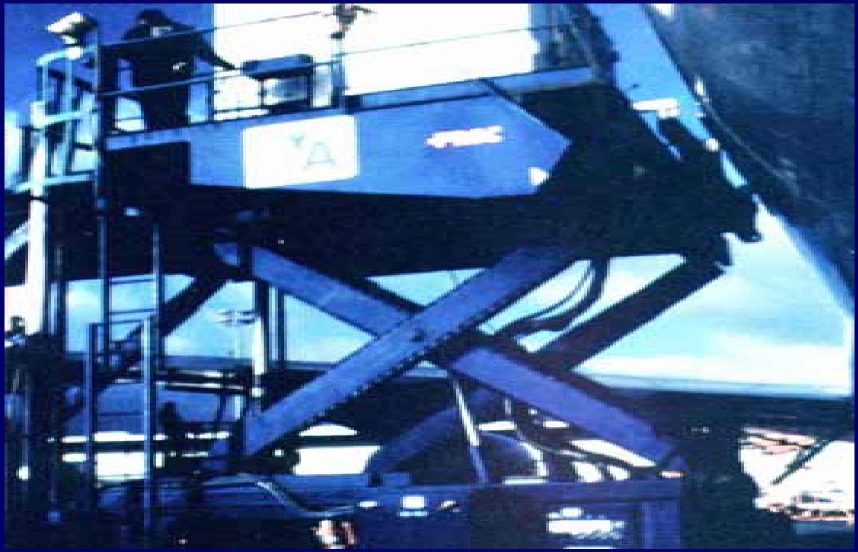
บทที่ 8

วิธีของงานสมมติ

Method of Virtual Work



บทที่ 8 วิธีของงานสมมติ

เป็นการนำผลของแรงกระทำที่ทำให้เกิดงานมาช่วยวิเคราะห์โครงสร้าง

เนื้อหา

- 8.1 คำนำ
- 8.2 งานของแรงหนึ่งแรง
- 8.3 หลักการของงานสมมติ
- 8.4 การประยุกต์หลักการของงานสมมติ
- 8.5 เครื่องกลจริง และ ประสิทธิภาพเชิงกล
- 8.6 งานของแรงหนึ่งแรงขณะเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งอันตะ
- 8.7 พลังงานศักย์
- 8.8 พลังงานศักย์และสมดุล
- 8.9 เสถียรภาพของสมดุล

วัตถุประสงค์ของการศึกษา

เพื่อศึกษาถึงลักษณะของการเกิดงาน และ
นำมาช่วยในการวิเคราะห์โครงสร้าง ตลอดจน
ความเข้าใจถึงลักษณะเสถียรภาพของวัตถุสมดุล

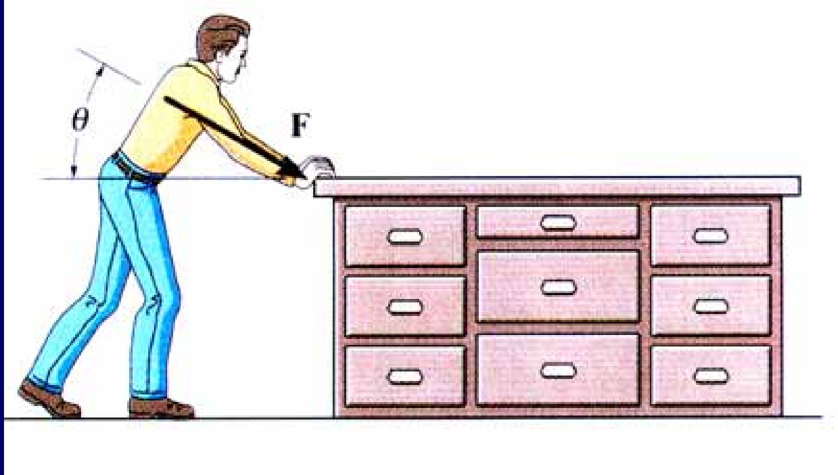
ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่ผ่านมา ได้ทำการวิเคราะห์โดยสมการสมดุล

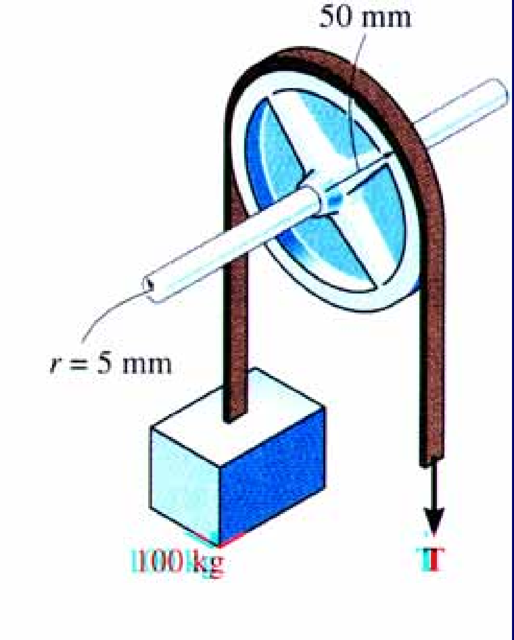
$$\sum F_X = 0 \qquad \sum F_Y = 0 \qquad \sum M = 0$$

ในบทนี้ จะนำหลักการเกิดงานของแรง มาวิเคราะห์โครงสร้าง

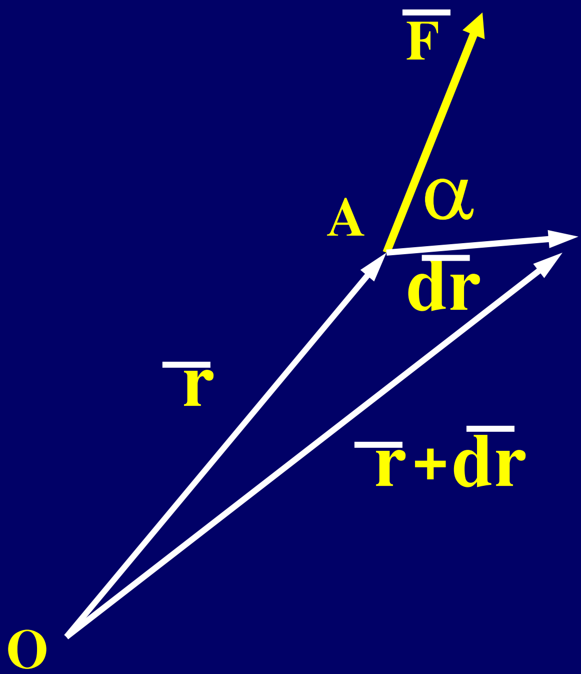
งานของแรง = แรงคูณกับระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปตามทิศทางของแรงนั้น

$$U = F \times d$$





8.2 งานของแรงแรงหนึ่ง



เมื่อแรง F กระทำให้จุด A เคลื่อนที่ไป Aข

เกิดงานตามแนวแรง F = dU

Aข ใช้ Dot product เพื่อให้ระยะทางทาบแนวแรง

$$dU = \overline{F} \cdot \overline{dr} \qquad \text{8.1}$$

ให้ dr เป็น ds $\quad dU = \overline{F} \cdot \overline{ds}$

$$dU = F\, ds \cos\alpha \qquad \text{8.1ข}$$

$\alpha < 90$ฐ ทิศทางเคลื่อนที่ตามแรง U มีค่าเป็น บวก +

$\alpha > 90$ฐ ทิศทางเคลื่อนที่ตรงข้ามแรง U มีค่าเป็น ลบ –

$\alpha = 90$ฐ ทิศทางเคลื่อนที่ตั้งฉากแรง U มีค่าเป็น ศูนย์ 0

งาน = แรง X ระยะ หน่วย N ฐ m เรียกเป็น จูล Joule:J

เพื่อให้แตกต่างจากหน่วยของโมเมนต์

แรงในบางตำแหน่งหรือบางลักษณะ ไม่ให้งาน เช่น

1. แรงกระทำต่อหมุดตรึง (ไม่สามารถเคลื่อนที่ ds = 0)
2. แรงที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ (α = 90ฐ : cos 90ฐ = 0)
3. แรงปฏิกิริยาที่หมุดลื่น(pin) แรงจะหักล้างกันหมด
4. แรงปฏิกิริยาที่ผิวลื่น (ทิศทางการเคลื่อนที่จะตั้งฉากกับแรงปฏิกิริยา)
5. แรงปฏิกิริยาในลูกล้อที่กลิ้งอิสระบนพื้น (เช่นเดียวกับผิวลื่น)
6. น้ำหนักวัตถุที่เคลื่อนที่ไปในแนวราบ (การเคลื่อนที่กับน้ำหนักตั้งฉาก)

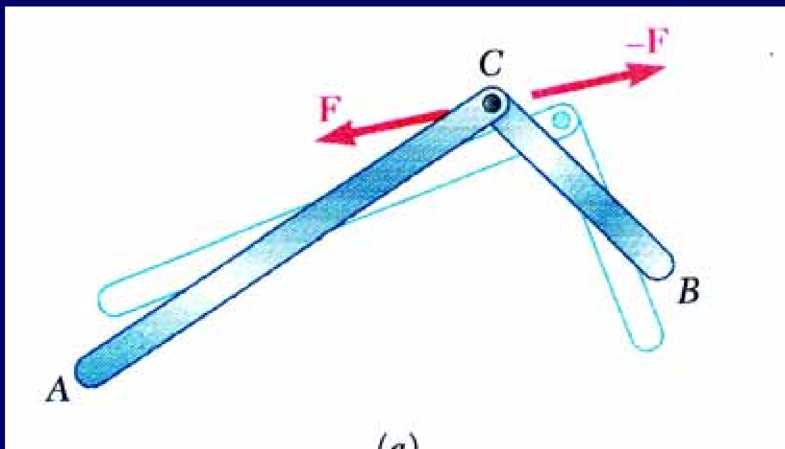
แรงที่ให้งาน

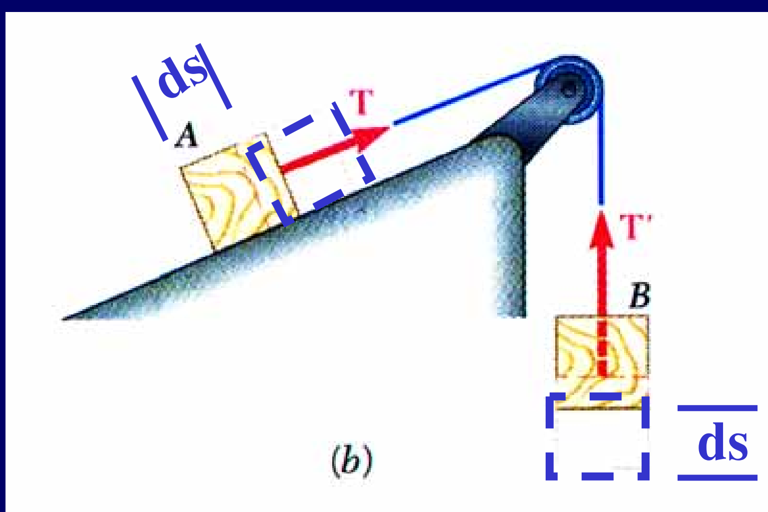
น้ำหนักวัตถุ (ยกเว้นกรณีข้อ 6 ข้างบน)

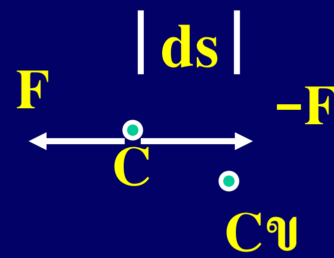
แรงเสียดทาน

แรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุ

ระบบแรงบางลักษณะที่ไม่เหลืองานออกมา เนื่องจากหักล้างกันหมด







$$\Sigma U = dU_F + dU_{-F}$$

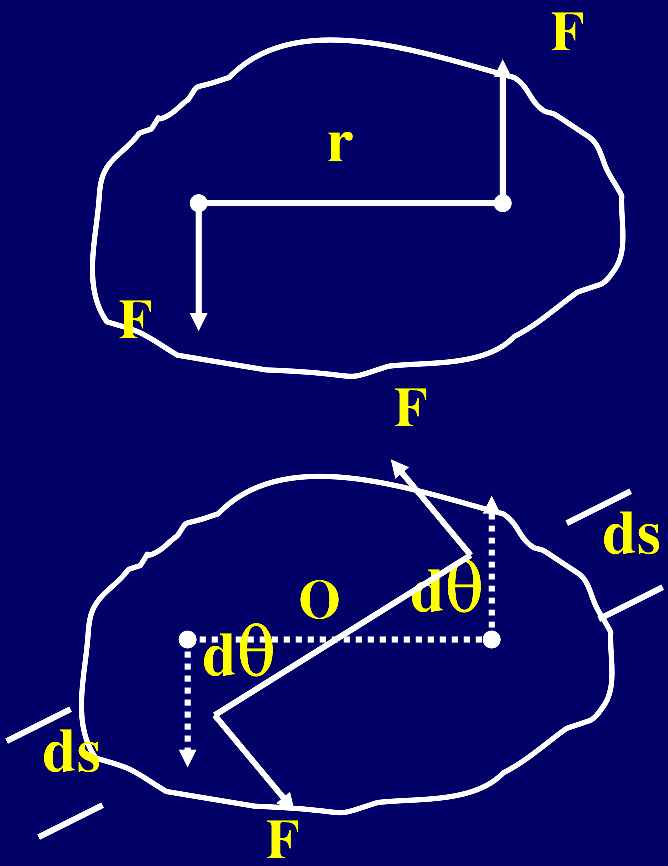
$$\Sigma U = F.\,ds + (-\,F.\,ds) = 0$$

$$\Sigma U = dU_A + dU_B$$

$$\Sigma U = T\,.\,ds + (-\,T\,.\,ds) = 0$$

เช่นเดียวกับแรงยึดเหนี่ยวโมเลกุล
ในเนื้อวัตถุ งานจะหักล้างกันหมด

กรณีแรงคู่ควบ



เมื่อพิจารณาการหมุนรอบจุด O

$ds = (r/2)d\theta$ θ เป็นเรเดียน

$dU = F.ds + F.ds$

$dU = F(r/2)d\theta + F(r/2)d\theta$

$dU = F\, r\, d\theta$

$M = Fr$

$$dU = M\, d\theta \qquad (8.2)$$

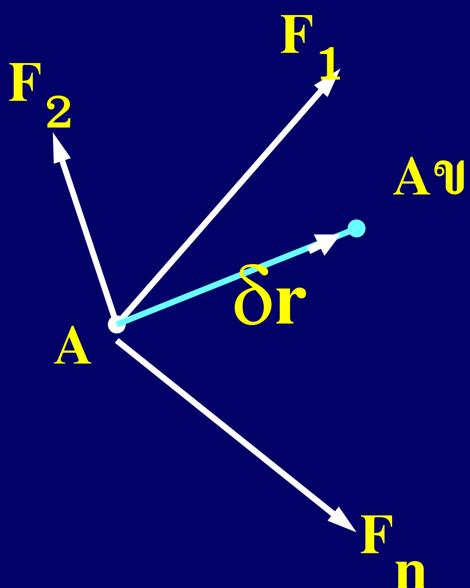
8.3 หลักการงานสมมติ VIRTUAL WORK

เนื่องจากโครงสร้างในทางสถิตยศาสตร์ จะคงรูปเสมอ ไม่มีการเคลื่อนที่ ดังนั้นเมื่อจะนำวิธีการเกิดงานมาช่วยคำนวณจึงต้องสมุมิให้เกิดงาน

