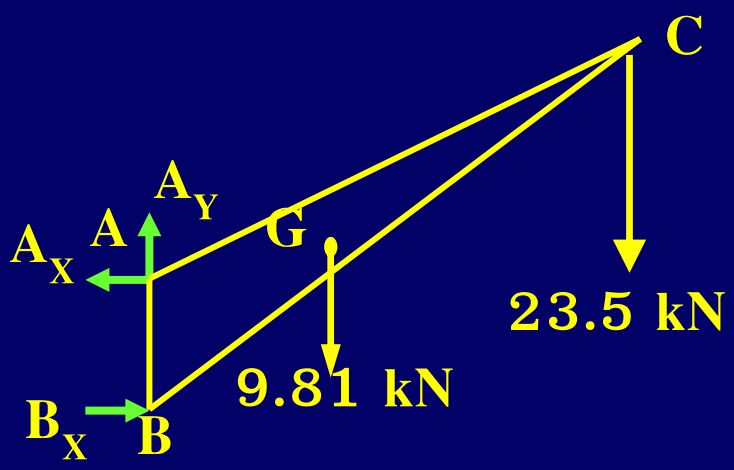


แรงปฏิกิริยา ที่ต้องการหา คือ

A_X, A_Y เป็นแรงย่อย 2 แรง เพราะเป็น Pin

B_X มีแรงย่อยตัวเดียว เพราะเป็น Rocker

ตัวอย่าง 4.1



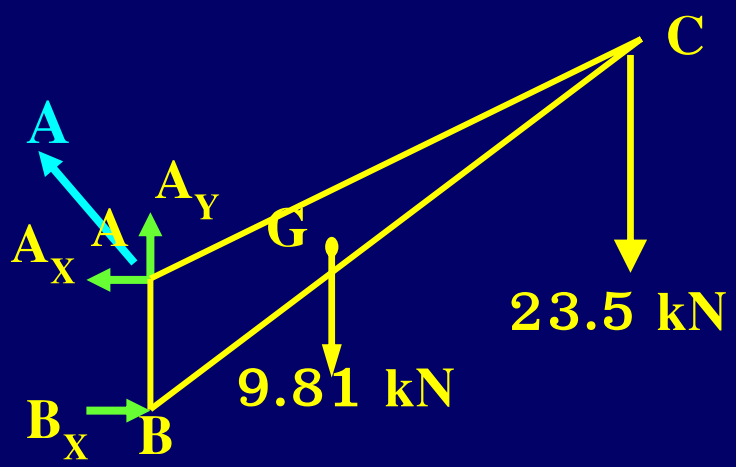
หา B_X

$$\sum M_A = 0$$

$$B_X(1.5m)-(9.81)(2m)-(23.5)(6m) = 0$$

$$B_X = +107.1\ kN$$

ตัวอย่าง 4.1



หา A_X

$$\sum F_X = 0$$

$$A_X + B_X = 0$$

$$A_X + 107.1 = 0$$

$$A_X = -107.1 \text{ kN}$$

หา A_Y

$$\sum F_Y = 0$$

$$A_Y - 9.81 - 23.5 = 0$$

$$A_Y = 33.3$$

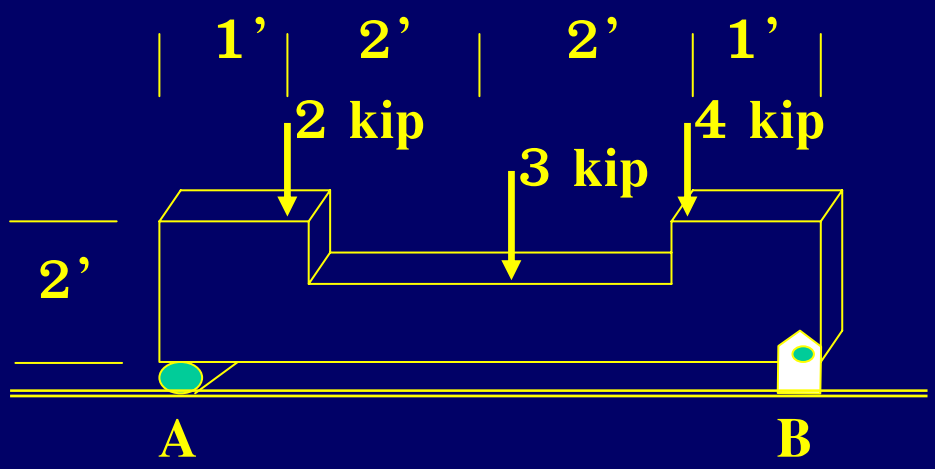
$$A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2}$$

$$= \sqrt{107.1^2 + 33.3^2}$$

$$= 112.2 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}(A_Y/A_X) = 17.3^\circ$$

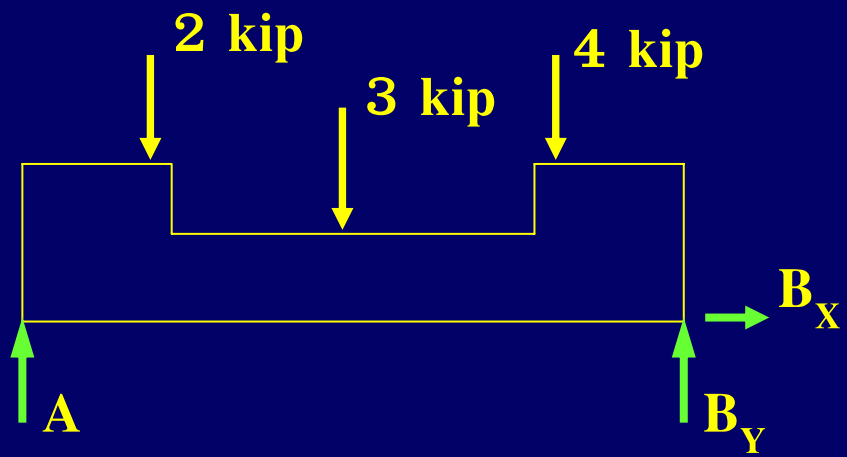
ตัวอย่าง 4.2



ข้อมูล

น้ำหนักบรรทุกกระทำต่อแผ่นเหล็ก ดังรูป

จุด A เป็นจุดรองรับแบบ Roller จุด B เป็น Pin

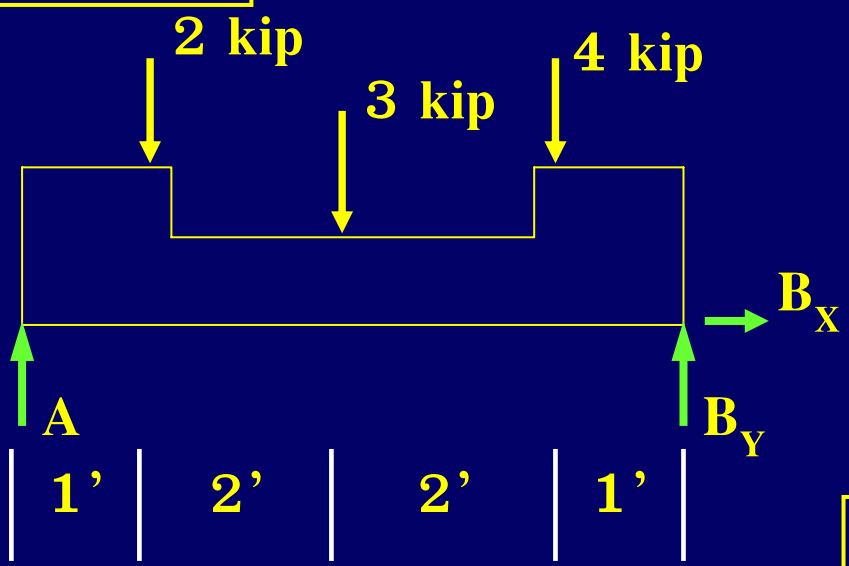


ปัญหา

ให้หาแรงปฏิกิริยาที่ A และ B

วิธีทำ เขียน FBD

ตัวอย่าง 4.2



ที่ A เป็น Roller มีแรงปฏิกิริยาในแนวแกน Y เท่านั้น (A)

ที่ B เป็น pin จะมีแรงปฏิกิริยาทั้ง 2 แนวแกน (B_X, B_Y)

$$\sum F_X = 0 \; ; \quad B_X = 0$$

เทคโมเมนต์ที่ A ; $\sum M_A = 0$

$B_Y(6)-2(1)-3(3)-4(5) = 0$

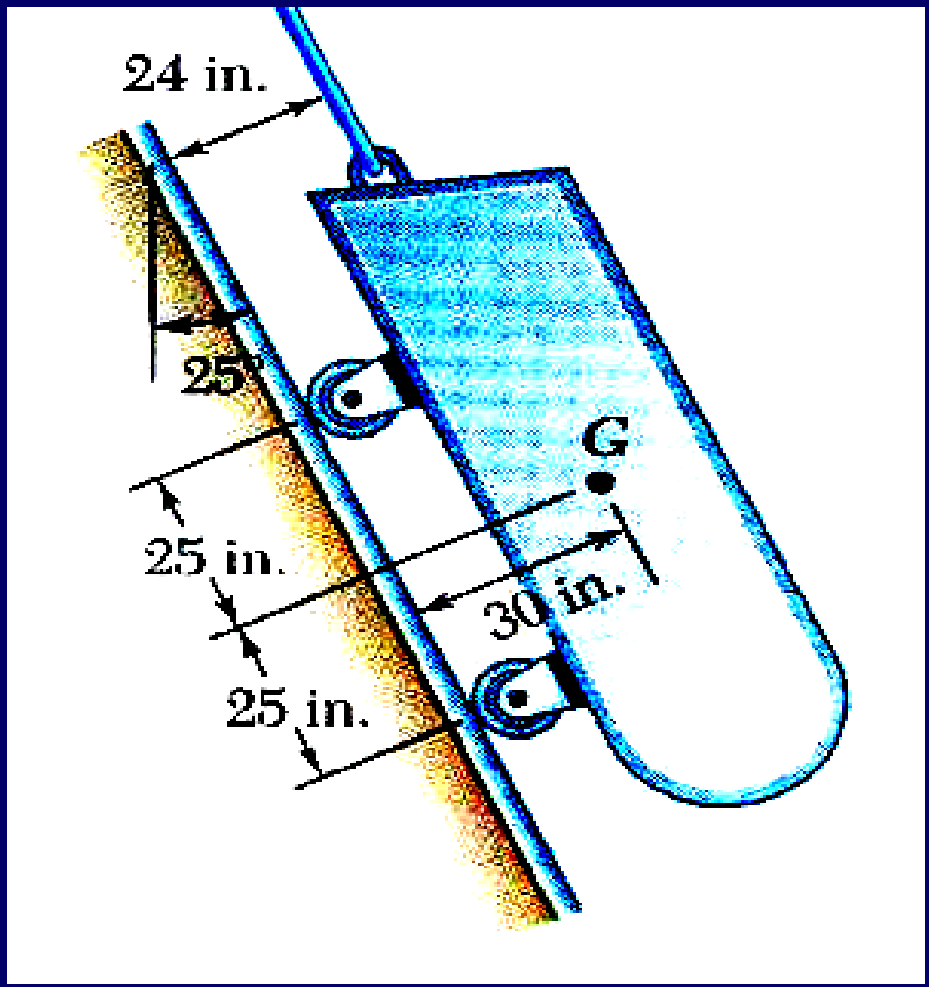
$B_Y = 5.17$ kip ↑

$$\sum F_Y = 0$$

$A+B_Y-2-3-4 = 0$

$A = 38.3$ kip ↑

ตัวอย่าง 4.3



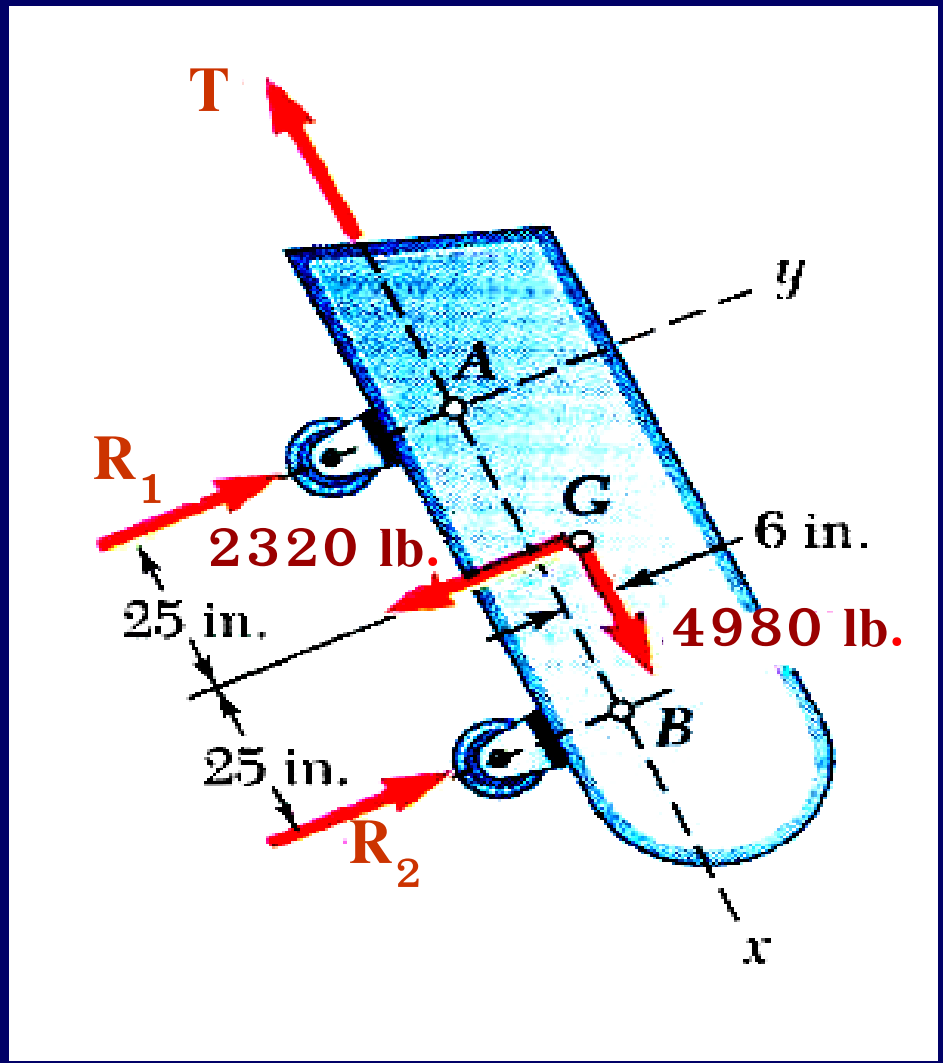
ข้อมูล

รถบรรทุกของ อยู่นิ่งบนพื้นเอียง ทำมุมกับแนวดิ่ง 25ฐ หนัก 5500 lb ลงที่ตำแหน่งจุด G ถูกดึงไว้ด้วยเคเบิล ดังรูป