สัญลักษณ์ของการสมมติจึงใช้ δ $\qquad \delta U$ = งานสมมติ

$\delta\theta$ δs = การเคลื่อนที่สมมติ

สมมุติว่าเมื่อระบบแรงทำให้ A เคลื่อนที่ไป Aข
ใช้ผลคูณแบบ dot product ของเวคเตอร์



$$\delta U = \overline{F_1} \cdot \overline{\delta r} + \overline{F_2} \cdot \overline{\delta r} + \ldots\ldots + \overline{F_n} \cdot \overline{\delta r}$$

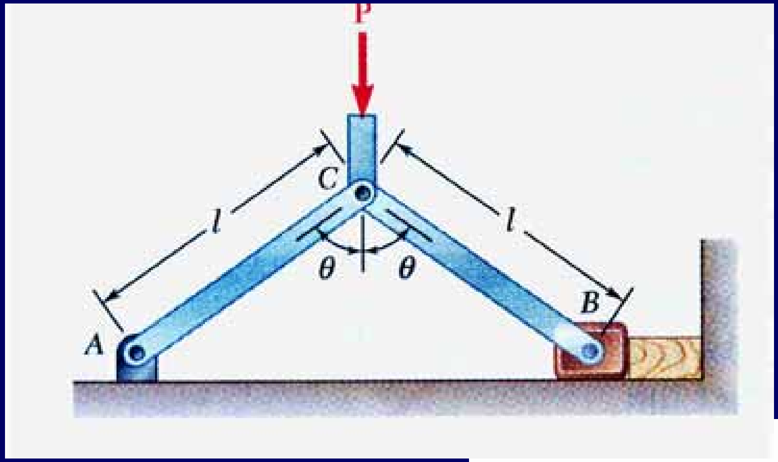
$$\delta U = (\overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{F_n}) \cdot \overline{\delta r}$$

$$\delta U = \overline{R} \cdot \overline{\delta r}$$

ถ้า $\sum \overline{F} = 0$ หรือ $\overline{R} = 0$ $\qquad \sum\delta U = 0$

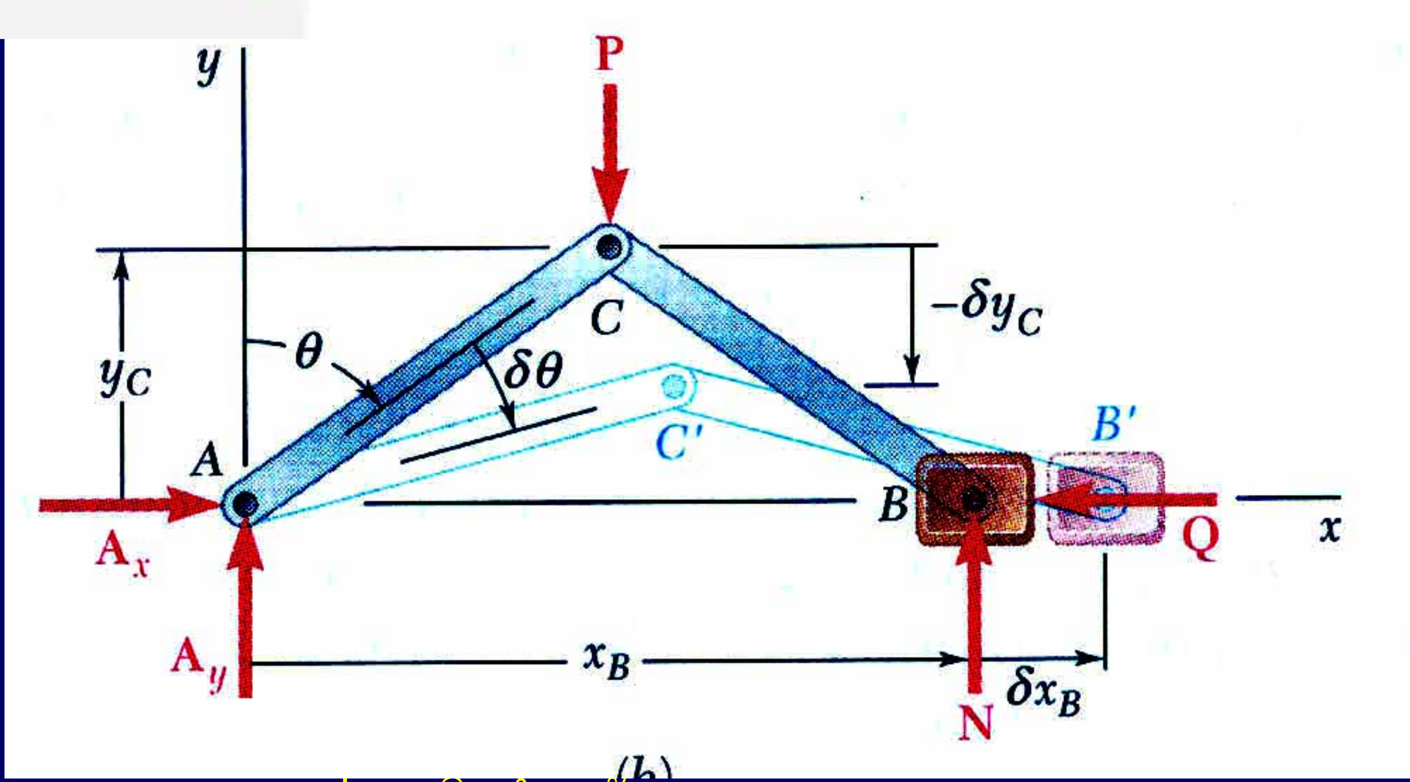
เป็นสภาวะสมดุล

8.4 การประยุกต์ใช้หลักการงานสมมติ

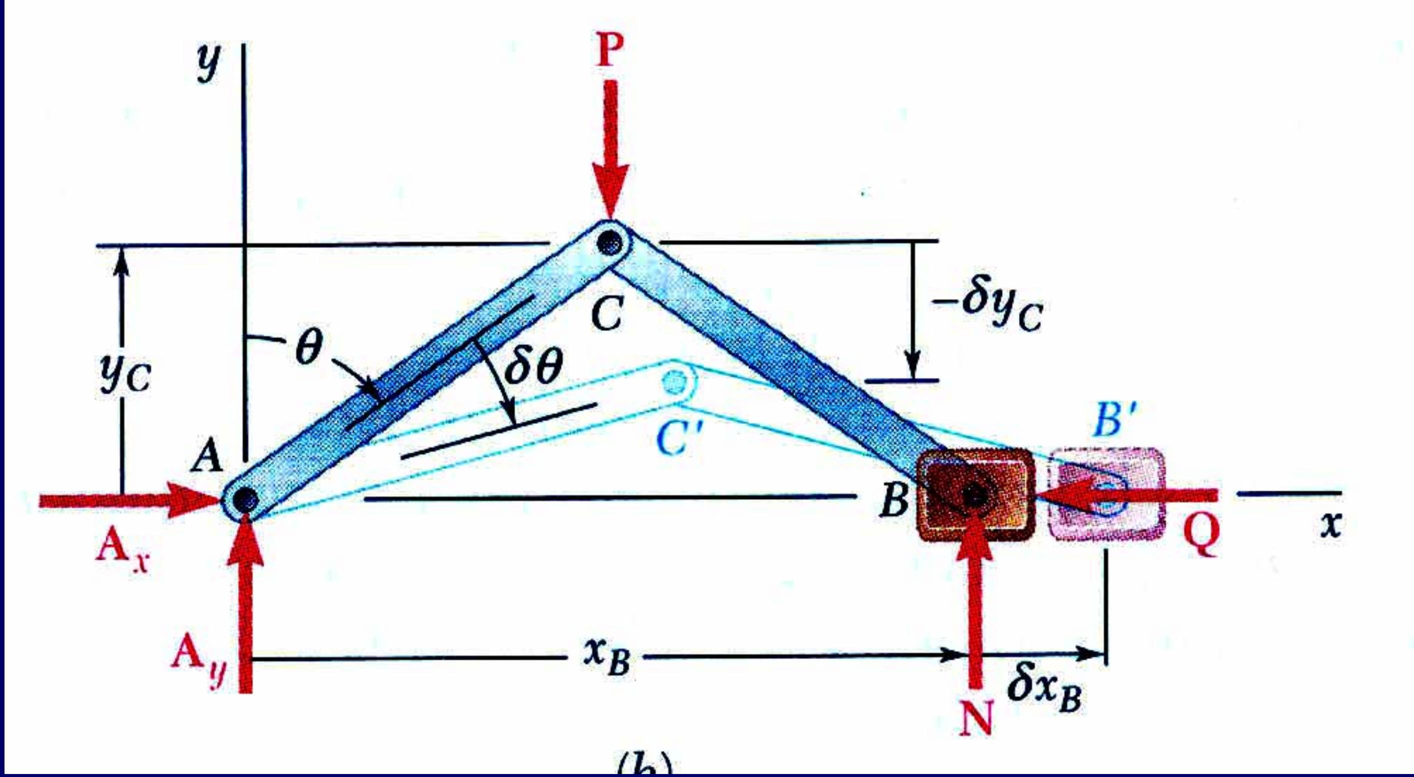


เครื่องกล บีบท่อนไม้ที่ B

สมมติว่ามีการเคลื่อนที่ที่ท่อนไม้ B



ระหว่างเคลื่อนที่
มีแรงที่เกี่ยวข้องคือ
แรง P และแรงต้าน
Q

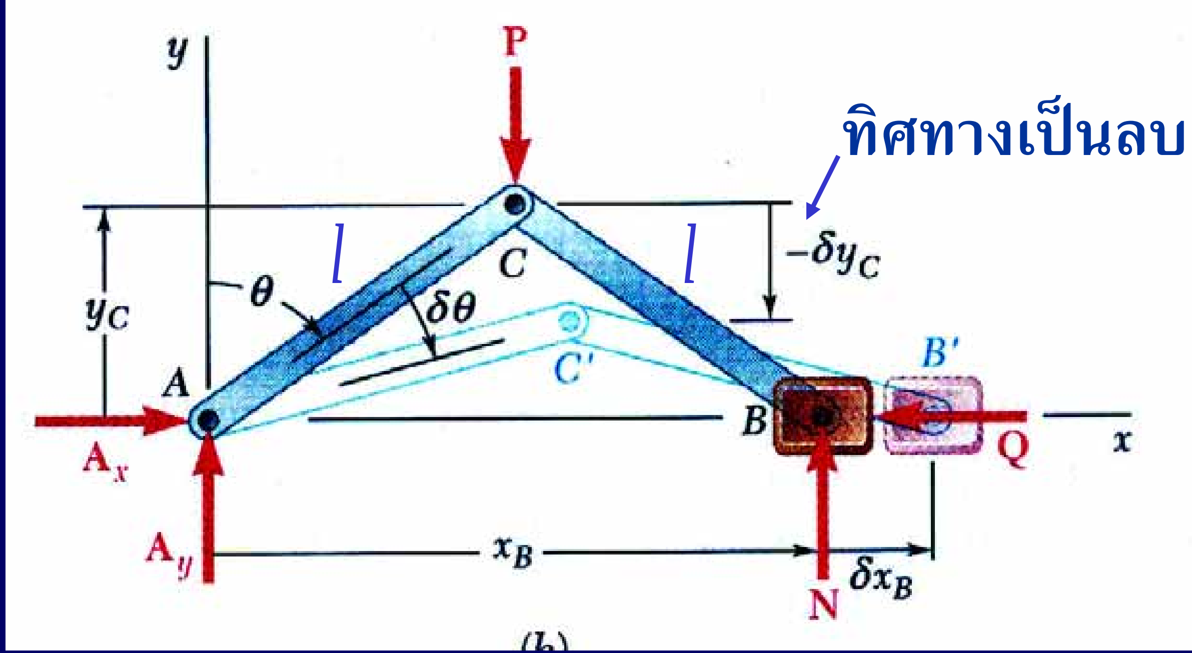


เมื่อยังไม่คิดแรงเสียดทานท่อนไม้กับพื้น

ที่ A เป็นหมุดตรึง แรงปฏิกิริยาที่ A ไม่ให้งาน

แรงปฏิกิริยา N ที่ B ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ ไม่ให้งาน