ปัญหา

ให้หาแรงดึงในเคเบิล และแรงปฏิกิริยาที่ล้อแต่ละคู่

ตัวอย่าง 4.3



วิธีทำ

เขียน FBD ตั้งแกน X,Y ให้

แกน X อยู่ในแนวแกนรถ

ผ่านสายเคเบิล T

แกน Y ผ่านล้อหน้า

แยกน้ำหนัก 5500 lb

ที่ G เข้าสู่แกน X, Y

$W_X = 4980$ lb

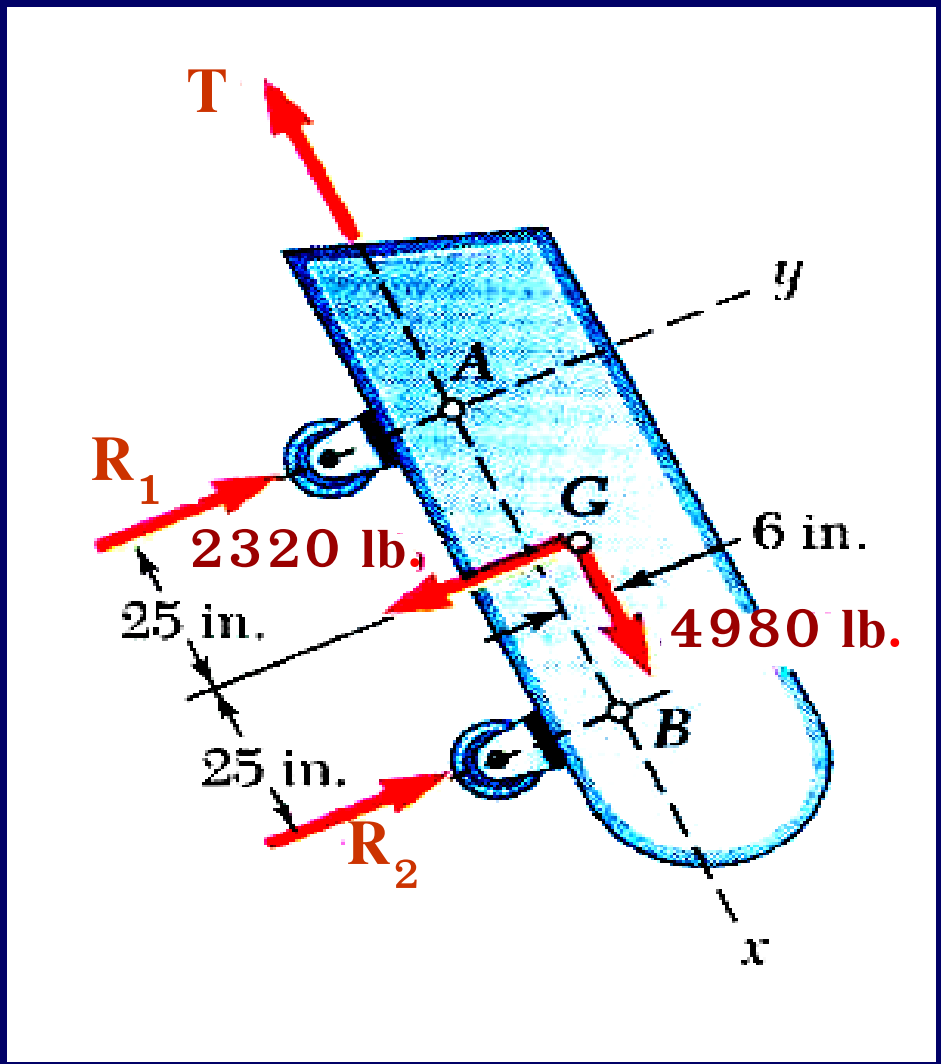
$W_Y = -2320$ lb

ตัวอย่าง 4.3

$$\sum M_A = 0$$

$$-(2320)(25)-(4980)(6)+50R_2 = 0$$

$$R_2 = 1758 \text{ lb}$$



$$\sum F_Y = 0$$

$$R_1 + R_2 -(2320) = 0$$

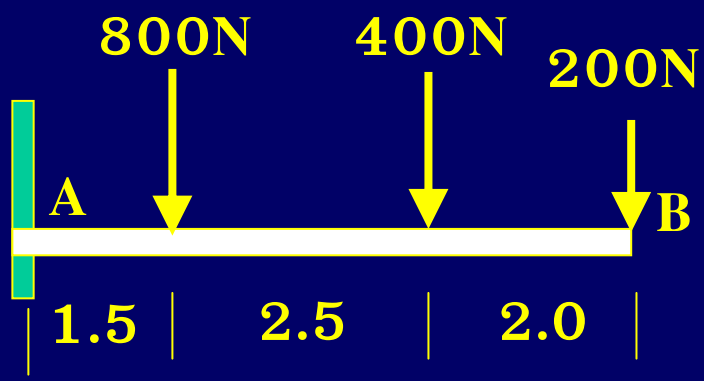
$$R_1 = 562 \text{ lb}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-T +(4980) = 0$$

$$T = 4980 \text{ lb}$$

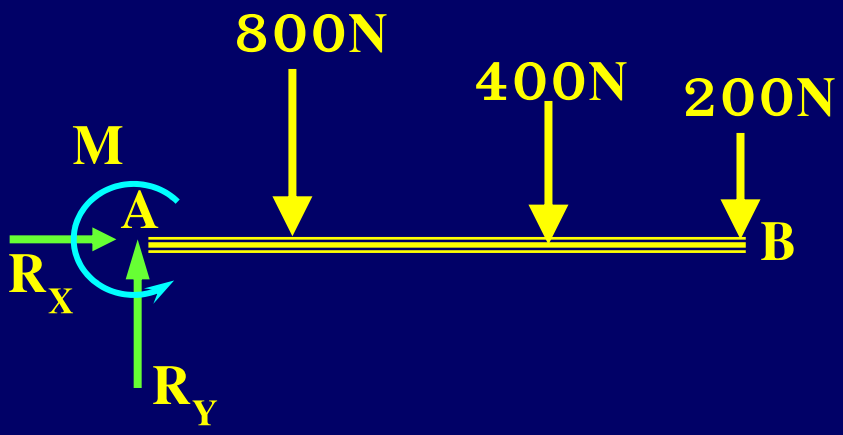
ตัวอย่าง 4.4



ข้อมูล คานยื่น AB ยึดแน่นที่ปลาย A มีแรงกระทำดังรูป

ปัญหา หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A

วิธีทำ เขียน FBD



แรงปฏิกิริยาประกอบด้วย R_X, R_Y, M

$$\sum F_X = 0$$

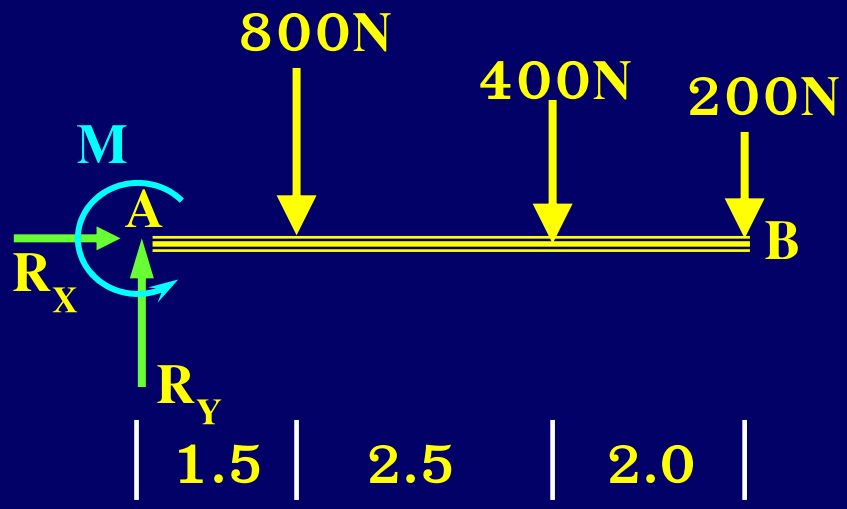
$$R_X = 0$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_Y - 800 - 400 - 200 = 0$$

$$R_Y = 1400 \text{ N}$$

ตัวอย่าง 4.4



หาโมเมนต์ปฏิกิริยา M ที่ A

$$\Sigma M_A = 0$$

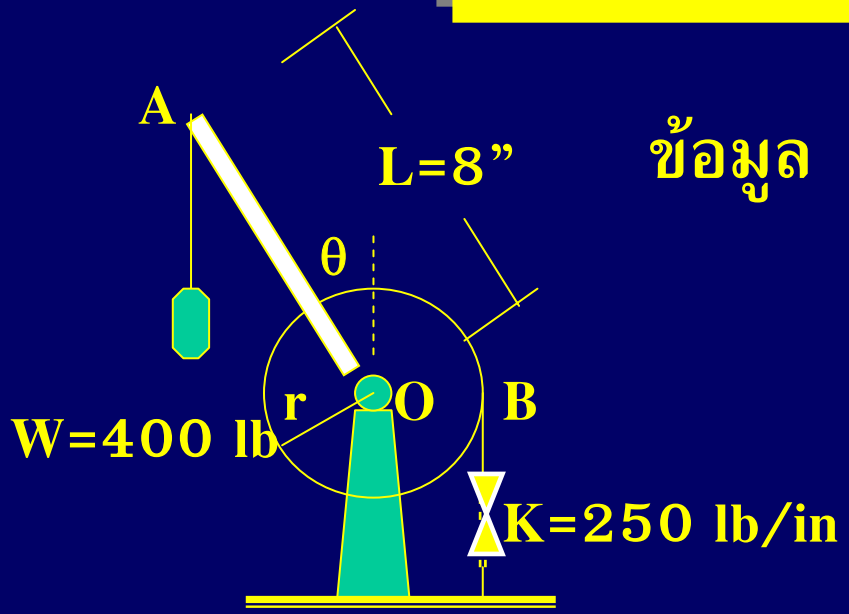
$$-(800)(1.5)-(400)(4)-(200)(6)+M = 0$$

$$M = 4000 \text{ N ฐ m}$$

แรงปฏิกิริยาที่ A = 1400 N ↑

โมเมนต์ปฏิกิริยาที่ A = 4000 N ฐ m ↺

ตัวอย่างที่ 4.5



ข้อมูล นน.400 lb แขวนบนคานโยก AO

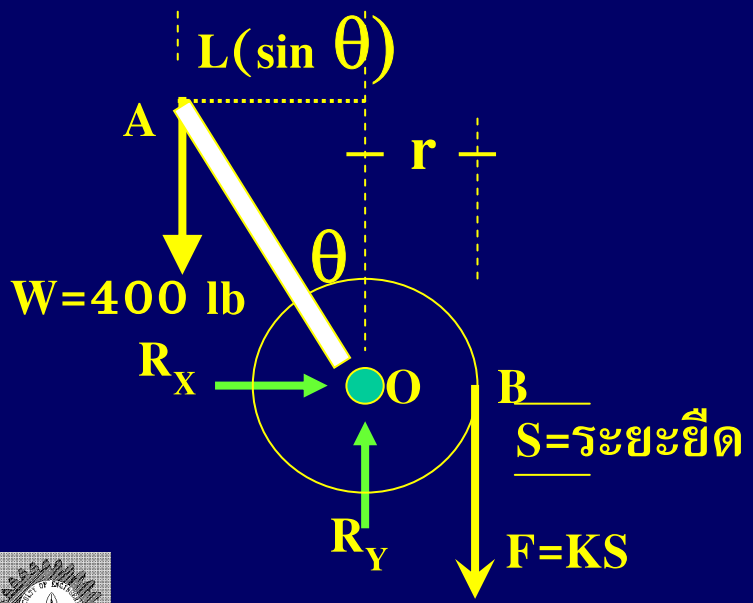
ค่าคงที่ของสปริง K=250 lb/in

สปริงไม่ถูกยืดเมื่อ $\theta = 0$

ปัญหา ให้หาตำแหน่งคาน ซึ่งทำให้เกิดสภาวะสมดุล

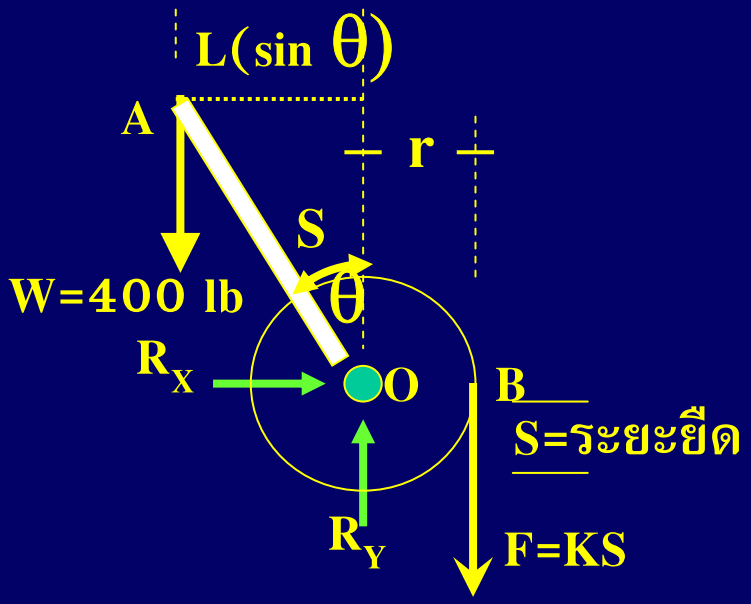
วิธีทำ

เขียน FBD เมื่อสปริงยืดออก S



การหาตำแหน่งก็คือ หาค่ามุม θ

ตัวอย่างที่ 4.5



ระยะยืดของสปริงสัมพันธ์กับมุม

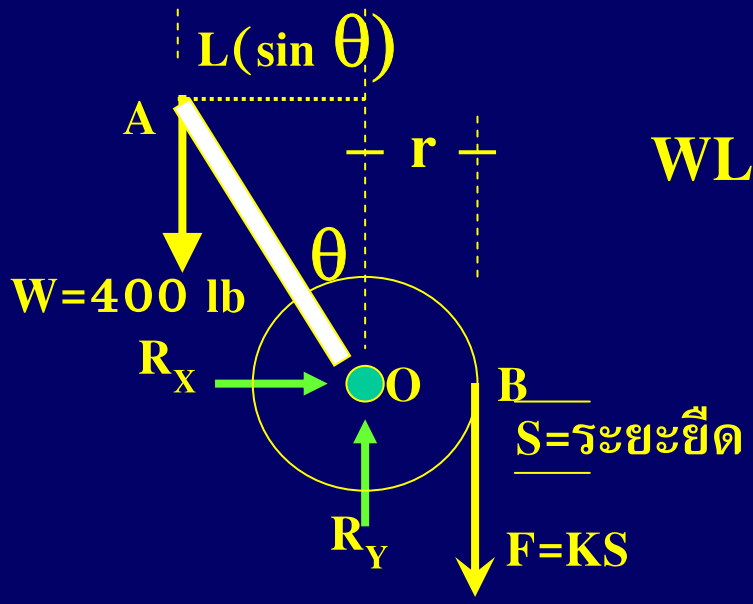
$S = r(\theta\pi/180)$

$(\theta\pi/180$ เป็นเรเดียน)

$F = KS = K(r\ \theta\pi/180\ )$

ระยะในแนวราบ AO เท่ากับ $L(\sin\theta)$

ตัวอย่างที่ 4.5



$$\Sigma M_O = 0$$

$$WL(\sin\theta) - r\,F = 0$$

$$WL(\sin\theta) - r\,K(r\,\theta\pi/180) = 0$$

$$WL(\sin\theta) = r\,K(r\,\theta\pi/180)$$

$$= Kr^2\,\theta\pi/180$$

$$\sin\theta = (Kr^2\,\theta\pi/180)/(WL)$$

ในสมการมี θ อยู่ทั้งสองข้าง

ใช้วิธีลองผิดลองถูก(Trial and Error) หาค่ามุมได้

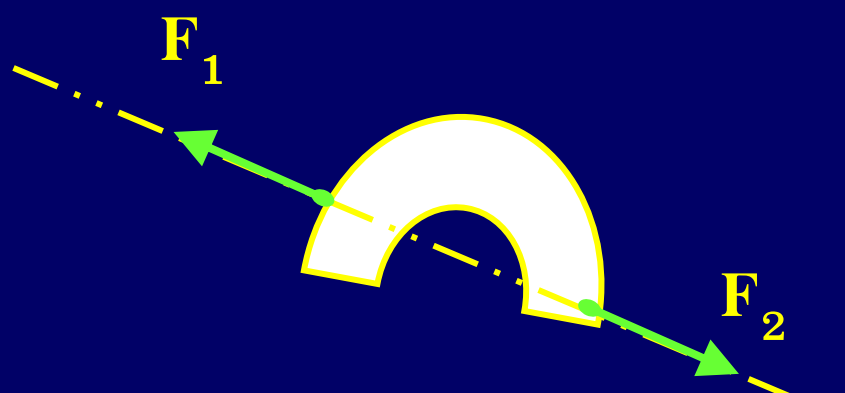
θ = 0ฐ และ 80.3ฐ

4.6 สมดุลของวัตถุคงรูปภายใต้แรง 2 แรง

เมื่อวัตถุคงรูปถูกกระทำด้วยแรงเพียง 2 แรง

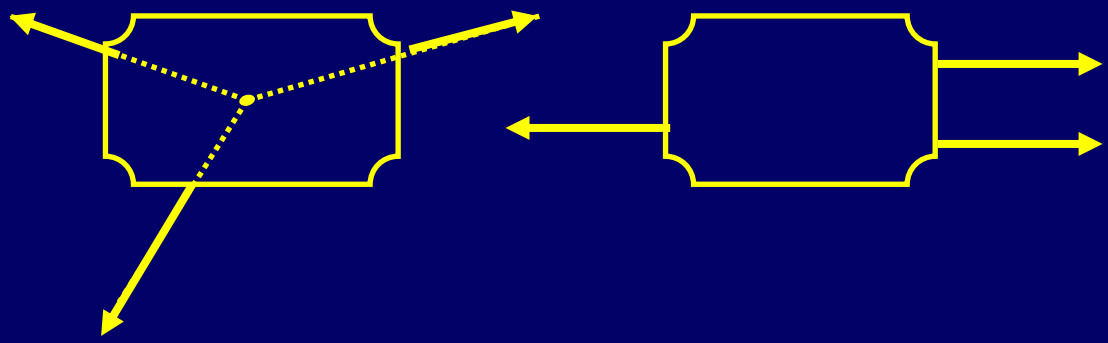
แรง 2 แรงนั้นต้อง

- เท่ากัน มีทิศทางตรงข้ามกัน
- อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน



$$F_1 = F_2$$

4.7 สมดุลของวัตถุคงรูปภายใต้แรง 3 แรง



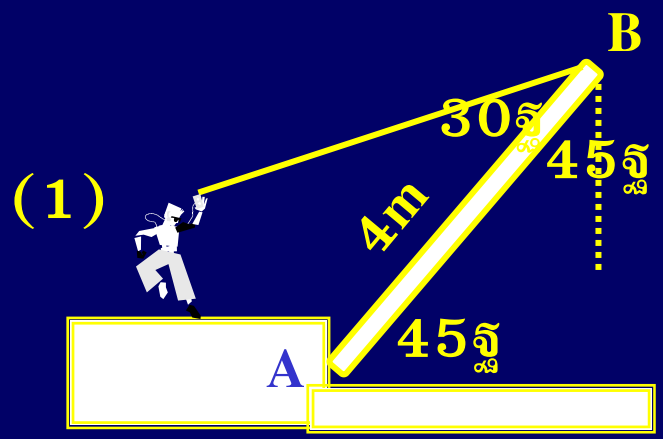
เมื่อวัตถุคงรูปถูกกระทำด้วยแรง 3 แรง

แรง 3 แรงนั้นต้อง

- มีแนวแรงตัดกันที่จุดเดียวกัน หรือไม่ก็ต้องขนานกัน
- ผลรวมของแรงเท่ากับ 0

$$\sum F_X = 0, \quad \sum F_Y = 0, \quad \sum M = 0$$

ตัวอย่าง 4.6

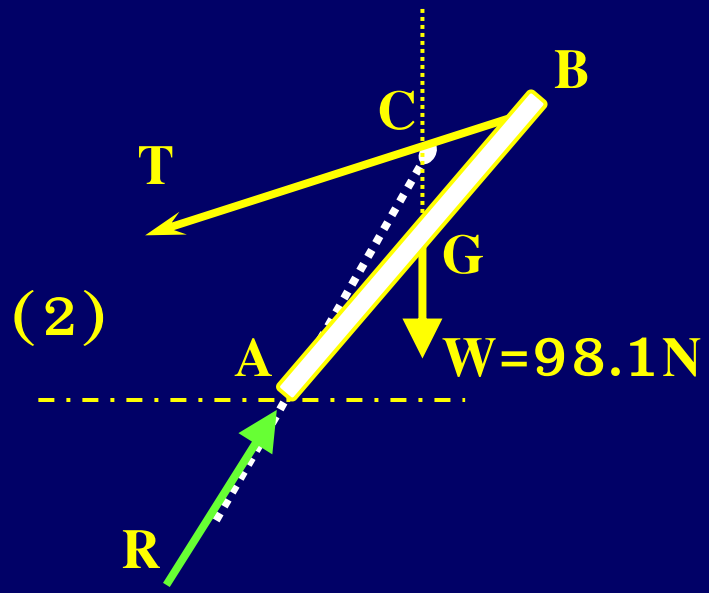


ข้อมูล ชายคนหนึ่ง ดึงเชือกยกท่อนไม้หนัก 10 kg ยาว 4 ม ดังรูป

ปัญหา ให้หาแรงดึงของชายคนนี้ และแรงปฏิกิริยาที่จุด A

วิธีทำ

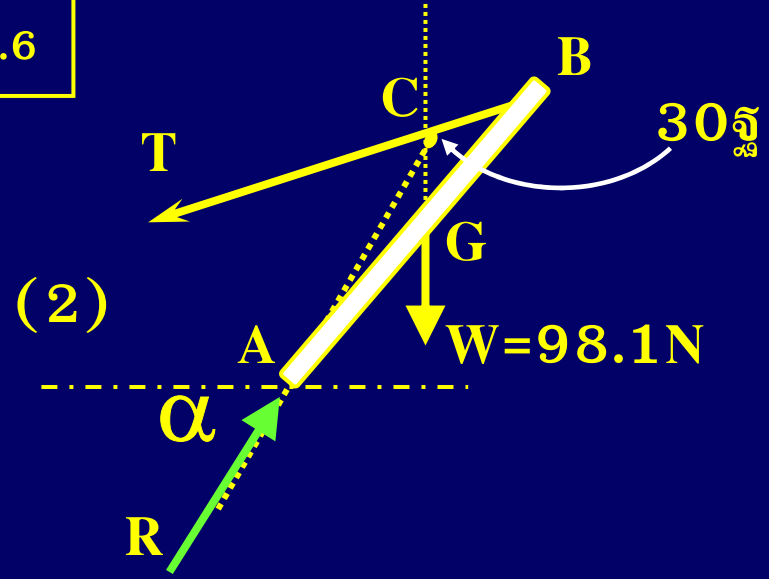
เขียน FBD

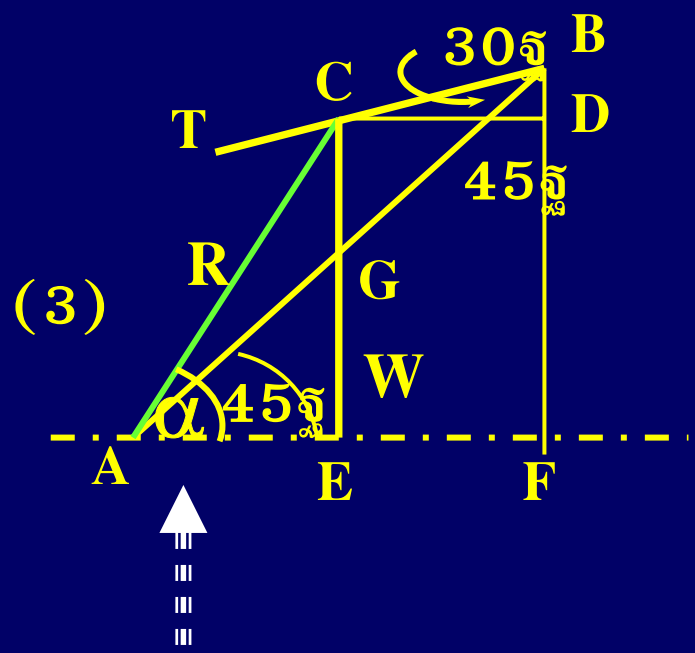


มีแรง 3 แรง ในสภาวะสมดุล คือ T, W, R แรงทั้ง 3 นี้จะต้องพบกันที่จุดเดียวกัน

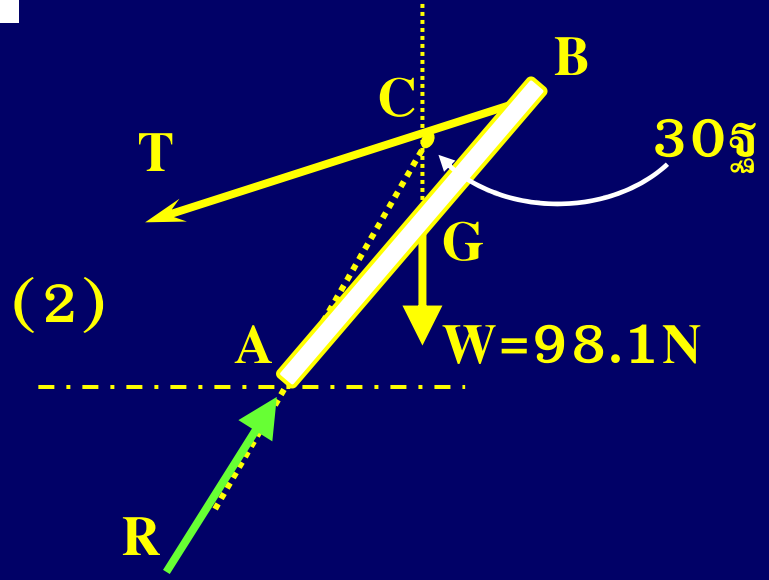
T และ G ตัดกันที่ C ดังนั้น R ต้องผ่าน C ด้วย

ตัวอย่าง 4.6





แสดงว่า R ต้องรู้ทิศทาง
โดยให้ทำมุมกับแนวราบเท่ากับ α
ค่ามุม α หาได้จากรูปที่ (3)



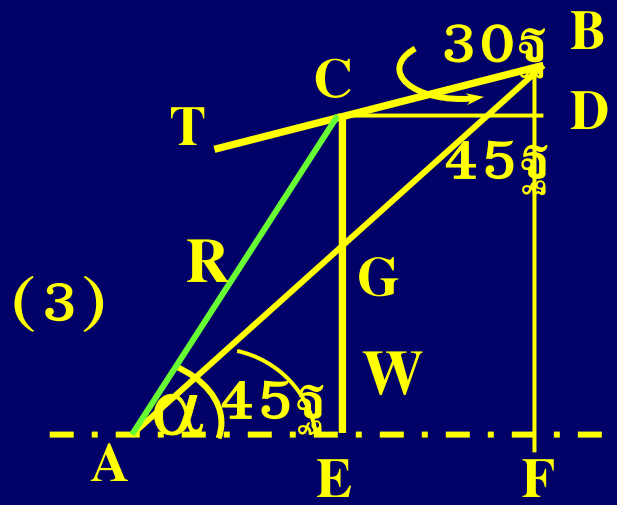
ค่ามุม α หาได้จากรูปที่ (3)

$AF=FB=AB\cos 45^\circ$

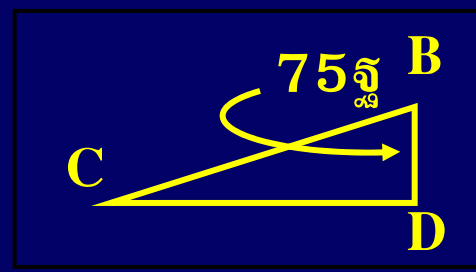
$=4\cos 45^\circ = 2.83$ m

$CD=EF=AE=(1/2)AF$

$=(1/2)(2.82) = 1.415$ m



มุม $CBD = 30+45=75^\circ$



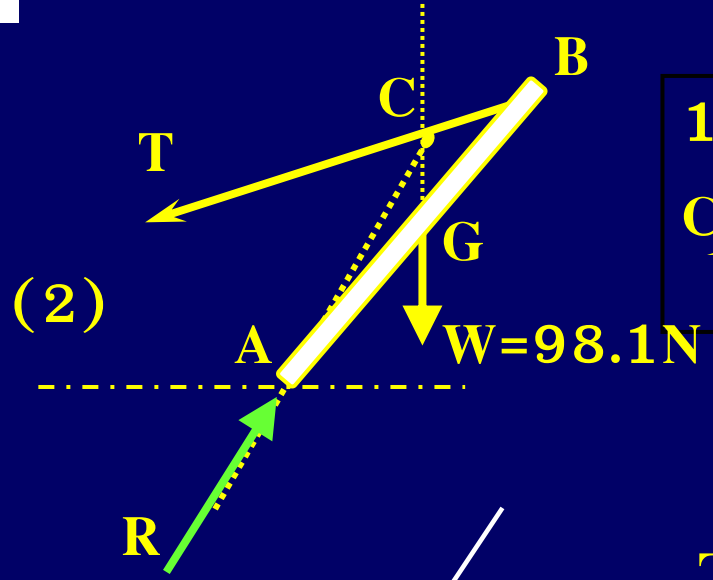
$BD=CD/\tan 75^\circ$

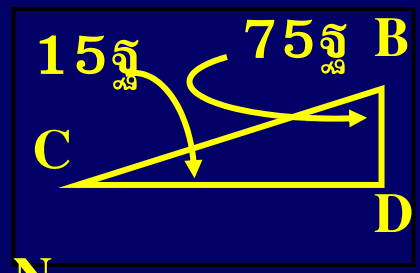
$= 1.415/\tan 75^\circ = 0.379$ m

$CE=DF=FB-BD = 2.83-0.38 = 2.45$ m

$\tan\alpha = CE/AE = 1.732$

$\alpha = 60^\circ$





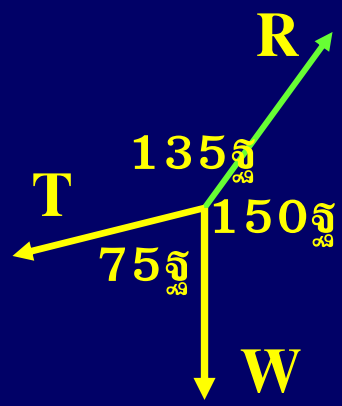
$\alpha = 60$ฐ

ใช้ sine law

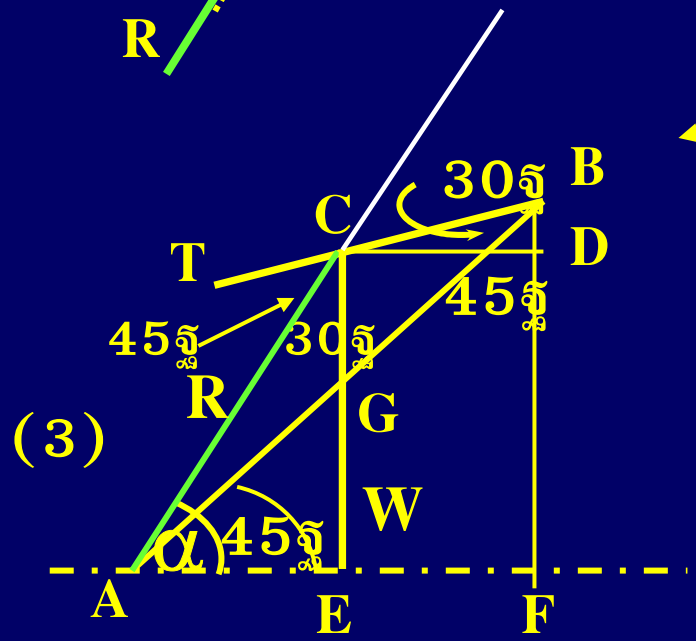
$(T/\sin 150)=(W/\sin 135)$

$T = (W/\sin 135)(\sin 150)$

$T = 69.4$ N



แรงดึง = 69.4 N



$(R/\sin 75)=(W/\sin 135)$

$R = 134$ N

แรงดึงของชายคนนี้ = 69.4 N

แรงปฏิกิริยาที่ A = 134 N

ตอบ

สมดุลวัตถุคงรูป

ใน 3 มิติ

4.8 แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับและจุดต่อเชื่อม สำหรับโครงสร้าง 3 มิติ