แรงที่ให้งานคือ แรง P และแรงต้าน Q เท่านั้น



θ คือ degree of Freedom มีหนึ่งค่า

$X_B = 2l\sin\theta$

อนุพันธ์ X_B คือ

$\delta X_B = 2l\cos\theta\delta\theta$

$Y_C = l\cos\theta$

อนุพันธ์ Y_C คือ

$\delta Y_C = -l\sin\theta\delta\theta$

งานจาก Q $\quad \delta U_Q = -Q(\delta X_B)$ $\quad$ แนวเดียวกันทิศทางตรงข้าม

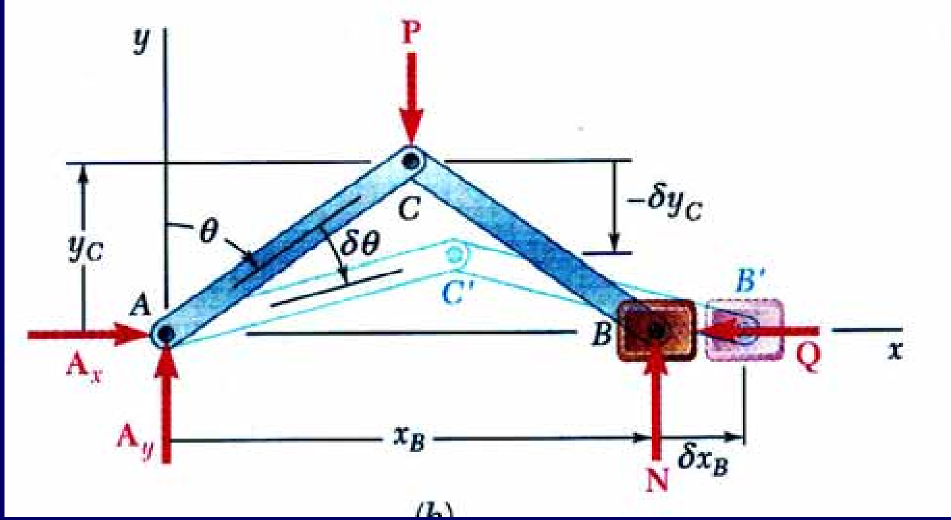
งานจาก P $\quad \delta U_P = P(-\delta Y_C)$ $\quad$ แนวเดียวกันทิศทางตามกัน

รวมงานทั้งหมดเข้าด้วยกัน $\quad \delta U = \delta U_Q + \delta U_P = -Q\,\delta X_B - P\,\delta Y_C$

แทนค่า δX_B และ δY_C $\quad \delta U = -Q\,2l\cos\theta\delta\theta - P(-l\sin\theta\delta\theta)$

$\Sigma\,\delta U = 0$ $\quad Q\,2l\cos\theta\delta\theta = Pl\sin\theta\delta\theta$ ________ 8.5

$Q = (1/2)P(\tan\theta)$ ________ 8.6



สรุปลักษณะอันเป็นประโยชน์ของงานสมมติ

ในการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยงานสมมติ

ทำให้สามารถลดภาระในการคำนวณลงได้มาก

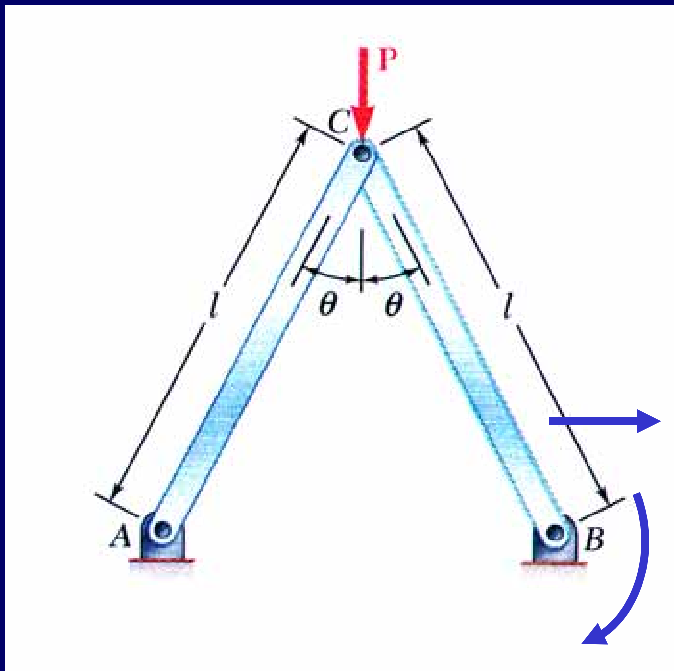
เช่น แรงปฏิกิริยาที่จุดต่อและแรงภายในส่วนใหญ่

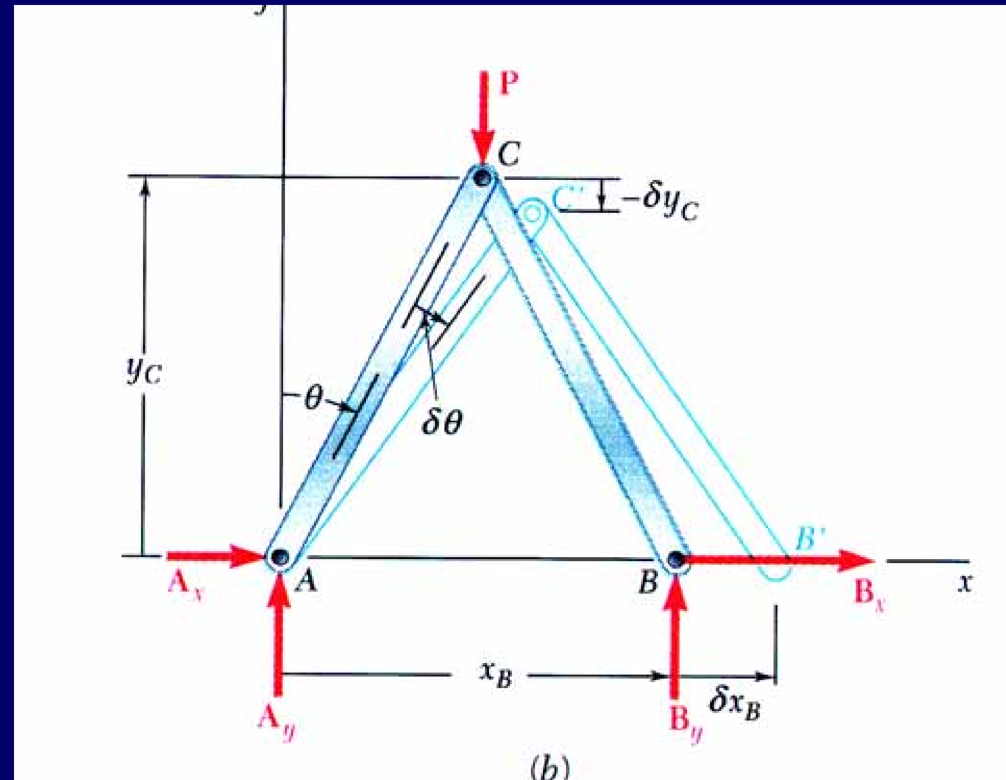
อาจจะเหลือเพียง

น้ำหนักบรรทุก แรงกระทำภายนอก และแรงเสียดทาน

แต่หากเห็นว่าเกิดความยุ่งยากมาก ควรกลับไปใช้วิธีเดิม คือสมการสมดุล

ในลักษณะโครงสร้างที่ถูกบังคับอย่างสมบูรณ์ด้วยหมุดหมุนตรึง



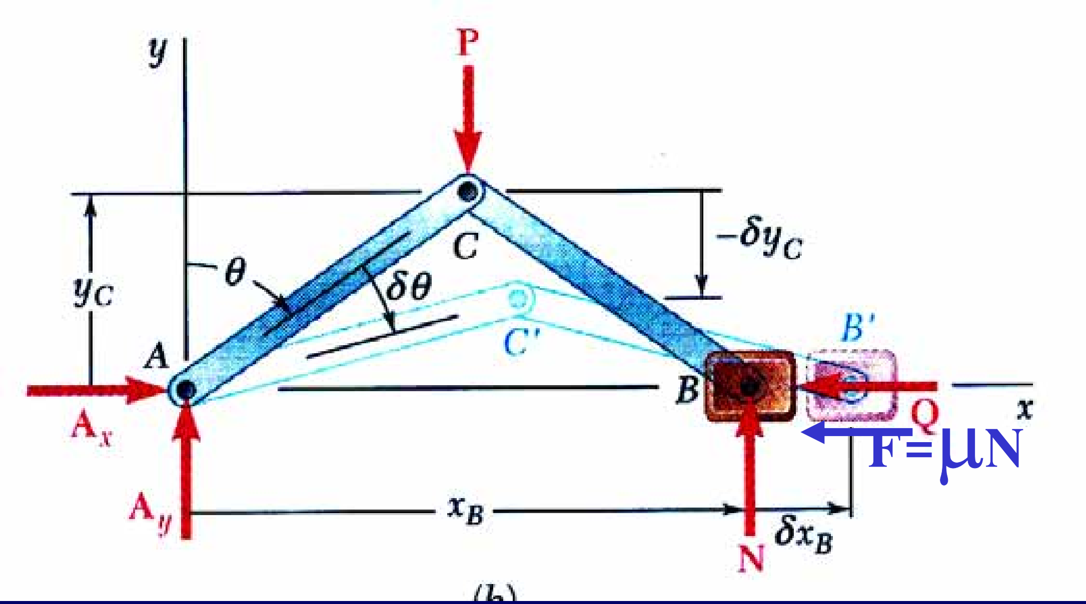


A และ B เป็นหมุดหมุนตรึง

จะสมมติให้หมุดใดหมุดหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนว หรือสมมติให้เกิดการหมุนทั้งโครงก็ได้

8.5 เครื่องกลจริง และประสิทธิภาพเชิงกล

จากเครื่องบีบไม้ในหัวข้อ 8.4



เมื่อมีแรงเสียดทาน

ระหว่างท่อนไม้กับพื้น

$$F = \mu N$$

$$\Sigma F_Y : \quad N = P/2$$

$$F = \mu P/2$$

$$\delta U = \quad - Q\,\delta X_B - P\,\delta Y_C \; - F\,\delta X_B$$

$$\delta X_B = 2l\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta Y_C = -\,l\sin\theta\delta\theta \qquad \delta U = \; - 2Q\,l\cos\theta\delta\theta + P(l\sin\theta\delta\theta\;) - \mu P l\cos\theta\delta\theta$$

$$\Sigma\,\delta U = \;0 \qquad 2Q\,l\cos\theta\delta\theta = P(l\sin\theta\delta\theta\;) - \mu P l\cos\theta\delta\theta \;\_\_\_\_\_\_\; 8.7$$

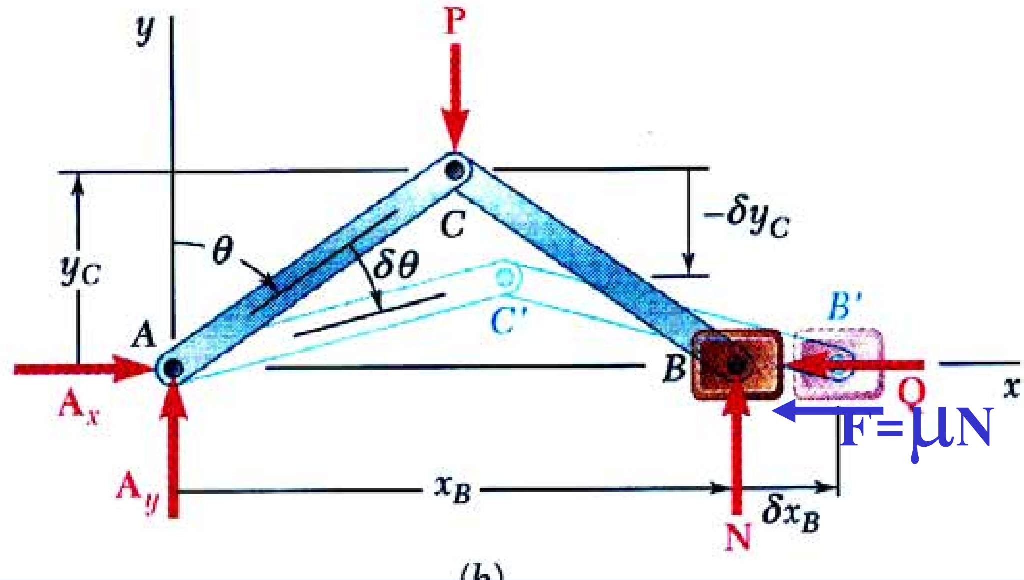
$$Q \;=\; (1/2)P(\tan\theta - \mu) \;\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\; 8.8$$

จากสมการ 8.8

$Q = (1/2)P(\tan\theta - \mu)$

เมื่อ $\mu = \tan\phi$

ϕ คือมุมแห่งความเสียดทาน



$Q = (1/2)P(\tan\theta - \tan\phi)$

จะได้ความจริงว่า

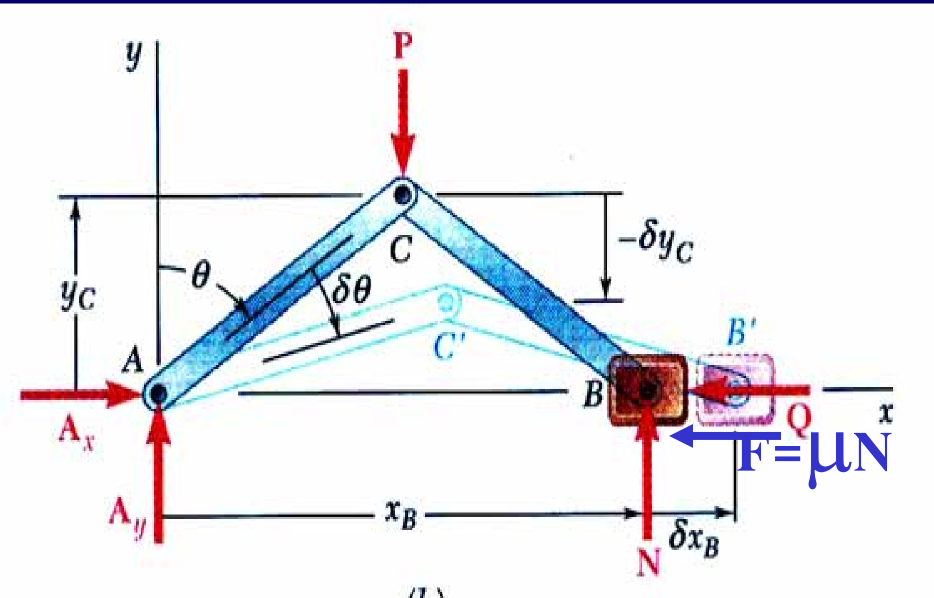
$\theta = \phi$: $(\tan\theta - \tan\phi) = 0$: $Q = 0$