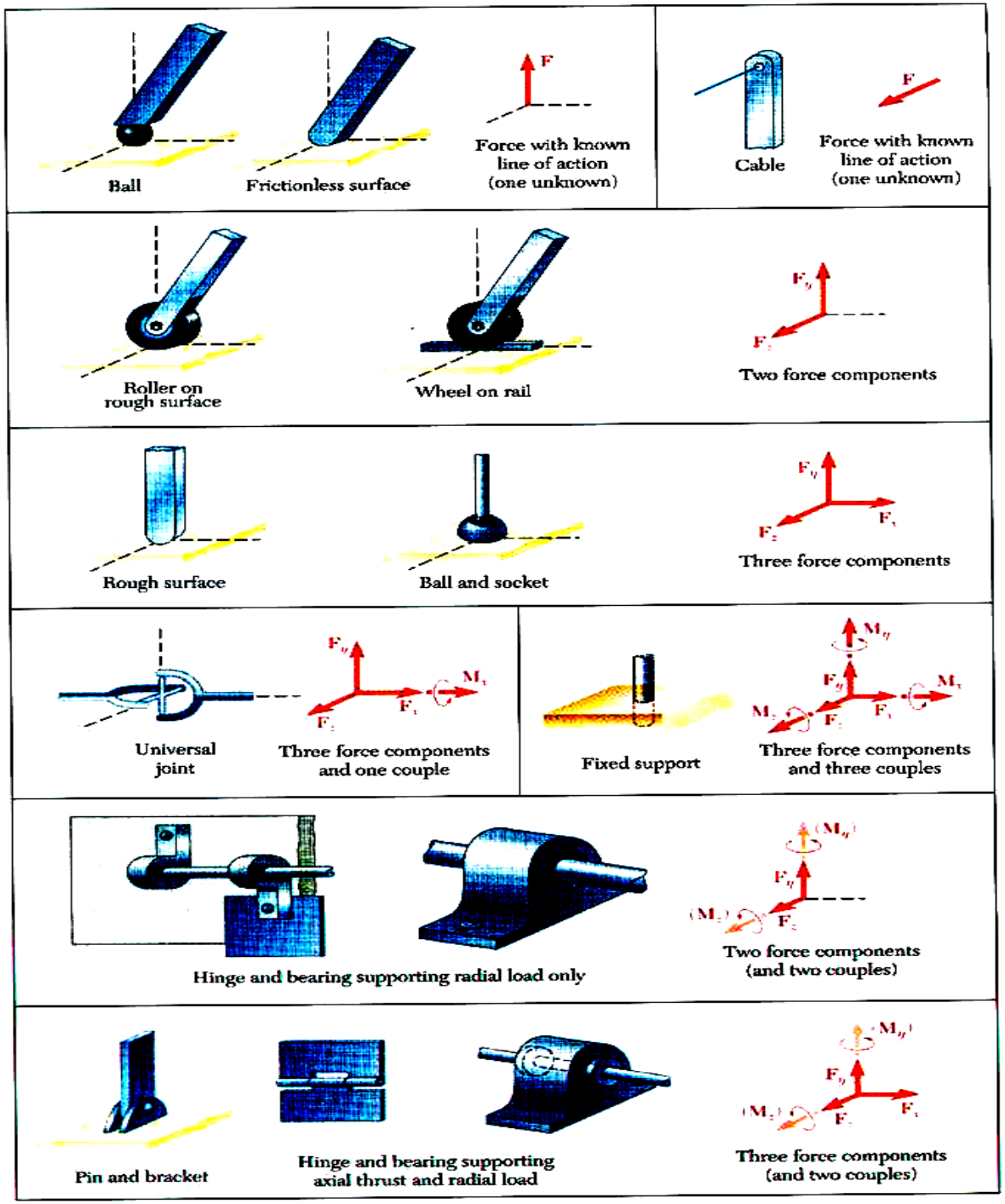


Fig. 4.10 Reactions at supports and connections

แรงปฏิกิริยา
1 ทิศทาง

แรงปฏิกิริยา
2 ทิศทาง

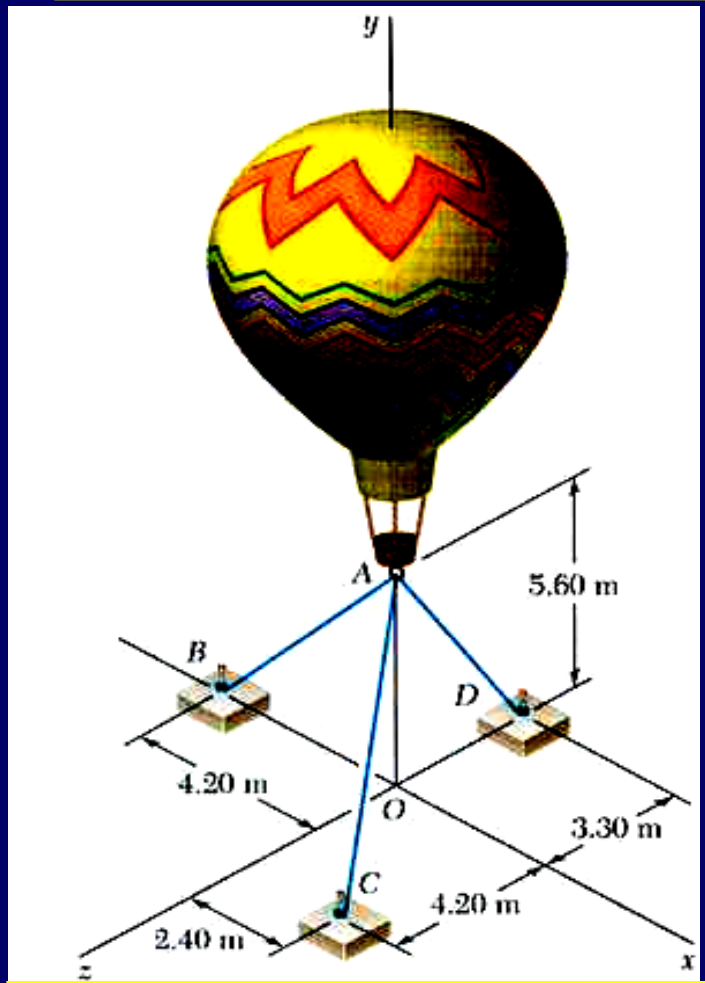
แรงปฏิกิริยา
3 ทิศทาง

แรงปฏิกิริยา
4,6 ทิศทาง

แรงปฏิกิริยา
4 ทิศทาง

แรงปฏิกิริยา
5 ทิศทาง

4.9 สมดุลของวัตถุคงรูปใน 3 มิติ



ใน 3 มิติ มี 6 สมการ

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Z = 0$$

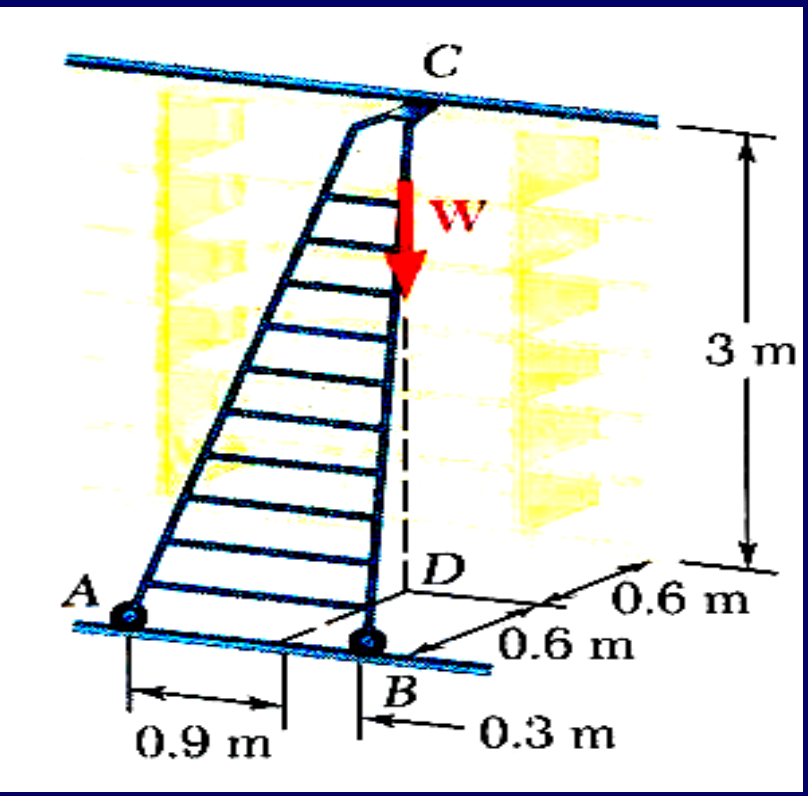
$$\sum M_X = 0$$

$$\sum M_Y = 0$$

$$\sum M_Z = 0$$

ใช้ Vector จะทำได้เร็วขึ้น

ตัวอย่าง 4.7



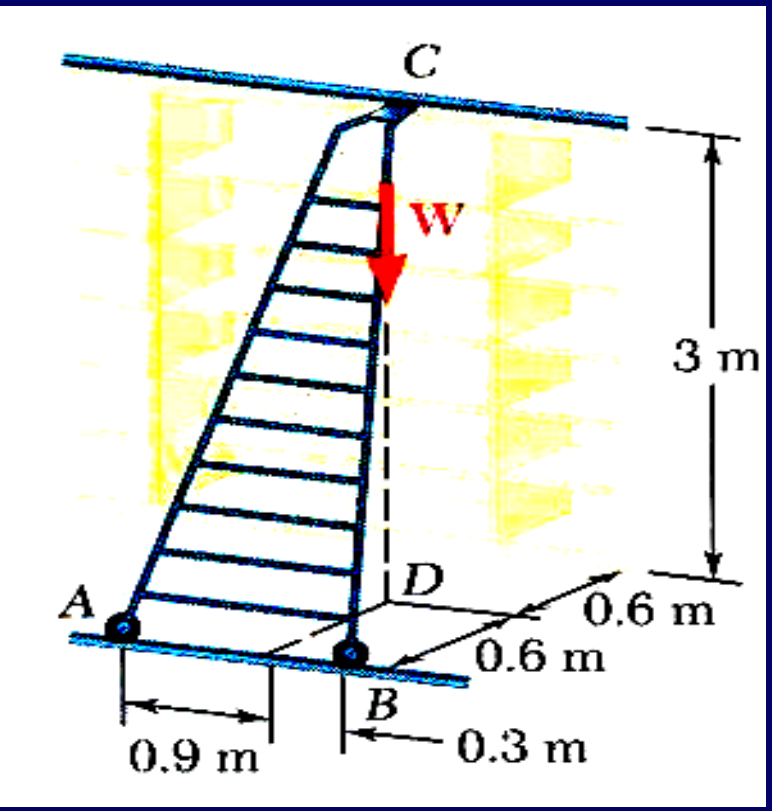
ข้อมูล

บันไดมีมวล 20 kg จุดรองรับ A, B เป็นแบบ Flanged Wheel (ลูกล้อมีร่อง) วางบนราง ที่จุด C เป็นแบบ Unflanged Wheel (ล้อธรรมดา)บนผนัง มีคนยืนบนบันไดเอนไปทางขวา มีมวล 80 kg แนวน้ำหนักรวมของบันไดกับคน ตัดพื้นที่จุด D ดังรูป

ปัญหา

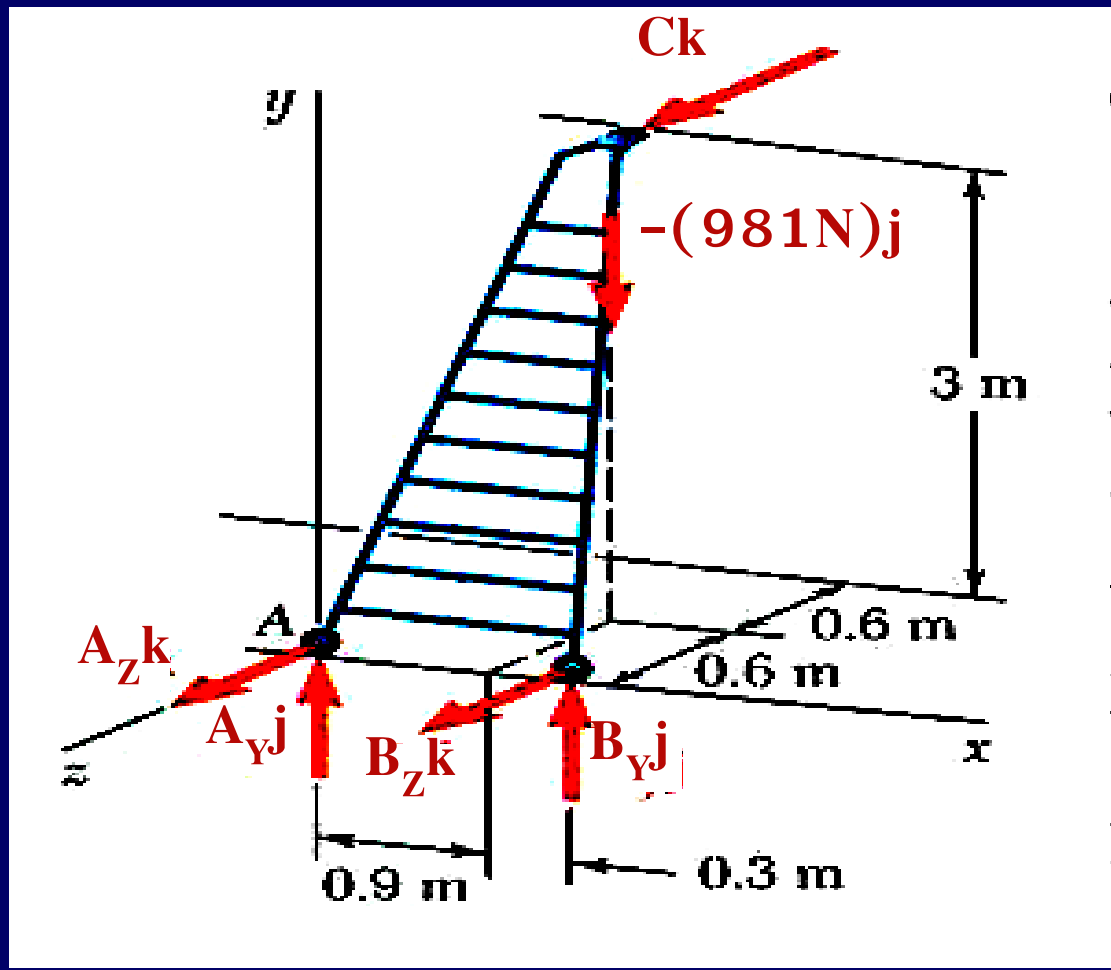
จงหาแรงปฏิกิริยาที่ A, B, C ในรูปแรงย่อย

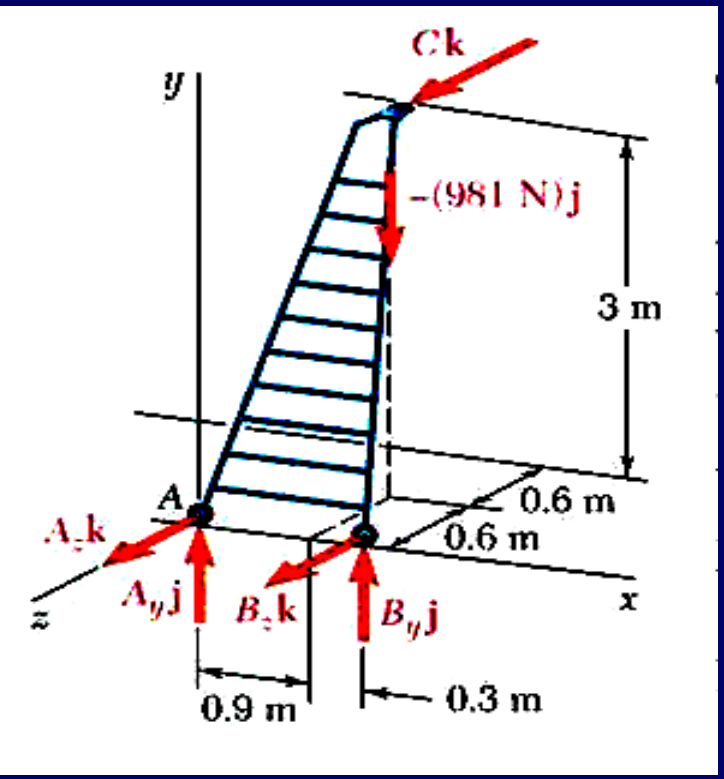
ตัวอย่าง 4.7



วิธีทำ

เขียน FBD บันได





น้ำหนักรวม $\overline{W} = -(80+20)(9.81)$

$= -(981N)j$

$\sum \overline{F} = 0;$

$A_Y j + A_Z k + B_Y j + B_Z k + Ck - (981N)j = 0$

$(A_Y + B_Y - 981N)j + (A_Z + B_Z + C)k = 0$

(1)

$\sum \overline{M}_A = (\overline{r} \times \overline{F}) = 0$

$(1.2i) \times (B_Y j + B_Z k) + (0.9i - 0.6k) \times (-981j) + (0.6i + 3j - 1.2k) \times (Ck) = 0$

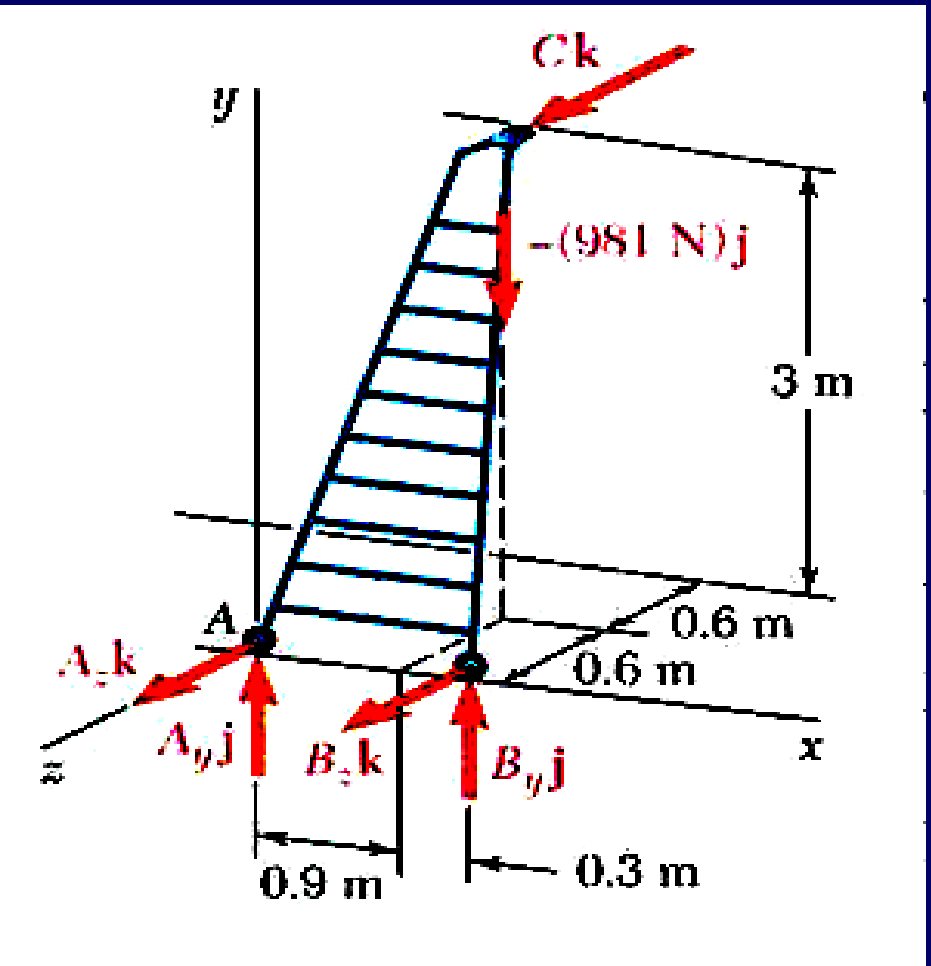
$(3C - 588.6)\, i - (1.2\, B_Z + 0.6C)\, j + (1.2\, B_Y - 882.9)\, k = 0$

(2)

จากสมการ (2) $\sum M_A = 0$

$(3C-588.6)\,i - (1.2\,B_Z + 0.6C)\,j + (1.2\,B_Y - 882.9)\,k = 0 \quad (2)$

จาก สัมประสิทธิ์ i, j, k ในสมการ(2)



จาก i ;

$\sum M_X = 3C-588.6 = 0$

จาก j ;

$\sum M_Y = 1.2\,B_Z + 0.6C = 0$

จาก k ;

$\sum M_Z = 1.2\,B_Y - 882.9 = 0$

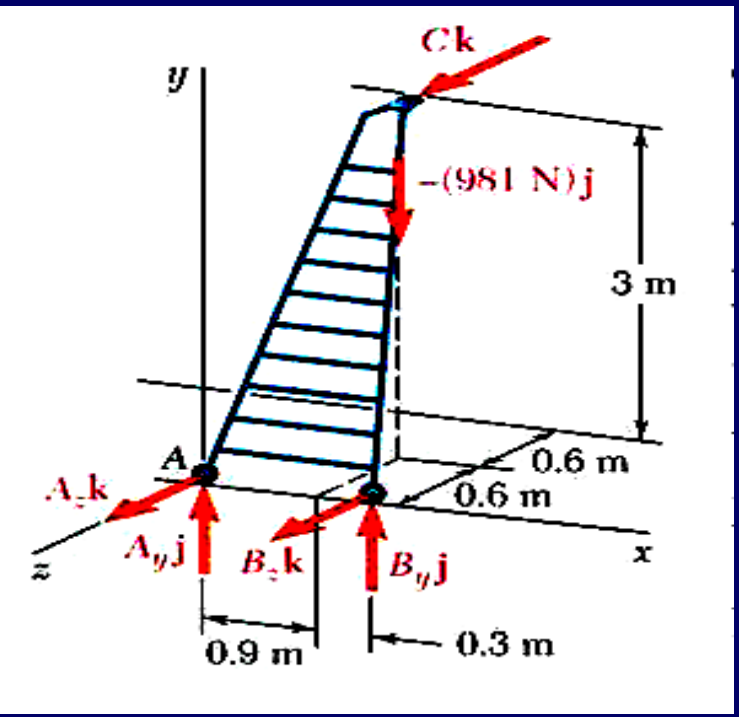
แก้สมการ ได้ $C = 196.2$ N

$B_Y = 763.0$ N

$B_Z = -98.1$ N

จากสมการ (1) $\sum F = 0$

$$(A_Y+B_Y-981N)j + (A_Z+B_Z+C)k = 0 \quad (1)$$



จาก สัมประสิทธิ์ j, k ในสมการ(1)

จาก j ; $\sum F_Y = A_Y+B_Y-981N = 0$

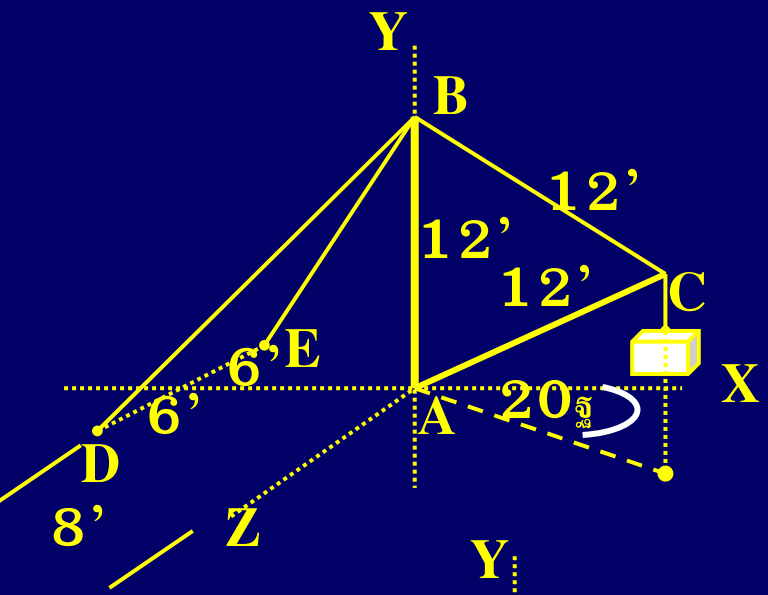
จาก k ; $\sum F_Z = A_Z+B_Z+C = 0$

แทนค่า C, B_Y, B_Z แก้สมการ ได้

$A_Y = 245$; $A_Z = -98.1N$

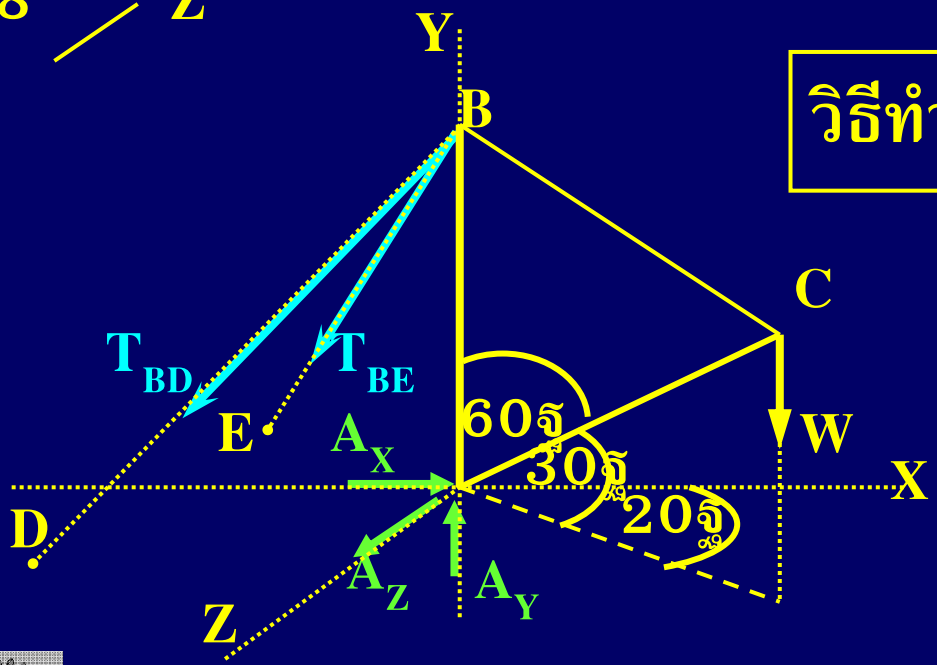
ตัวอย่าง 4.8

ข้อมูล ปั้นจั่น Derrick ติดตั้งและห้อยแขวนวัตถุ ดังรูป



ปัญหา

จงหาแรงดึงในเคเบิลทั้งสอง(BD, BE) และแรงปฏิกิริยาที่ A ในรูปแรงย่อย



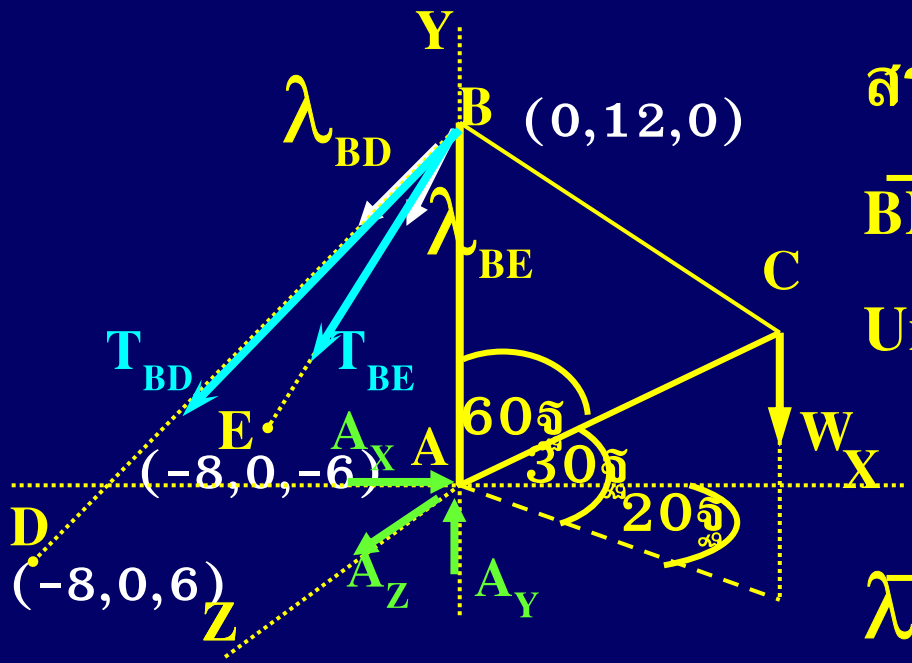
วิธีทำ

เขียน FBD ของปั้นจั่น

มี Unknown 5 ตัว

A_X A_Y A_Z

T_{BD} T_{BE}



สร้าง Vector ของแรงต่าง ๆ

$\overline{BD} = -8i-12j+6k$; $BD = 15.62'$

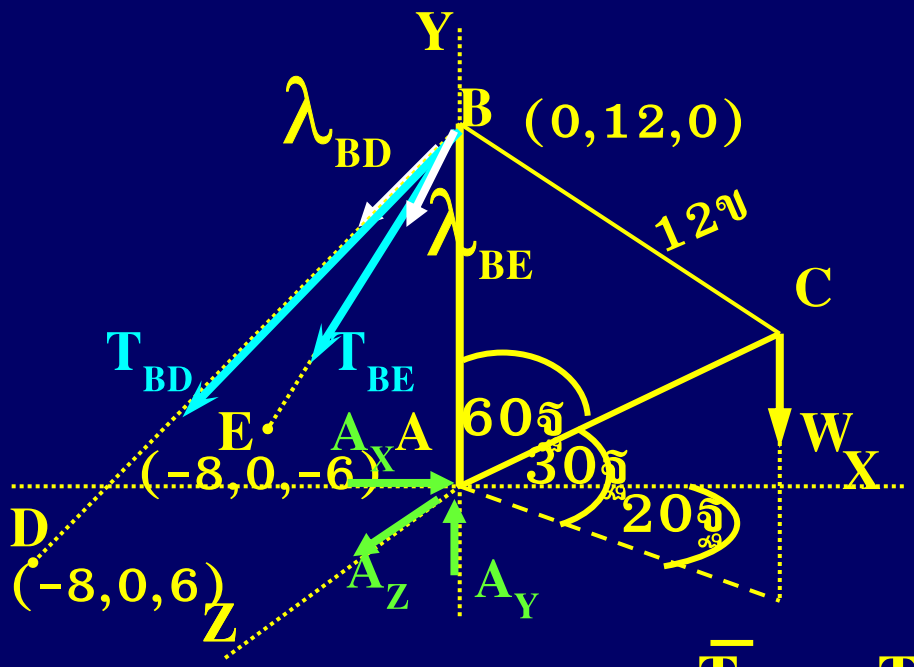
Unit Vector ใน BD; $\overline{\lambda}_{BD} = \overline{BD}/BD$