$\theta < \phi$: $(\tan\theta - \tan\phi) < 0$: $Q < 0$ หรือมีเครื่องหมายเป็นลบ

$\theta > \phi$: $(\tan\theta - \tan\phi) > 0$: $Q > 0$ หรือมีเครื่องหมายเป็นบวก

เพราะฉนั้น เครื่องกลนี้จะทำให้เกิดงานได้เมื่อ $\theta > \phi$ เท่านั้น

ประสิทธิภาพเชิงกลของเครื่องกล (η)



$$\eta = \frac{\text{Output Work}}{\text{Input Work}} \qquad 8.9$$

$$\eta = \frac{\delta U_Q}{\delta U_P} = \frac{2Ql\cos\theta\delta\theta}{Pl\sin\theta\delta\theta}$$

แทนค่า Q จากสมการ 8.8

$$Q = (1/2)P(\tan\theta - \mu)$$

$$\eta = \frac{P(\tan\theta - \mu)l\cos\theta\delta\theta}{Pl\sin\theta\delta\theta} = 1 - \mu\cot\theta$$

จะได้ว่า

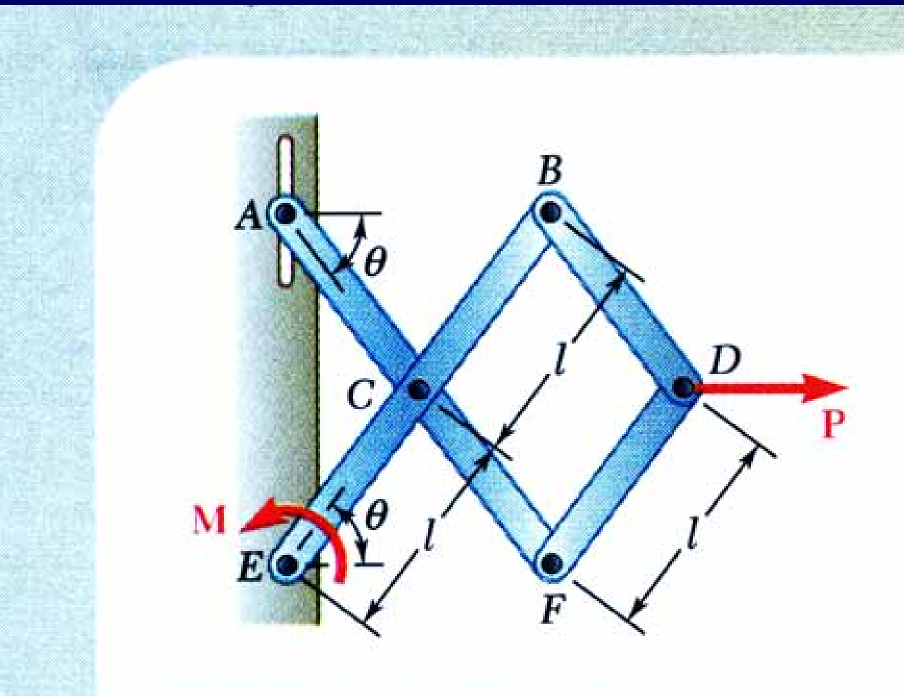
$\mu = 0$ (ไม่มีแรงเสียดทาน) $\quad \eta = 1$

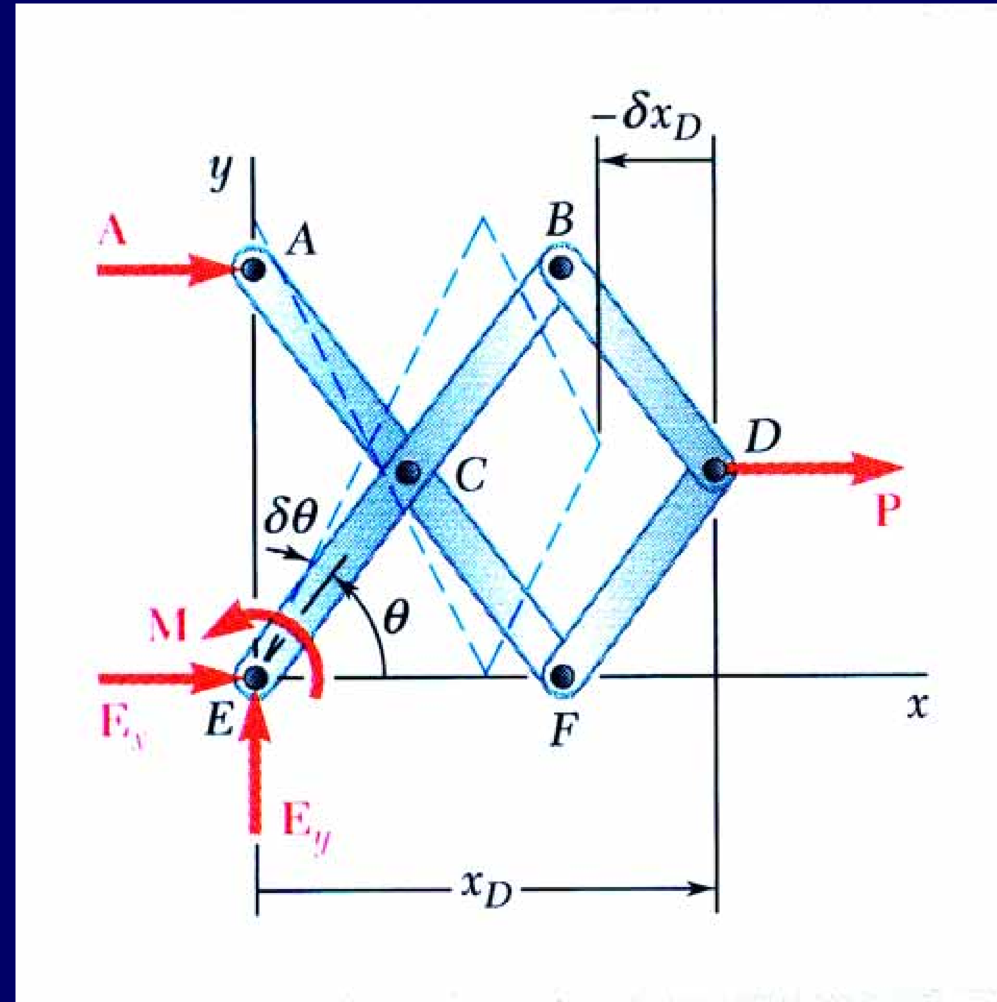
$\theta = \phi$ $(\mu \cot\theta = 1)$ $\quad \eta = 0$

$\theta < \phi$ $(\mu \cot\theta > 1)$ $\quad \eta < 0$ หมายถึงติดลบ

$\theta > \phi$ $(\mu \cot\theta < 1)$ $\quad 0 < \eta > 1$

ตัวอย่าง 8.1





ให้หาโมเมนต์คู่ควบที่ E

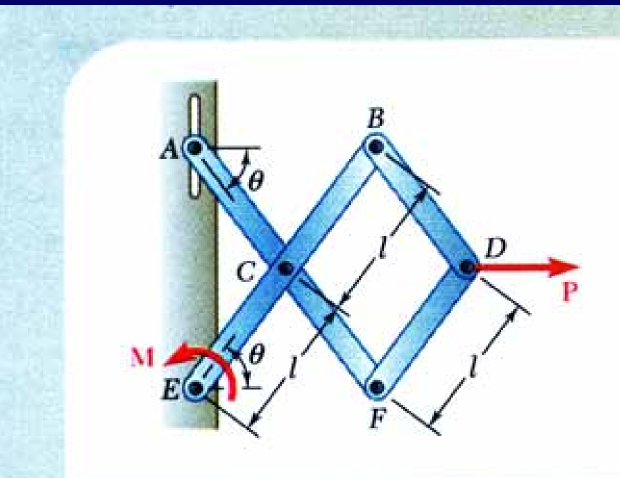
สมมติว่าโครงถูกทำให้ถอยหลัง

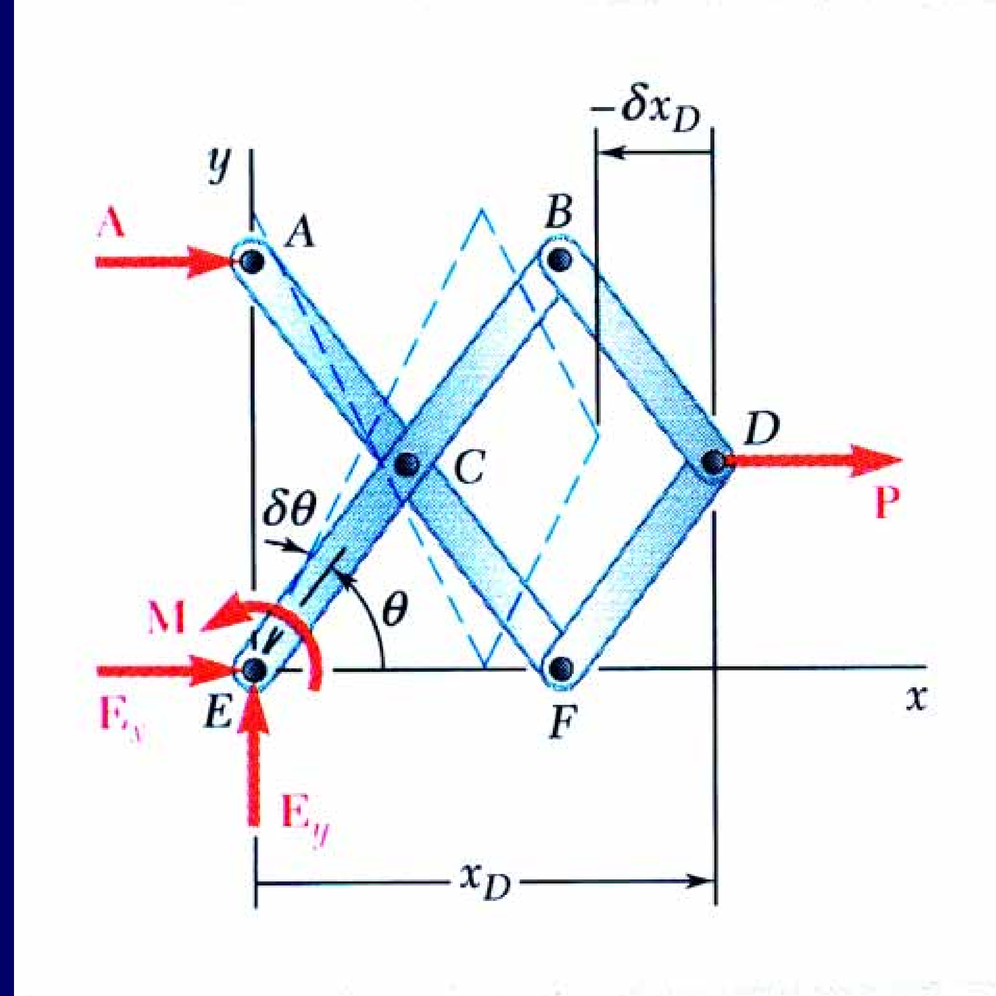
ตั้งแกน X-Y ที่หมุด E

$$X_D = 3l\cos\theta$$

อนุพันธ์ X_D คือ $\delta X_D = -3l\sin\theta\,\delta\theta$

ตัวอย่าง 8.1





ให้หาโมเมนต์คู่ควบที่ E

$X_D = 3l\cos\theta \qquad \delta X_D = -3l\sin\theta\delta\theta$

งานสมมติจะเกิดจาก M และ P

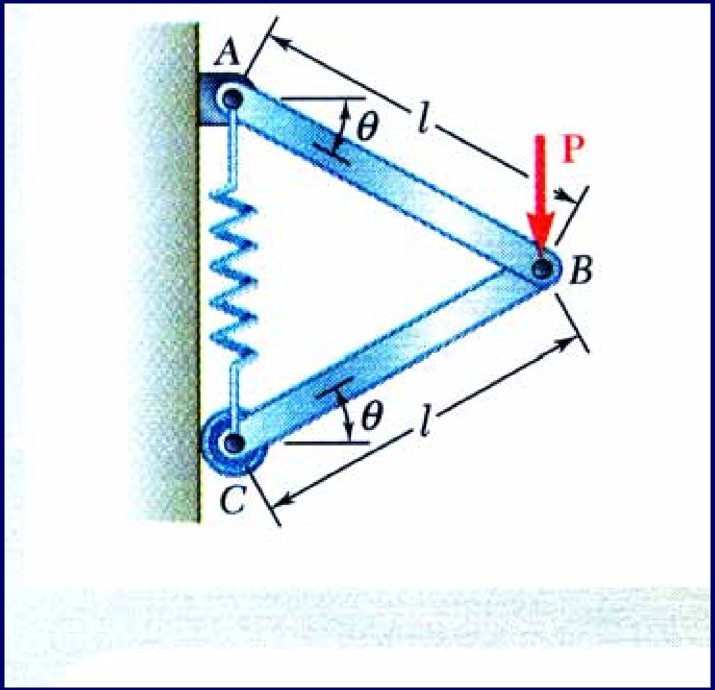
$\delta U_M = M\delta\theta \qquad \delta U_P = P\delta X_D$