$\overline{\lambda}_{BD} = (-8i-12j+6k)/(15.62')$

$\overline{\lambda}_{BD} = (-0.512i-0.768j+0.384k)$

$\overline{BE} = -8i-12j+6k$; $BE = 15.62'$

$\overline{\lambda}_{BE} = (-0.512i-0.768j-0.384k)$



เวคเตอร์ของแรงต่าง ๆ

$$\bar{W} = 4000\ j$$

$$\bar{T}_{BD} = T_{BD}\,(\bar{\lambda}_{BD})$$

$$\bar{T}_{BD} = T_{BD}\,(-0.512i-0.768j+0.384k)$$

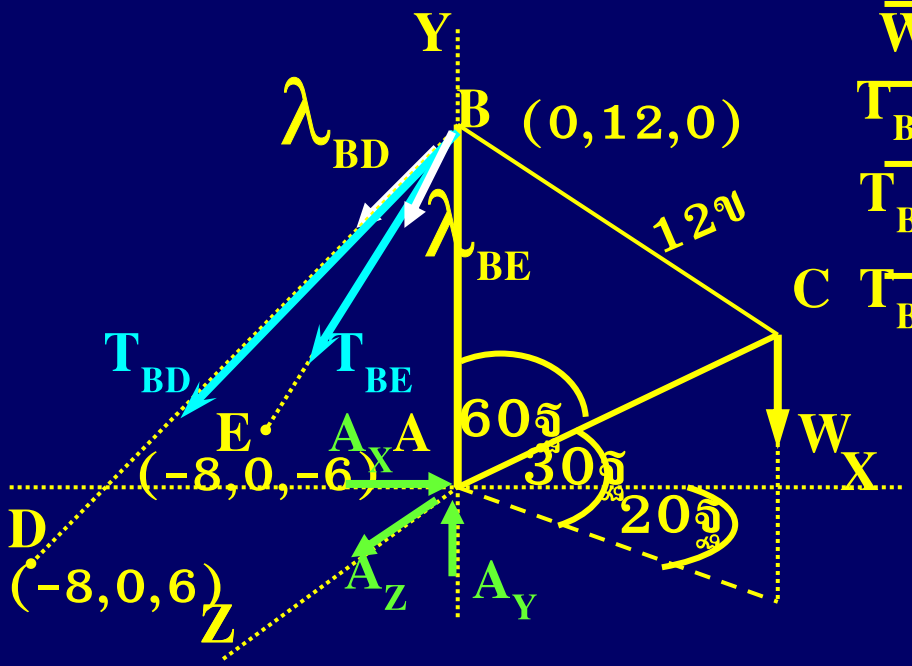
$$\bar{T}_{BE} = T_{BE}\,(-0.512i-0.768j-0.384k)$$

สร้างเวคเตอร์แนว AB, AC $\quad \bar{AB} = 12\ j$

$$\bar{AC} = Xi+Yj+Zk = (12\cos 30)(\cos 20)\ i + (12\sin 30)\ j + 12(\cos 30)(\sin 20)\ k$$

$$\bar{AC} = (9.77)\ i + (6)\ j + (3.55)\ k$$

เวคเตอร์ของแรงต่าง ๆ



$\overline{W} = 4000\ j$

$\overline{T}_{BD} = T_{BD}\,(\lambda_{BD})$

$\overline{T}_{BD} = T_{BD}\,(-0.512i-0.768j+0.384k)$

C $\overline{T}_{BE} = T_{BE}\,(-0.512i-0.768j-0.384k)$

$\overline{AB} = 12\ j$

$\overline{AC} = (9.77)\ i + (6)\ j + (3.55)\ k$

$$\sum \overline{F} = 0\ ;\ A_X i + A_Y j + A_Z k + \overline{T}_{BD} + \overline{T}_{BE} - 4000\ j = 0$$

$$(A_X - 0.512T_{BD} - 0.512T_{BE})\ i +$$
$$(A_Y - 0.768\ T_{BD} - 0.768T_{BE} - 4000)\ j +$$
$$(A_Z + 0.384T_{BD} - 0.384\ T_{BE})\ k = 0$$

$$(A_X - 0.512T_{BD} - 0.512T_{BE})\,i +$$
$$(A_Y - 0.768\,T_{BD} - 0.768T_{BE} - 4000)\,j +$$
$$(A_Z + 0.384T_{BD} - 0.384\,T_{BE})\,k = 0$$

$$\sum F_X = 0 \;;\; (A_X - 0.512T_{BD} - 0.512T_{BE}) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \;;\; (A_Y - 0.768\,T_{BD} - 0.768T_{BE} - 4000) = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_Z = 0 \;;\; (A_Z + 0.384T_{BD} - 0.384\,T_{BE}) = 0 \quad (3)$$

$$\sum \mathbf{M}_A = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

$$(4.61T_{BD} - 4.61T_{BE} + 14200)\,\mathbf{i} + (6.14T_{BD} + 6.14T_{BE} - 39080)\,\mathbf{k} = 0$$

$$\sum M_X = 0 ; \qquad (4.61T_{BD} - 4.61T_{BE} + 14200) = 0$$

$$\sum M_Z = 0 ; \qquad (6.14T_{BD} + 6.14T_{BE} - 39080) = 0$$

แก้สมการ ได้

$T_{BD} = 1640$ lb และ $T_{BE} = 4720$ lb *******

แทนค่า T_{BD} และ T_{BE} ใน(1),(2),(3)

T_{BD} = 1640 lb และ T_{BE} = 4720 lb *******

แทนค่า T_{BD} และ T_{BE} ใน(1),(2),(3)

$$\sum F_X = 0 \; ; \; (A_X - 0.512T_{BD} - 0.512T_{BE}) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \; ; \; (A_Y - 0.768\,T_{BD} - 0.768T_{BE} - 4000) = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_Z = 0 \; ; \; (A_Z + 0.384T_{BD} - 0.384\,T_{BE}) = 0 \quad (3)$$

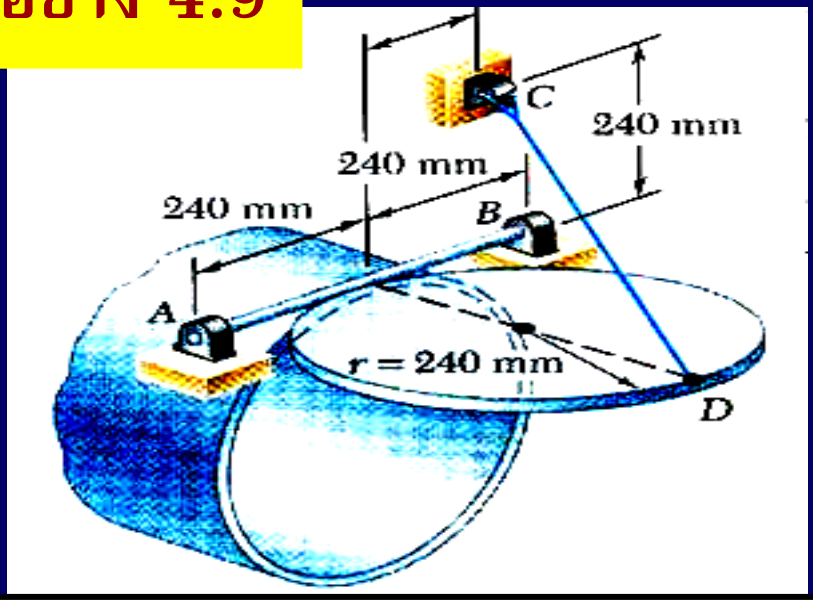
แก้สมการ (1) (2) (3) ได้

A_X = 3260 lb.

A_Y = 8880 lb.

A_Z = 1183 lb.

ตัวอย่าง 4.9



ข้อมูล

ฝาปิดท่อหนัก 30 กก

เปิดห้อยไว้ ดังรูป;

A เป็นแบริ่งต้านแรงในแนวแกน

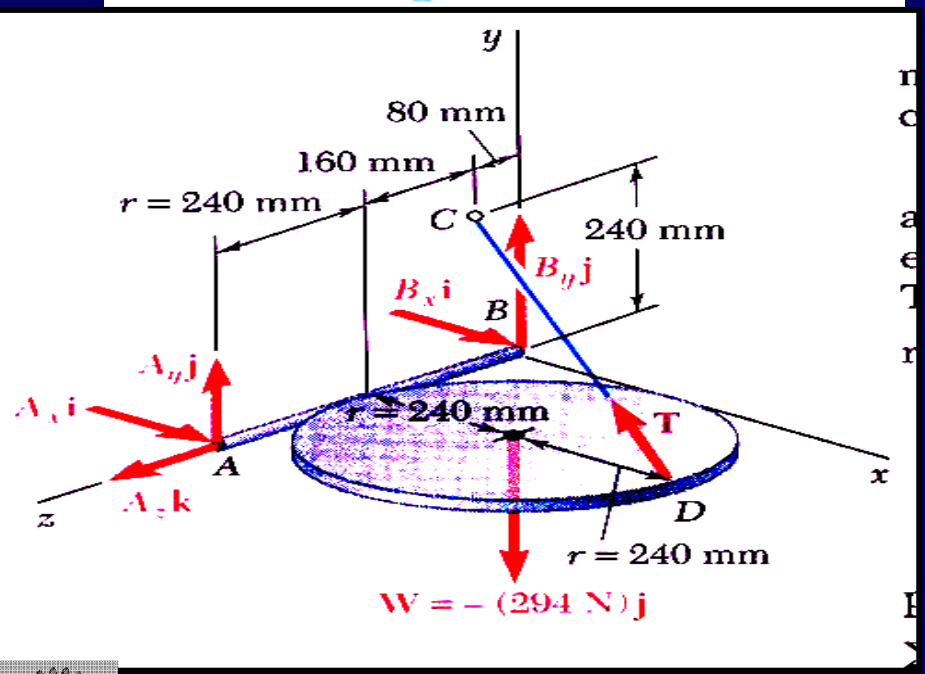
B เป็นแบริ่งไม่ต้านแรงในแนวแกน

ปัญหา หาแรงดึงในเคเบิล CD

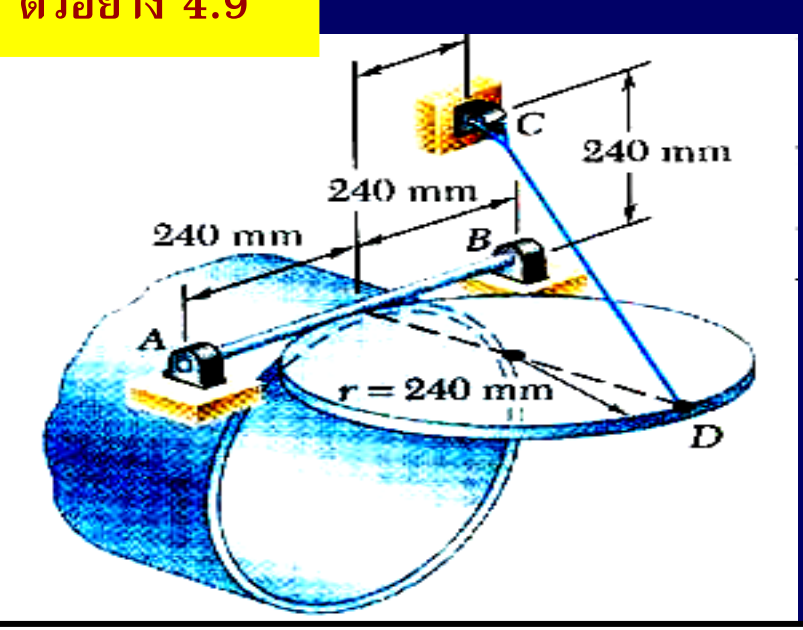
และแรงปฏิกิริยาที่ A และ B

วิธีทำ

เขียน FBD ฝาท่อและแบริ่ง



ตัวอย่าง 4.9



สร้างเวคเตอร์ของแรงต่าง ๆ ได้

$\overline{T} = T(\overline{DC}/DC)$

$\overline{T} = -(6/7)T\,i + (3/7)T\,j - (2/7)T\,k$

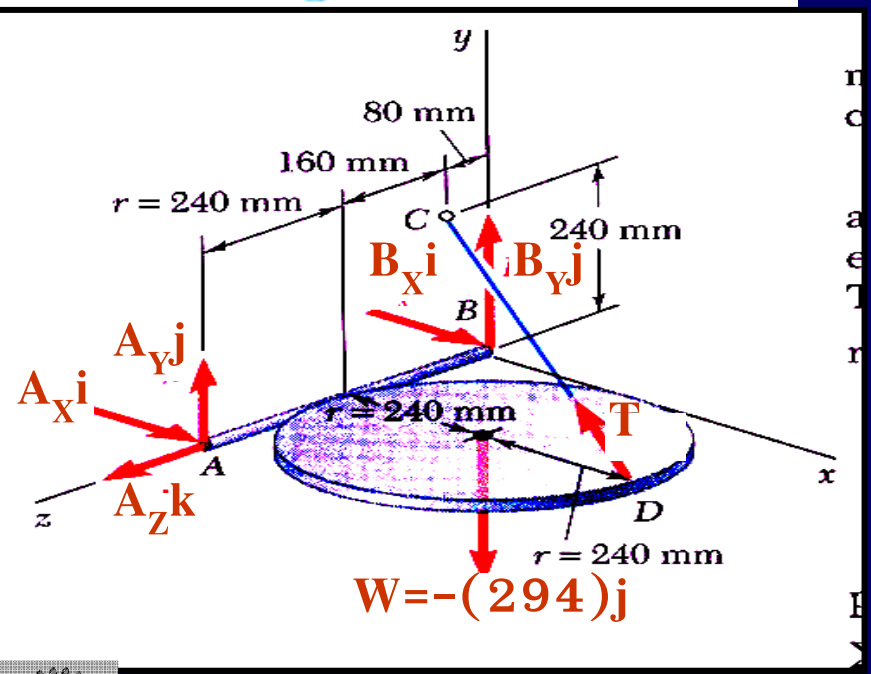
$\overline{W} = -(294N)\,j$

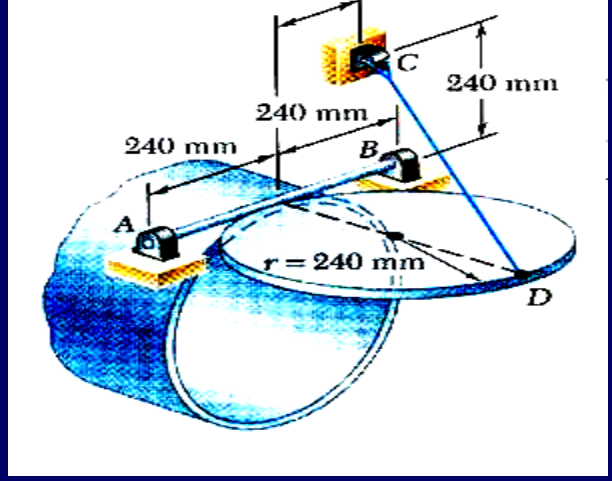
แรงปฏิกิริยาที่ A ; $A_X i$, $A_Y j$, $A_z k$