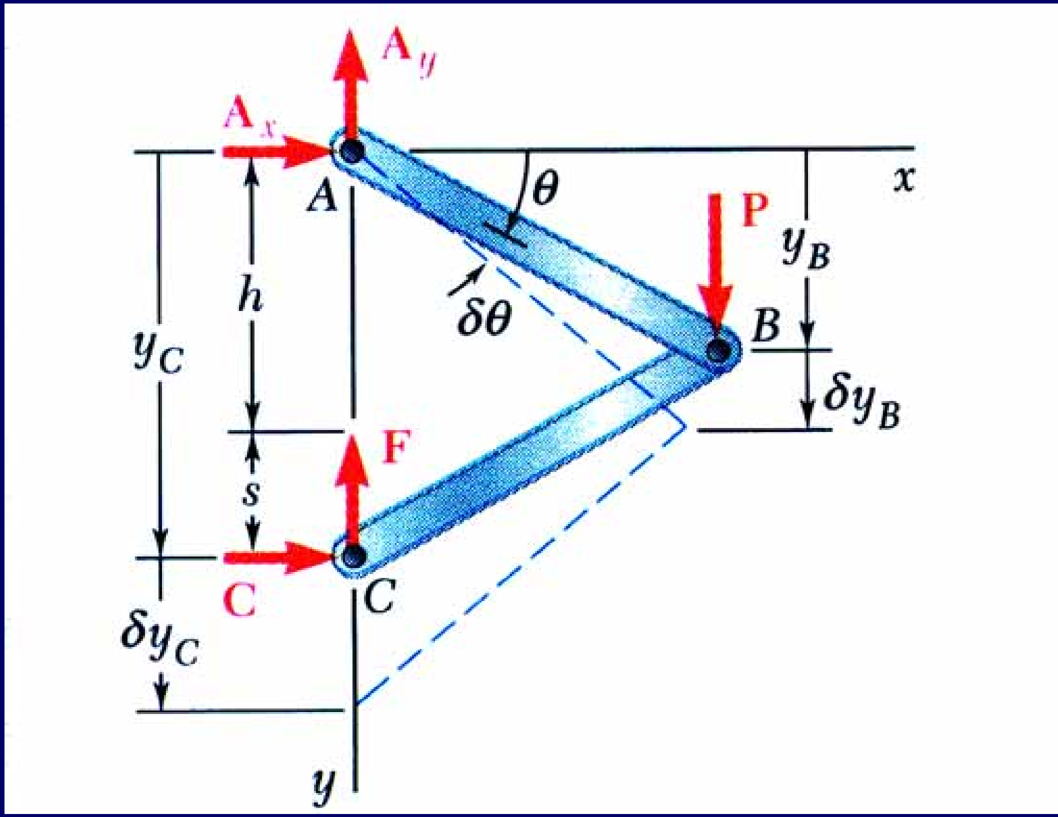
$\Sigma\delta U = 0 \qquad M\delta\theta + P\delta X_D = 0$

แทนค่า δX_D $\qquad M\delta\theta + P(-3l\sin\theta\delta\theta) = 0$

$M = 3Pl\sin\theta$ ________ ตอบ

ตัวอย่างที่ 8.2





ให้หานิพจน์สำหรับ

มุม θ และแรงดึงของสปริง

ให้ k เป็นค่าคงตัวสปริง

ระยะที่ยังไม่ยืดคือ h

ไม่คิดน้ำหนักเครื่องกล

เพื่อให้เกิดงาน สมติให้หมุด C เลื่อนลง

ระยะยืดเกิดแรงสปริงเท่ากับ s

ตั้งแกน X–Y ที่หมุด A

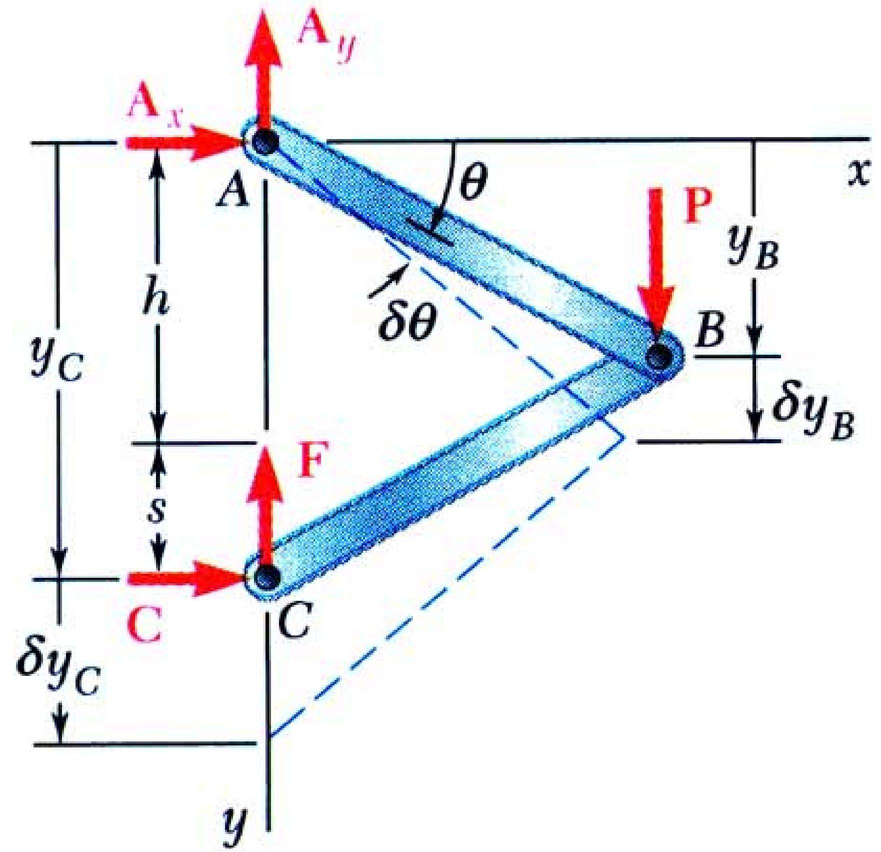
ตัวอย่างที่ 8.2

$$Y_B = l\sin\theta$$

$$\delta Y_B = l\cos\theta\delta\theta$$

$$Y_C = 2l\sin\theta$$

$$\delta Y_C = 2l\cos\theta\delta\theta$$



$$S = Y_C - h = 2l\sin\theta - h$$

แรงในสปริง $F = ks$

$$F = k(2l\sin\theta - h)$$

$$\delta U_P = P\,\delta Y_B$$

$$\delta U_F = -F\,\delta Y_C$$

$$\Sigma\delta U = 0 \qquad P\,\delta Y_B - F\,\delta Y_C = 0$$

$$P\,l\cos\theta\delta\theta - F\,(2l\cos\theta\delta\theta) = 0$$

$$P\,l\cos\theta\delta\theta - k(2l\sin\theta - h)\,(2l\cos\theta\delta\theta) = 0$$

$$\sin\theta = (P+2kh)/(4kl)$$

ตัวอย่างที่ 8.2

$Y_B = l\sin\theta$

$\delta Y_B = l\cos\theta\,\delta\theta$

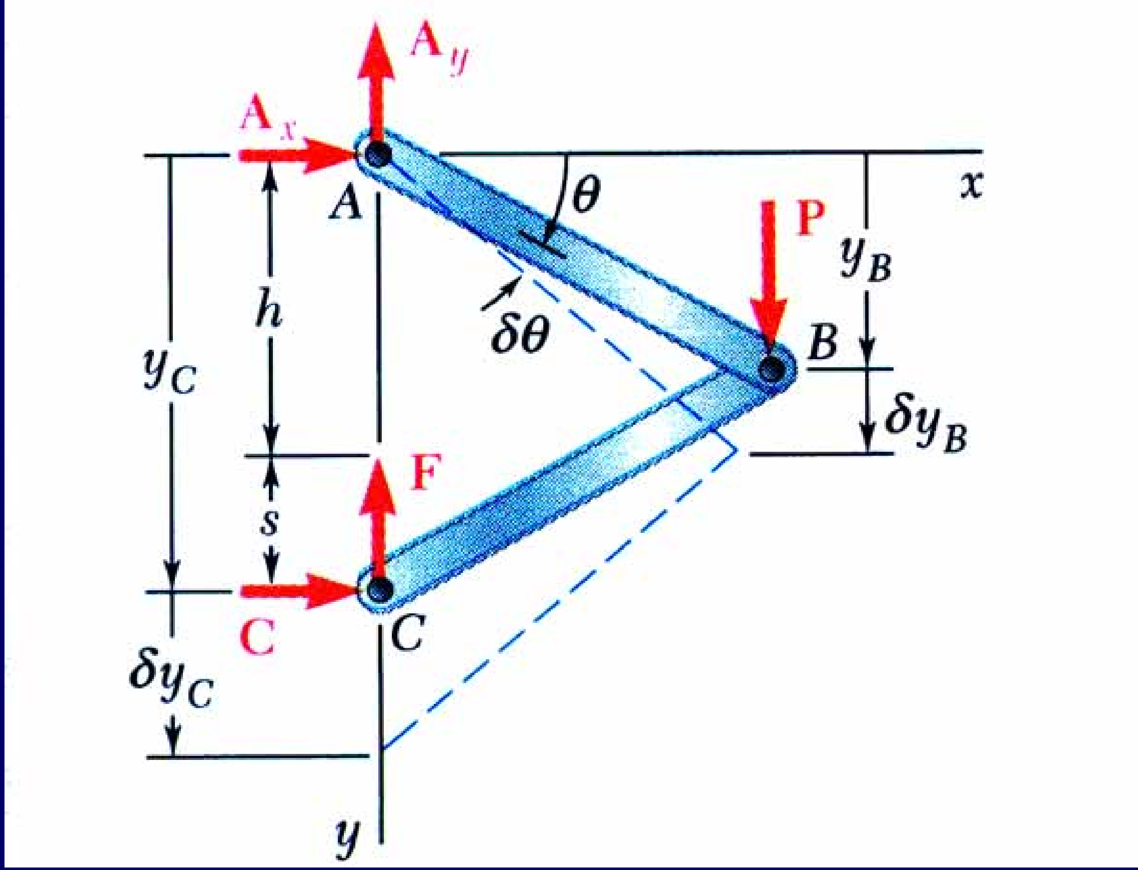
$Y_C = 2l\sin\theta$

$\delta Y_C = 2l\cos\theta\,\delta\theta$

$S = Y_C - h = 2l\sin\theta - h$

แรงในสปริง $F = ks$

$F = k(2l\sin\theta - h)$ ..... (1)



$\delta U_P = P\,\delta Y_B$

$\delta U_F = -F\,\delta Y_C$

$\sin\theta = (P+2kh)/(4kl)$ ______ ตอบ

แทนค่า $\sin\theta$ ใน (1)

$F = P/2$ ______ ตอบ

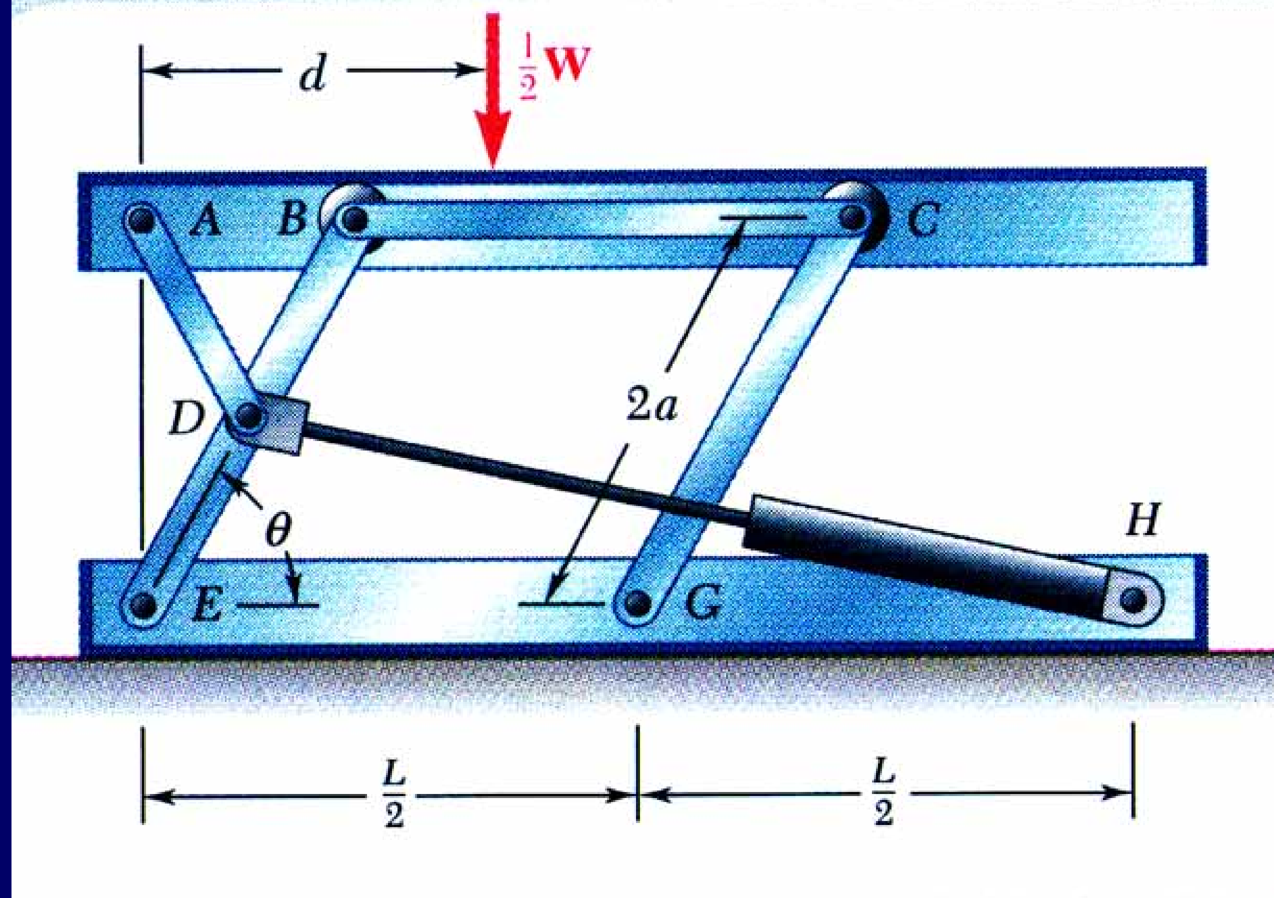
ตัวอย่างที่ 8.3

กล่อง W

มีมวล 1000 kg

บรรทุกบนชุดแม่แรง

ชุดแม่แรงประกอบด้วยไฮดรอลิค 2 ชุด

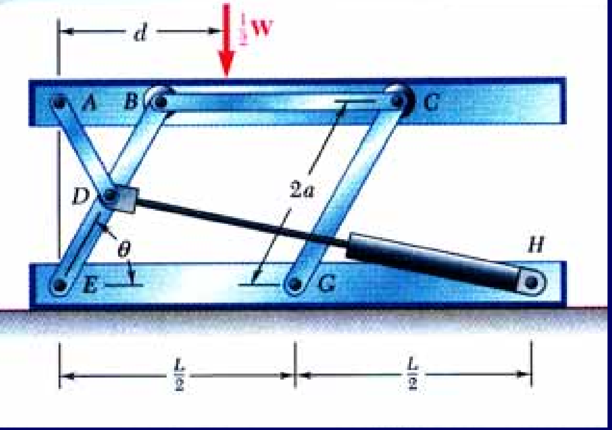


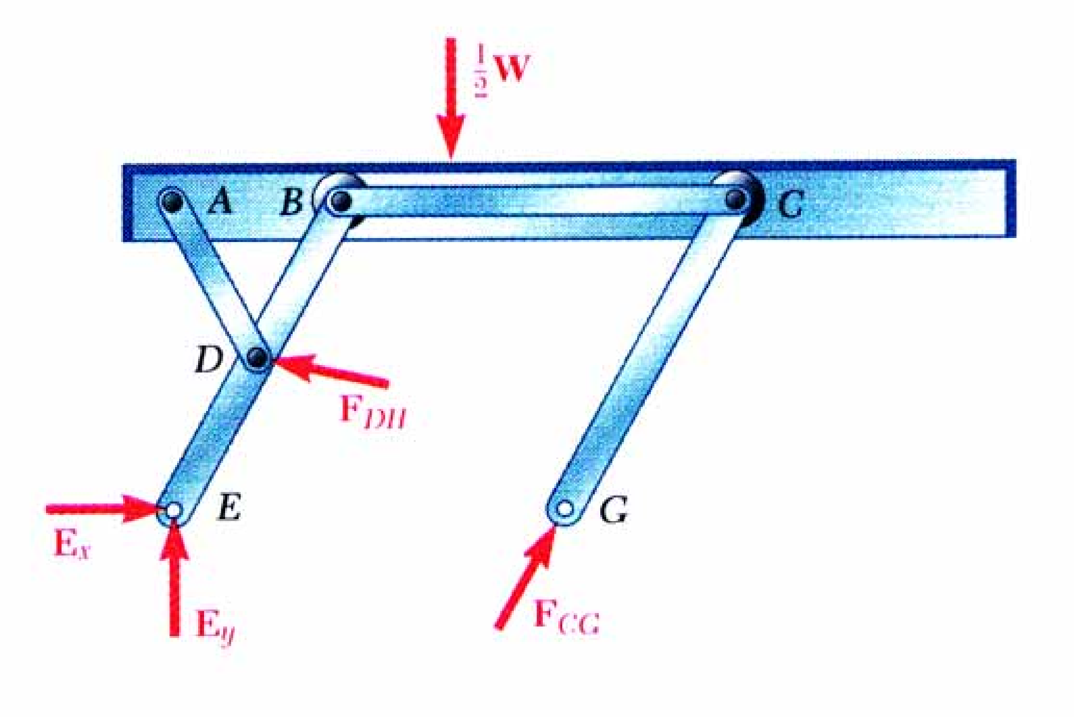
θ = 60ฐ

a = 0.7 m

L = 3.2 m

ให้หาแรงในกระบอกไฮดรอลิคแต่ละตัว





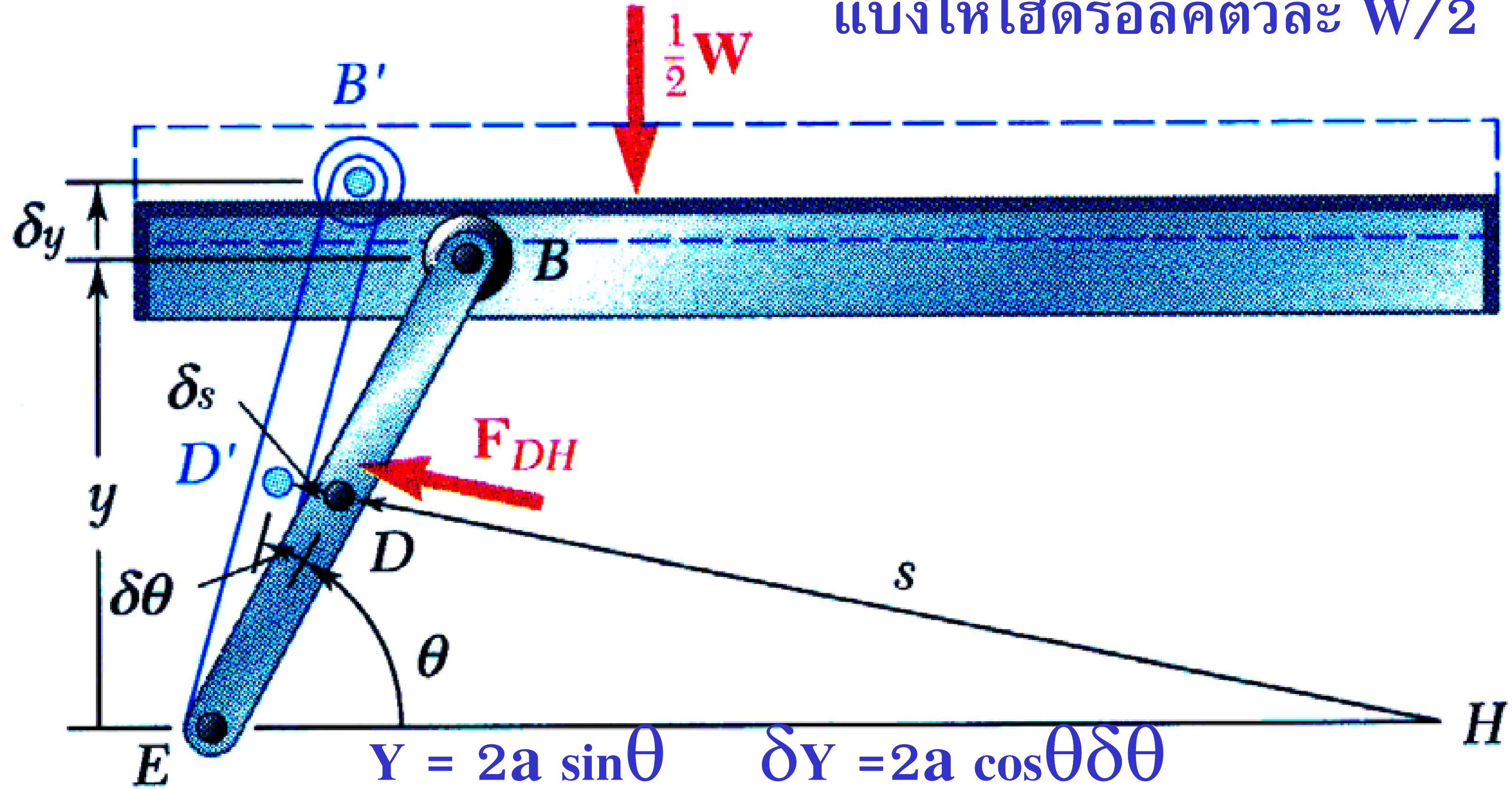
แยกส่วนแท่นรับน้ำหนักออกมา

ที่ E และ G เป็นหมุดหมุนอยู่กับที่ ไม่ให้งาน

งานจะเกิดขึ้นได้เฉพาะจากแรงกระบอกไฮดรอลิค F_{DH}

และน้ำหนักบรรทุก W

แบ่งให้ไฮดรอลิคตัวละ W/2



$Y = 2a \sin\theta \qquad \delta Y = 2a \cos\theta\,\delta\theta$

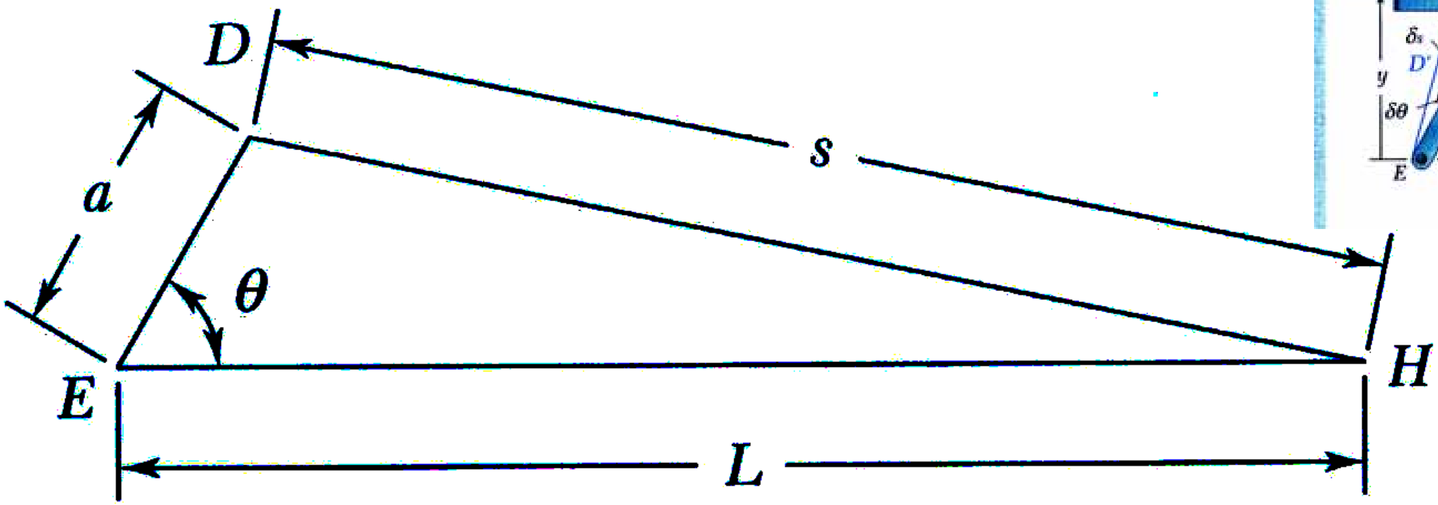
δs คือระยะD>Dข

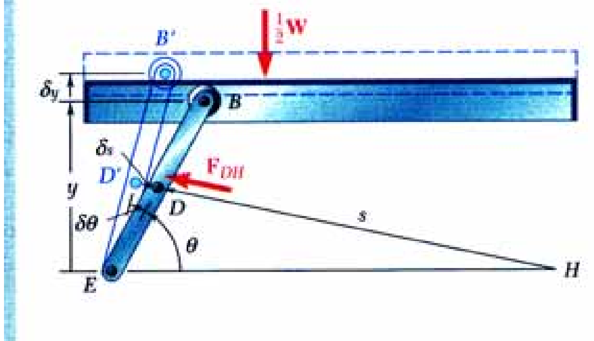
ตั้งแกน X-Y ที่ หมุด E เพื่อให้เกิดงานสมมติ ให้แท่นยกขึ้น

จากรูป $\delta U_W = -(1/2)W\,\delta Y \qquad \delta U_F = F\,\delta s$

$\Sigma\,\delta U = 0$

$$-(1/2)W\,\delta Y + F\,\delta s = 0 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$