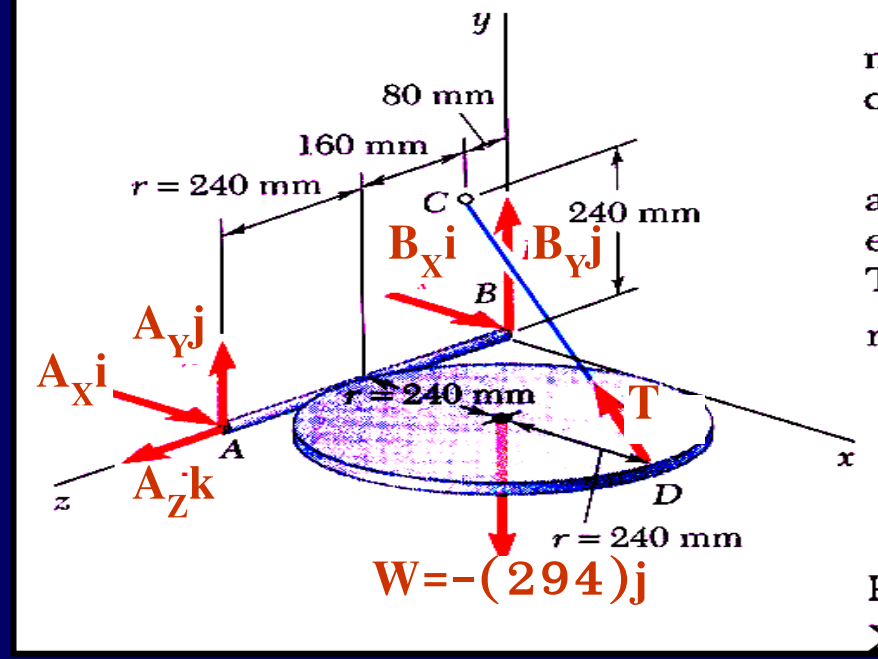
แรงปฏิกิริยาที่ B ; $B_X i$, $B_y j$

$\sum \overline{F} = 0$

$A_X i + A_Y j + A_z k + B_X i + B_y j + \overline{T} - (294N)\,j = 0$







$$\sum \overline{F} = 0$$

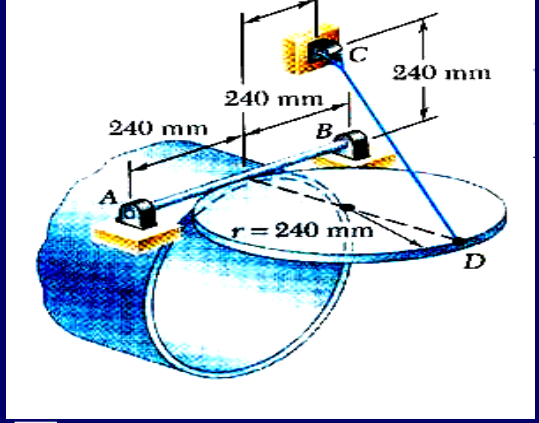
$$A_X i + A_Y j + A_z k + B_X i + B_y j + \overline{T} - (294N)\, j = 0$$

$$[A_X + B_X - (6/7)T\,]\, i + [A_Y + B_y + (3/7)T - 294N\,]\, j + [A_z - (2/7)\,T]\, k = 0$$

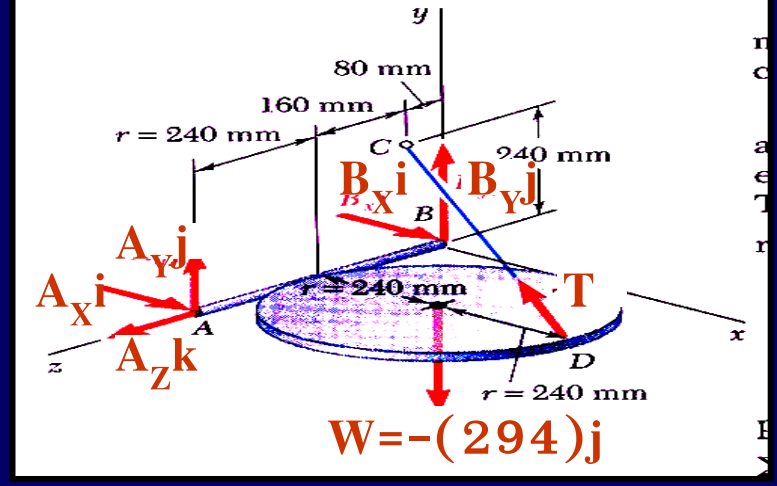
$$\sum F_X = 0 ; \qquad [A_X + B_X - (6/7)T\,] = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 ; \qquad [A_Y + B_y + (3/7)T - 294N\,] = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_Z = 0 ; \qquad [A_z - (2/7)\,T\,] = 0 \qquad (3)$$



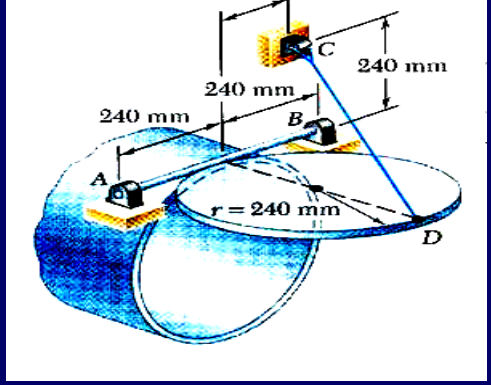
$$\sum \bar{M}_B = (\bar{r} \times \bar{F}) = 0$$

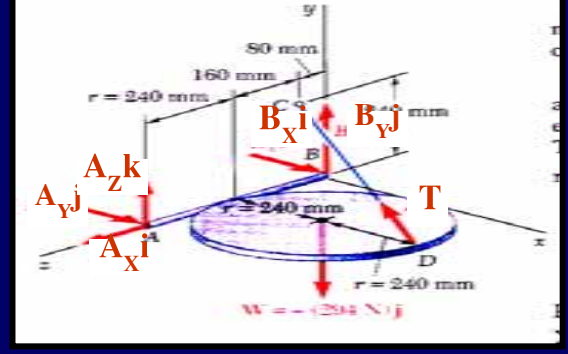


$$[2(240)k \times (A_X i + A_Y j + A_z k)]$$
$$+ [\{2(240)i+240k\} \times \{(-6/7)Ti+(3/7)Tj-(2/7)Tk]$$
$$+ [(240i+240k) \times (-294N)j] = 0$$

$$[-2A_Y-(3/7)T+294N]\, i+[\, 2A_X-(2/7)T\,]\, j+[(6/7)T-294N]\, k = 0$$

$$\sum M_X = 0 ; \quad [-2A_Y-(3/7)T + 294N] = 0 \qquad (4)$$
$$\sum M_Y = 0 ; \quad [\, 2A_X-(2/7)\, T\,] = 0 \qquad (5)$$
$$\sum M_Z = 0 ; \quad [(6/7)T - 294N] = 0 \qquad (6)$$





$$\Sigma F_X = 0 ; \quad [A_X + B_X - (6/7)T] = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_Y = 0 ; \quad [A_Y + B_y + (3/7)T - 294N] = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_Z = 0 ; \quad [A_z - (2/7)T] = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma M_X = 0 ; \quad [-2A_Y - (3/7)T + 294N] = 0 \qquad (4)$$

$$\Sigma M_Y = 0 ; \quad [2A_X - (2/7)T] = 0 \qquad (5)$$

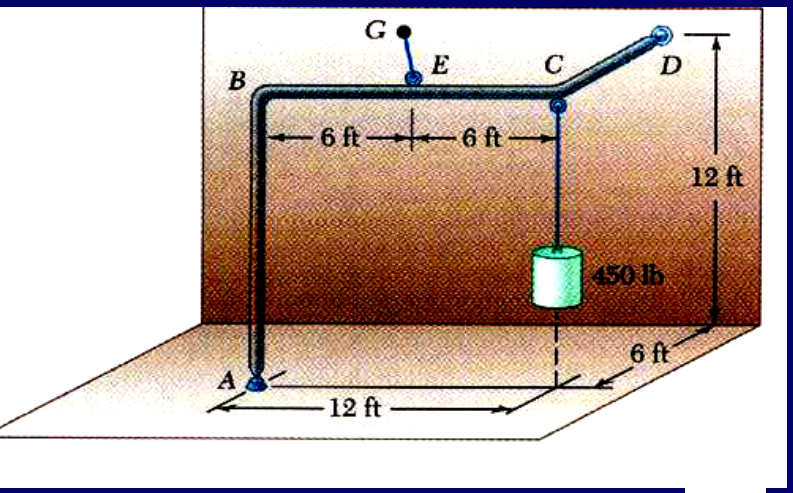
$$\Sigma M_Z = 0 ; \quad [(6/7)T - 294N] = 0 \qquad (6)$$

จากสมการ (1) ถึง สมการ (6) แก้สมการ ได้ | $T = 343.0$ N

$A_X = 49.0$ N, $A_Y = 73.5$ N, $A_Z = 98.0$ N

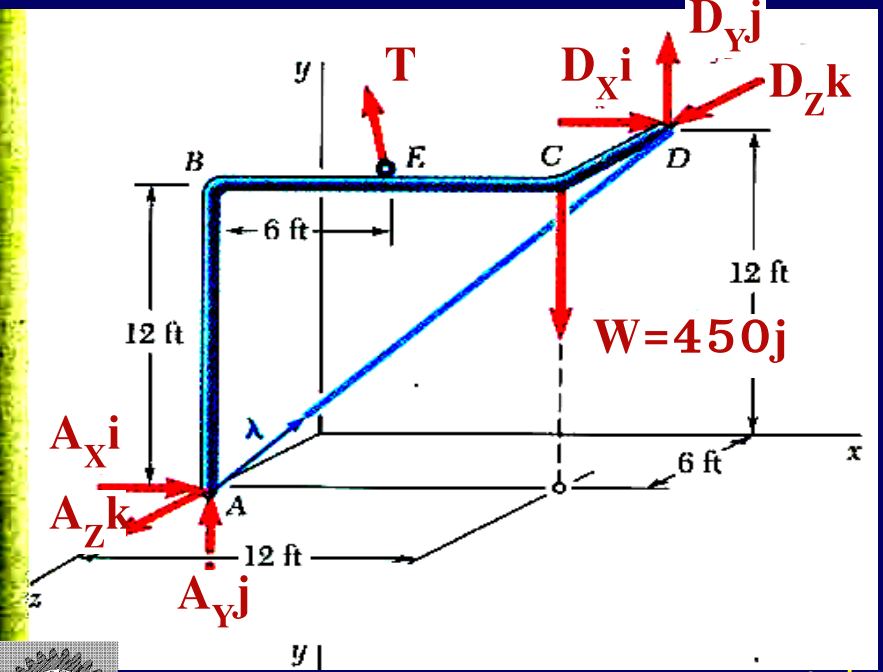
$B_X = 245$ N, $B_Y = 73.5$ N

ตัวอย่าง 4.10



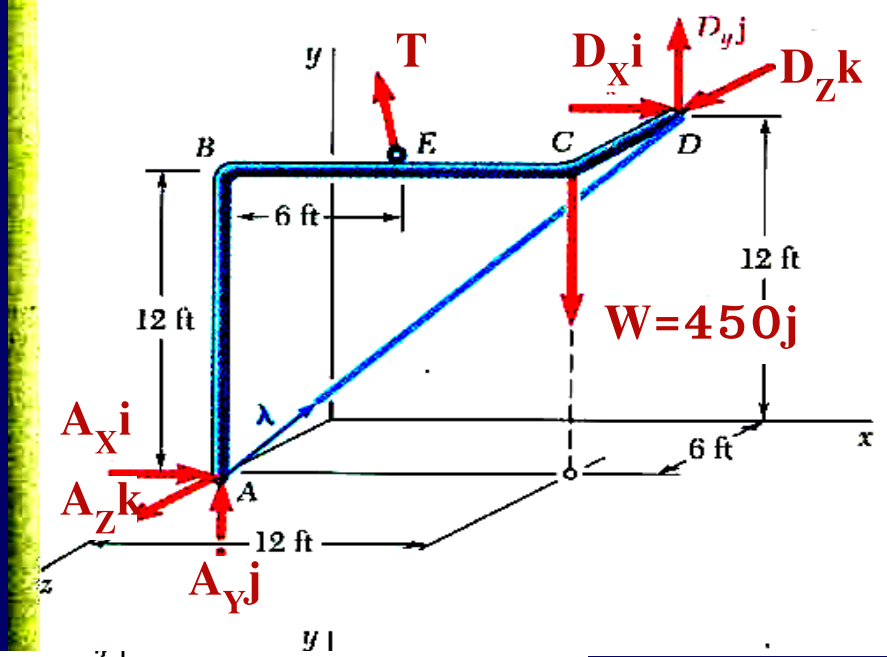
ข้อมูล ถังหนัก 450 lb ห้อย
อยู่กับโครงเหล็กดังรูป
A และ D เป็นจุดรองรับ
แบบ Ball and socket
มีเคเบิล EG ยึดโยงไว้

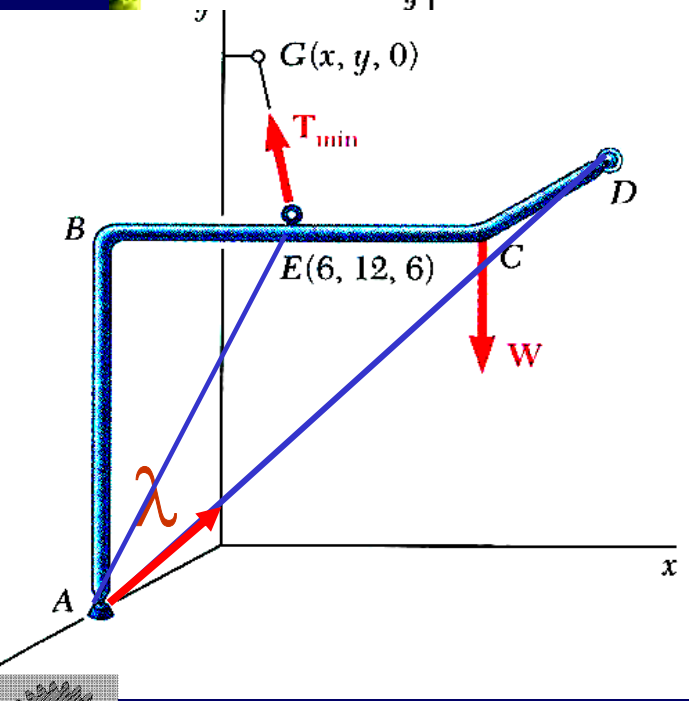
ปัญหา a) หาตำแหน่ง G ที่ทำ
ให้ T_{EG} น้อยที่สุด
b) หา แรงดึง T_{EG}