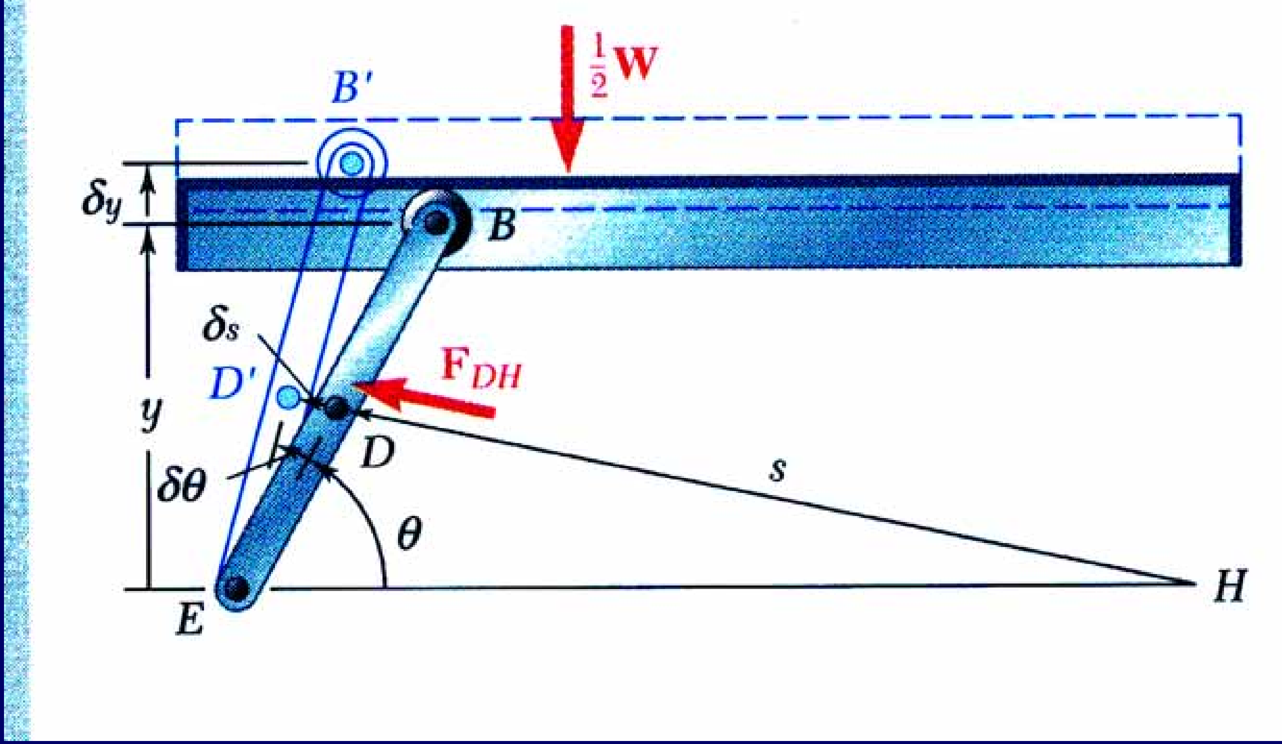
จากกฎของ cosine $S^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$

หาอนุพันธ์ (diff) ได้ $2S\,\delta S = 0 + 0 - 2aL(-\sin\theta)\,\delta\theta$

$\delta S = aL(\sin\theta)\,\delta\theta / S$ ______________ (2)

$\delta Y = 2a \cos\theta\delta\theta$

$\delta S = aL(\sin\theta)\, \delta\theta\, /S$



แทนค่า δY δS ลงในสมการ (1)

$$-(1/2)W\,\delta Y + F\,\delta S = 0$$

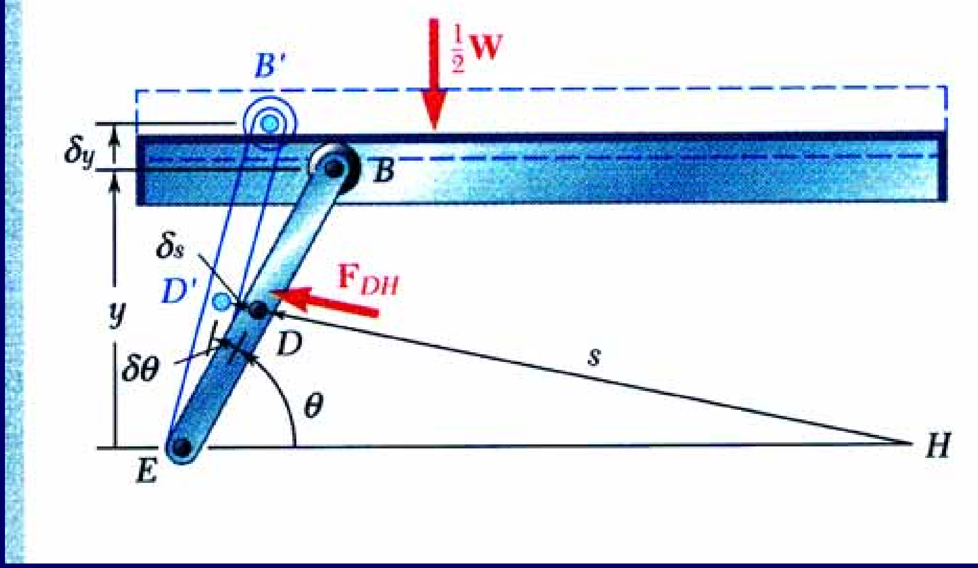
$$-(1/2)W\,2a\cos\theta\delta\theta + F\,aL(\sin\theta)\,\delta\theta\,/S = 0$$

แก้สมการ

$$F = (WS/L)\cot\theta \qquad \underline{\hspace{6cm}} \quad (3)$$

หาค่าตัวเลขแทนค่าในสมการ (3)

$F = (WS/L)\cot\theta$



$a = 0.7$ m

$L = 3.2$ m

$\theta = 60$ฐ

$W = 1000 \times 9.81 = 9.81$ kN

$S^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$

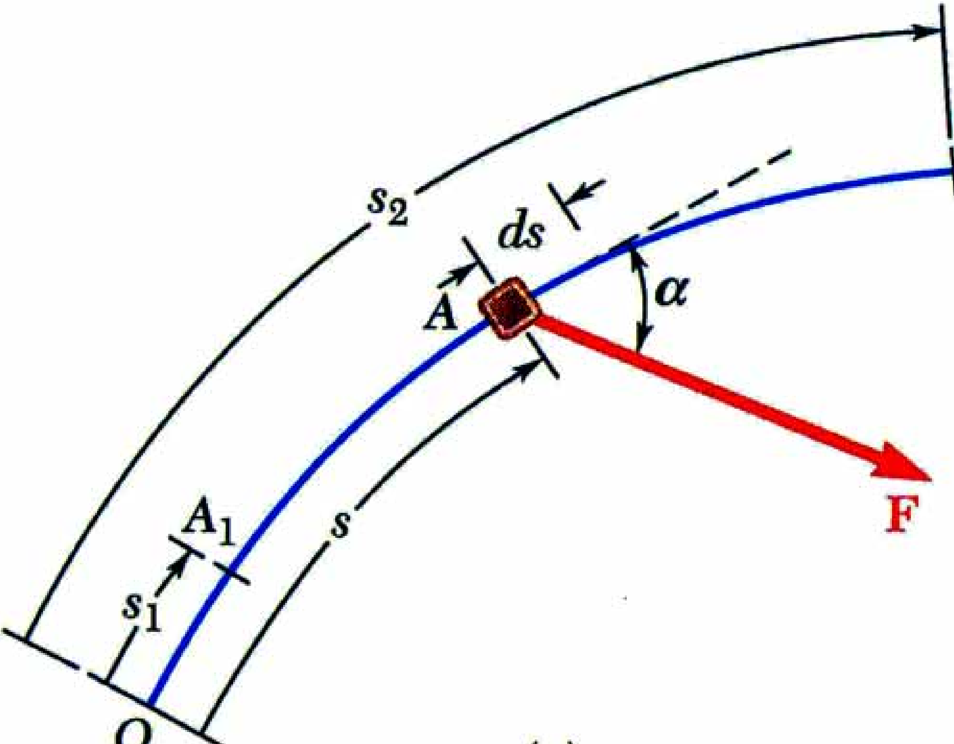
$S^2 = (0.7)^2 + (3.2)^2 - 2(0.7)(3.2)\cos 60$ฐ

$S = 2.91$ m

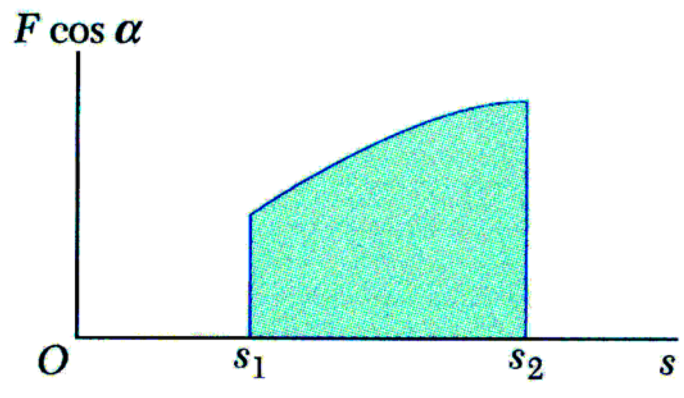
$F = (9.81\text{ kN } 2.91\text{ m}/3.2\text{ m})\cot 60$ฐ

$F = 5.15$ kN ________________ ตอบ

8.6 งานของแรงหนึ่งแรงขณะเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งอันตะ



(a)



(b)

จาก $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

เมื่อพิจารณาระยะ

ในช่วงหนึ่ง $A_1 \rightarrow A_2$

$$U_{1-2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad 8.11$$

และจาก $dU = F\, ds \cos\alpha$

$$U_{1-2} = \int_{S_1}^{S_2} F \cos\alpha \, ds$$

$$U_{1-2} = F\,(S_2 - S_1)$$

จากงานของโมเมนต์

$$dU = Md\theta \qquad \text{8.2}$$

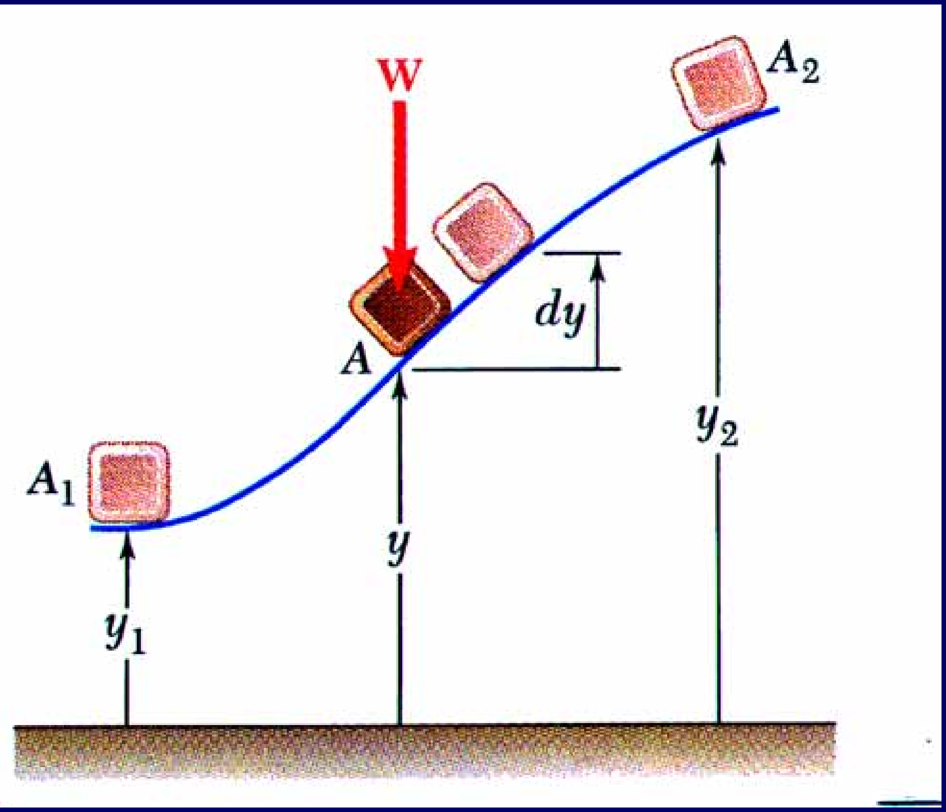
เมื่อพิจารณาการหมุนในช่วงจำกัดหนึ่ง

$$U_{1-2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta \qquad \text{8.12}$$