วิธีทำ

เขียน FBD โครงเหล็ก





แก้ปัญหาโดยใช้โมเมนต์รอบ AD

λ เป็น Unit Vector ใน AD

$$\Sigma M_{AD} = \bar{\lambda} \cdot \bar{M}^{R}_{A} = 0$$

$$\bar{M}^{R}_{A} = (\bar{AE} \times \bar{T}) + (\bar{AC} \times \bar{W})$$

คิดเฉพาะ M ของ T และ W

M ตัวอื่นรอบ AD เป็นศูนย์หมด

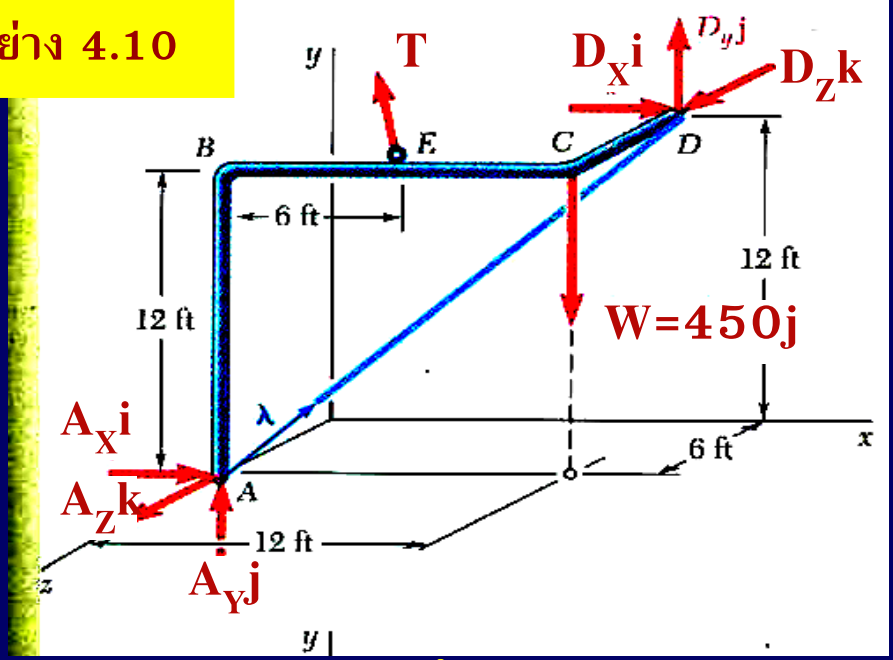
$$\bar{\lambda} \cdot (\bar{AE} \times \bar{T}) + \bar{\lambda} \cdot (\bar{AC} \times \bar{W}) = 0$$

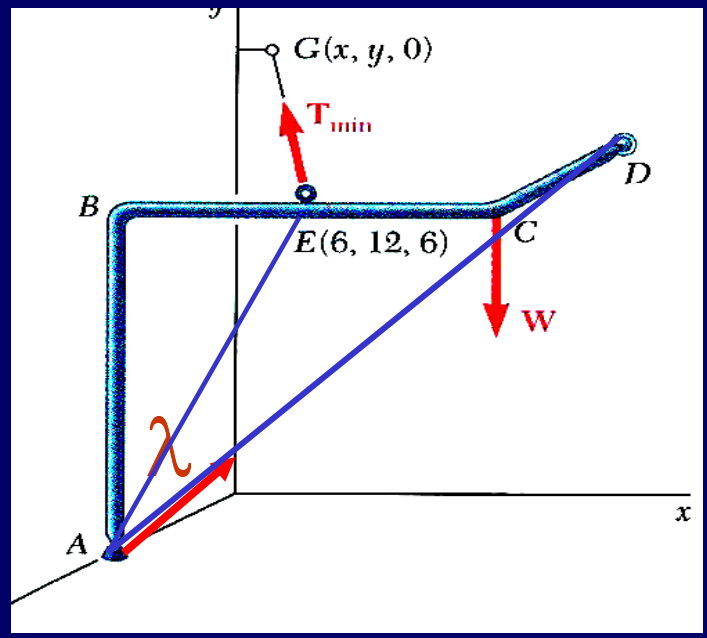
$$\bar{\lambda} \cdot (\bar{AE} \times \bar{T}) = -\bar{\lambda} \cdot (\bar{AC} \times \bar{W}) \quad (1)$$

$$\bar{AC} \times \bar{W} = (12i+12j) \times (-450j) = -5400k$$

$$\bar{\lambda} = \bar{AD}/AD = (2/3)i+(2/3)j-(1/3)k$$

ตัวอย่าง 4.10





$$\overline{\lambda}\cdot(\overline{AE}\times\overline{T}) = -\overline{\lambda}\cdot(\overline{AC}\times\overline{W}) \quad (1)$$

$\overline{AC}\times\overline{W} = (12i+12j)\times(-450j) = -5400k$

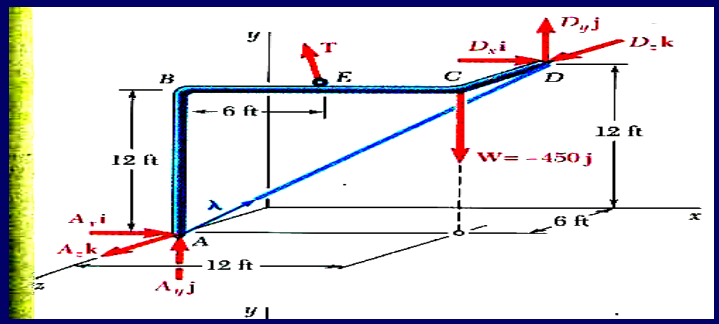
$\overline{\lambda} = \overline{AD}/AD = (2/3)i+(2/3)j-(1/3)k$

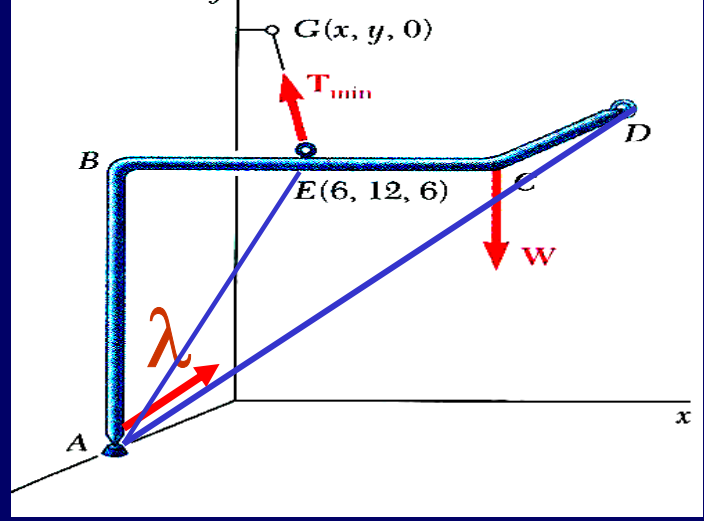
$\overline{\lambda}\cdot(\overline{AC}\times\overline{W}) = [(2/3)i+(2/3)j-(1/3)k]\cdot[-5400k] = 1800$

แทนค่าลงใน (1) ได้ ; $\overline{\lambda}\cdot(\overline{AE}\times\overline{T}) = -1800$ lbฐ ft (2)

จาก (2) เขียนใหม่ $\overline{\lambda}\cdot(\overline{AE}\times\overline{T}) = \overline{T}\cdot(\overline{\lambda}\times\overline{AE}) = -1800$ lbฐft (3)

ตัวอย่าง 4.10





จาก (3) $\bar{T} \cdot (\bar{\lambda} \times \bar{AE}) = -1800$ lb.ฐ ft

เมื่อ $\bar{\lambda} \times \bar{AE}$ คือ $\bar{M}'_A$ จะได้ $\bar{T} \cdot \bar{M}'_A = -1800$

พิจารณา $\bar{T} \cdot \bar{M}'_A = M'_A(T \cos\theta) = -1800$ (4)

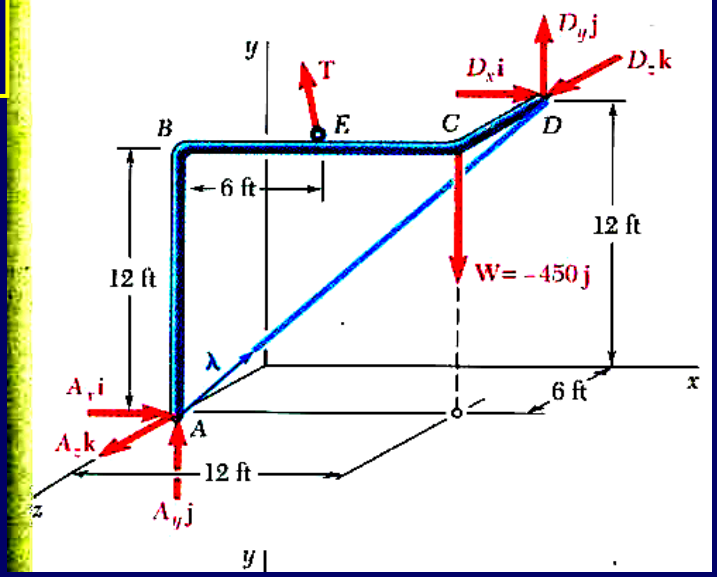
เมื่อ M'_A และ −1800 เป็นค่าคงที่ ค่า $(T \cos\theta)$ จะเป็นค่าคงที่ด้วย

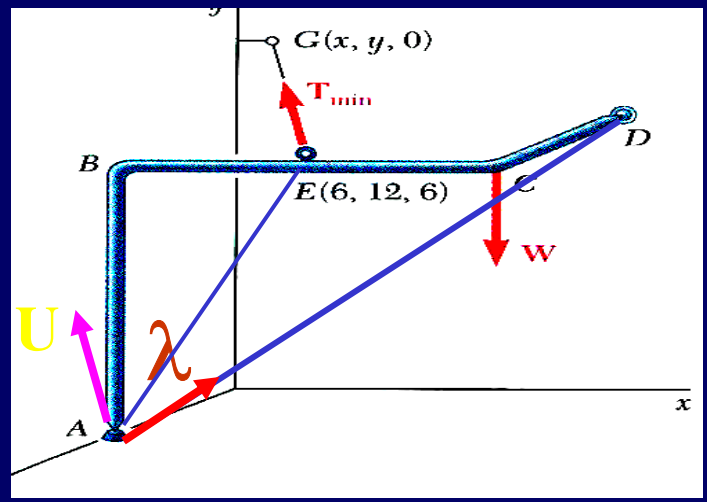
เพราะฉะนั้น T จะน้อยที่สุด เมื่อ $\cos\theta$ มากที่สุด

$\cos\theta$ มากที่สุด = 1 = cos0ฐ (มุมระหว่าง $\bar{T}$ กับ $\bar{\lambda} \times \bar{AE} = 0$)

หรือ $\bar{T}$ จะต้องขนานหรือทาบไปกับแนว $\bar{\lambda} \times \bar{AE}$

ตัวอย่าง 4.10





$\bar{\lambda}$ X $\overline{AE}$ = [(2/3)i+(2/3)j−(1/3)k] X [6i+12j] = 4i − 2j + 4k

ให้ $\bar{U}$ เป็น Unit Vector ของ $\bar{\lambda}$ X $\overline{AE}$

$$\bar{U} = (4i - 2j + 4k)/\sqrt{4^2+2^2+4^2}$$

$$\bar{U} = (2/3)i - (1/3)j + (2/3)k$$

เมื่อ $\bar{T}$ ทาบอยู่กับ $\bar{\lambda}$ X $\overline{AE}$ จึงใช้ Unit Vector ร่วมกันได้

$$\bar{T} = T[\ \bar{U}\ ] = T[\ (2/3)i - (1/3)j + (2/3)k\ ] \qquad (5)$$

ตัวอย่าง 4.10

$$\overline{T} = T[\,\overline{U}\,] = T[\,(2/3)i - (1/3)j + (2/3)k\,] \qquad (5)$$

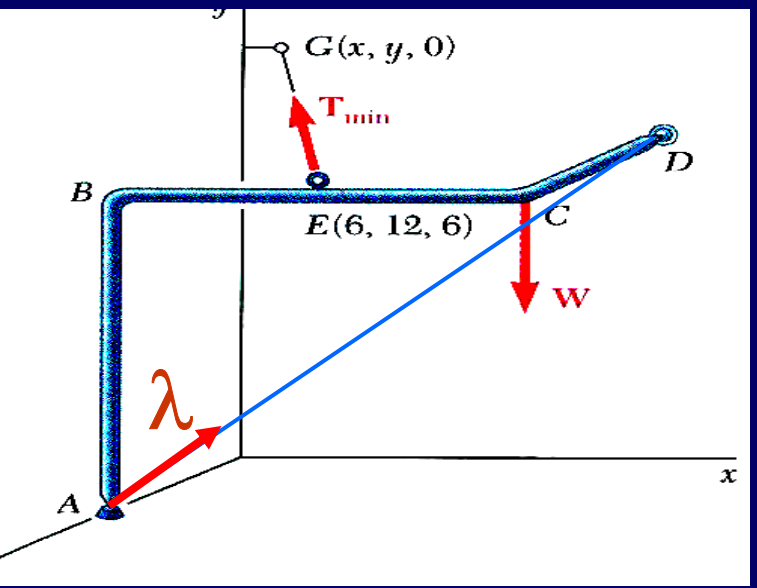
$$\overline{\lambda} \times \overline{AE} = 4i - 2j + 4k$$

จาก (3) $\overline{T} \cdot (\overline{\lambda} \times \overline{AE}) = -1800$ lbฐ ft

แทนค่า $\overline{T}$ และ $\overline{\lambda} \times \overline{AE}$ ใน (3)

$$T\,[\,(2/3)i - (1/3)j + (2/3)k\,] \cdot [\,4i - 2j + 4k\,] = -1800$$

แก้สมการ ได้ $T = -300$



แทนค่า T=300 ในสมการ (5)

$$\overline{T} = T[\,(2/3)i - (1/3)j + (2/3)k\,]$$

$$\overline{T} = -300\,[\,(2/3)i - (1/3)j + (2/3)k\,]$$

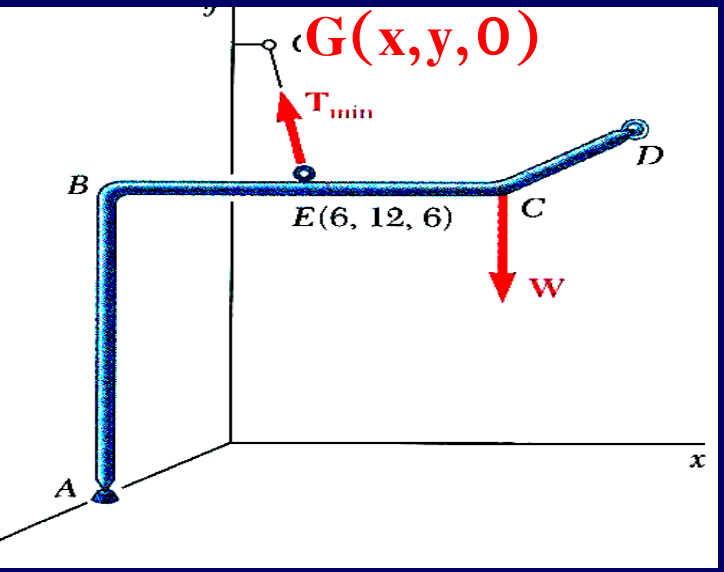
$$\overline{T} = -200\,i + 100\,j - 200\,k \qquad (6)$$

$$T_{MIN} = \sqrt{200^2 + 100^2 + 200^2}$$

$$T_{MIN} = 300 \text{ lb}$$

ตัวอย่าง 4.10

หาตำแหน่งจุด G กำหนดพิกัดจุด G(x,y,0)



Z เป็น 0 เพราะอยู่บนผนังระนาบ XY

พิกัดจุด E(6,12,6)

T ทาบอยู่กับ EG ใช้สัดส่วนระยะต่อแรงได้

$\overline{T} = -200\,i + 100\,j - 200\,k$

$\overline{EG} = (x-6)\,i + (y-12)\,j - (0-6)\,k$

$(x-6)/(-200) = (y-12)/(100) = (0-6)/-200$

ได้ $x = 0$; $y = 15$

แสดงว่า จุด G อยู่บนแกน Y สูงขึ้นไป 15 ฟุต

สรุป a) ตำแหน่งจุด G อยู่บนแกน Y สูงขึ้นไป 15 ฟุต

b) แรงดึงในเคเบิลน้อยที่สุด เท่ากับ 300 lb ตอบ

บทที่ 4