เมื่อค่า M คงที่

$$U_{1-2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

งานของน้ำหนัก



เมื่อเป็นลักษณะน้ำหนักเลื่อนขึ้น

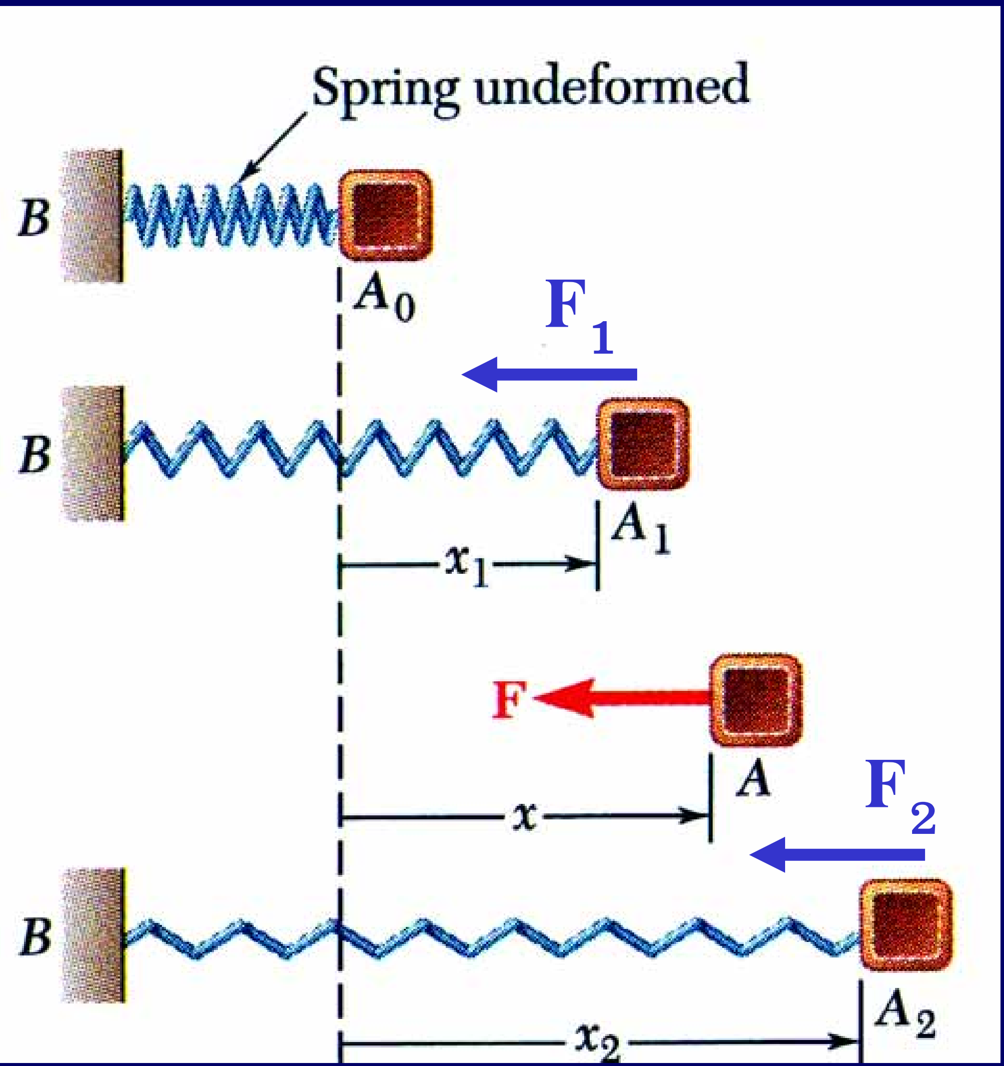
$$dU = -Wdy$$

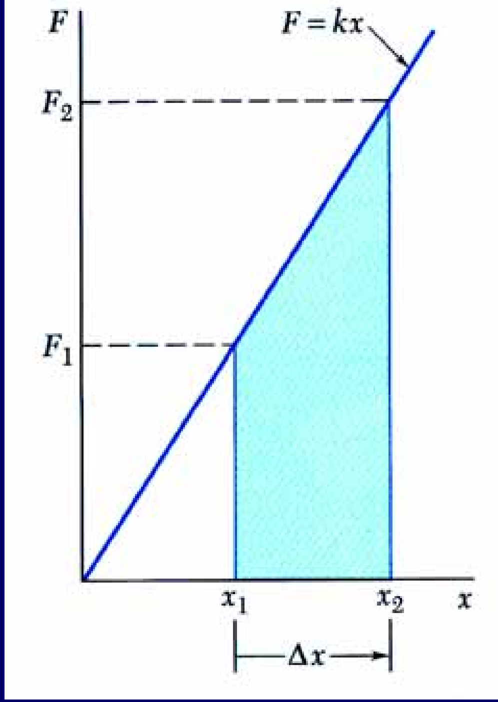
เมื่ออินทรีเกรทจาก A_1 ถึง A_2

$$U_{1-2} = -\int_{y_1}^{y_2} Wdy = Wy_1 - Wy_2 \qquad \text{8.13}$$

$$U_{1-2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y \qquad \text{8.13ข}$$

งานของแรงซึ่งเกิดจากสปริง





$$F = ks \qquad \text{8.14}$$

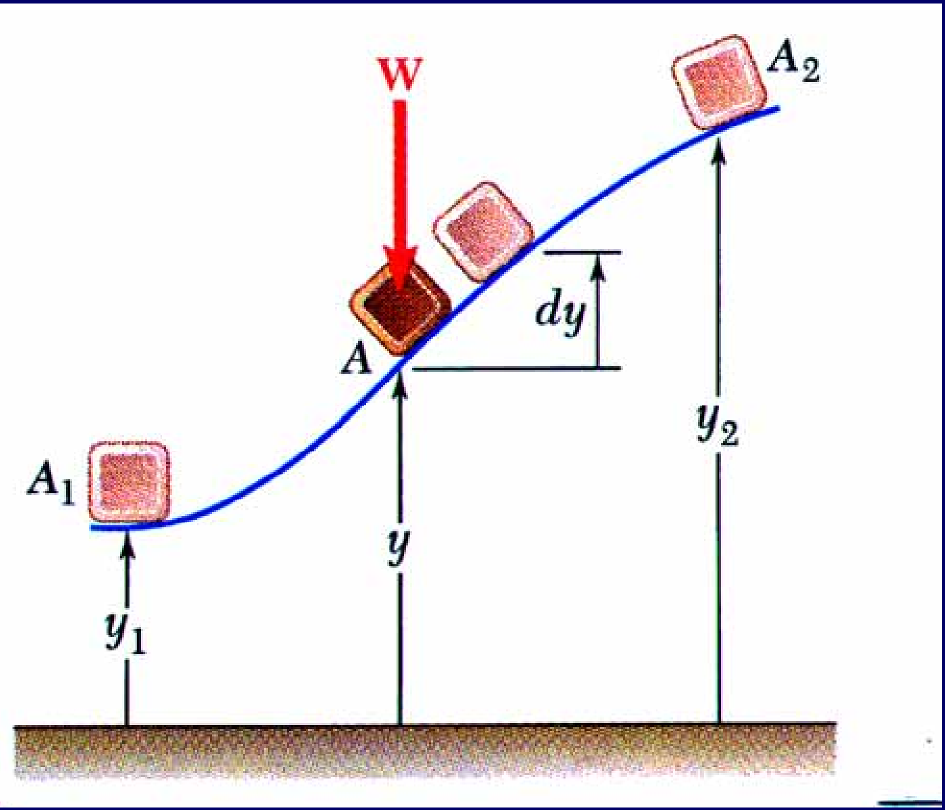
$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx$$

$$= (1/2)kx_1^{\,2} - (1/2)kx_2^{\,2} \qquad \text{8.15}$$

หรือจาก พ.ท. (คางหมู) $U_{1-2} = -(1/2)(F_1+F_2)\Delta x \qquad \text{8.16}$

8.7 พลังงานศักย์



เมื่อเป็นลักษณะน้ำหนักเลื่อนขึ้น

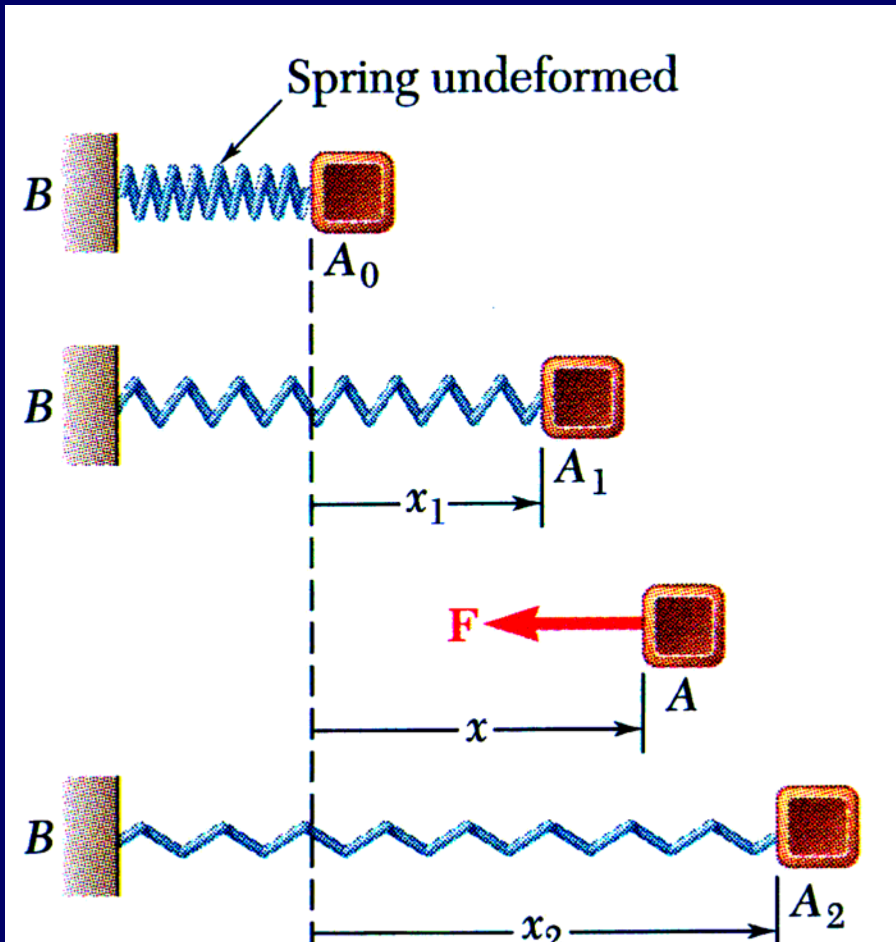
$$U_{1-2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2$$

เมื่อพิจารณาเป็นพลังงานศักดิ์จากแรงโน้มถ่วงของโลก ให้

Vg แทน Wy

เขียนใหม่เป็น

$$U_{1-2} = (Vg)_1 - (Vg)_2 \qquad 8.17$$



พิจารณาจาก A_1 ถึง A_2

$$U_{1-2} = (1/2)kx_1^2 - (1/2)kx_2^2$$

$$U_{1-2} = (Ve)_1 - (Ve)_2$$

ถ้า $(Ve)_2$ มากกว่า $(Ve)_1$

$$U = -V$$

$$dU = -dV \qquad 8.19$$

เมื่อหาปริพันธ์กลับ (Integrated)

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 \qquad 8.20$$

8.8 พลังงานศักย์และสมดุล

เมื่อนำไปพิจารณาเป็นงานสมมติ

$$\delta U = -\delta V$$

ถ้าตัวแปรคือมุม θ

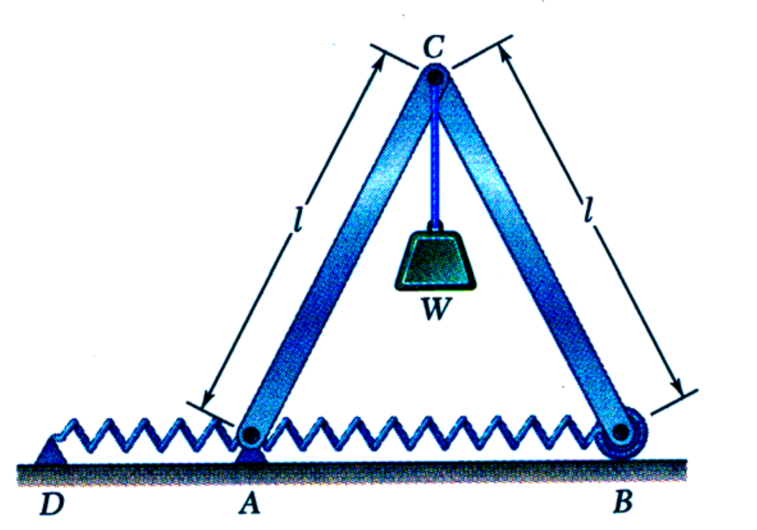
$$\delta U = -(\delta V/\delta\theta)\delta\theta$$ โดยที่ $\delta\theta$ ต้องไม่เท่ากับ 0

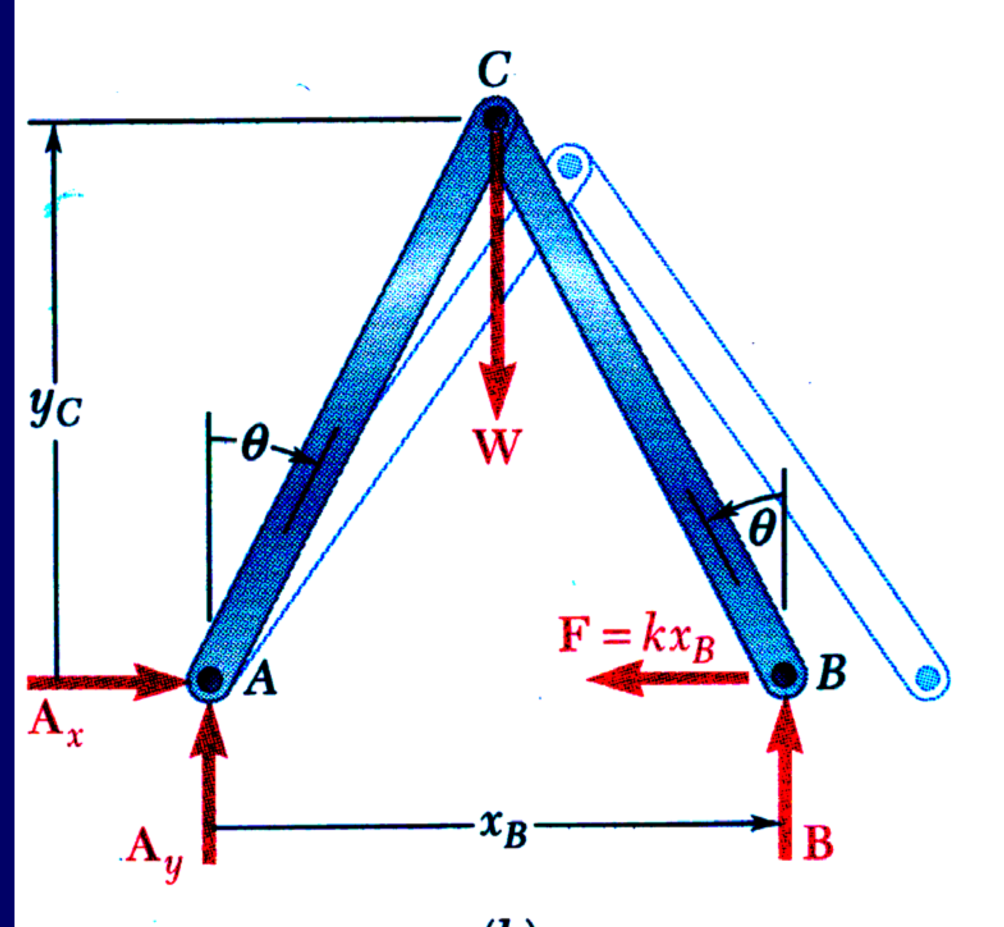
ในสภาวะสมดุล $dU = 0$

$$(\delta V/\delta\theta)\delta\theta = 0$$

เมื่อ $\delta\theta$ ไม่เท่ากับ 0 $\quad \delta V/\delta\theta = 0$ ________ 8.21

หมายถึงจุดที่ฟังชั่น V มีค่า Slope เป็น 0 หรืองาน = 0 หรือจุดสมดุลนั่นเอง





(b)

สปริงไม่ยืดเมื่อ B ทับ A

พิจารณาเมื่อสปริงยืดไป X_B

ตั้งแกน X-Y ที่ A

พลังงาน สปริง $Ve = (1/2)KX_B^2$

พลังงานจาก W : $Vg = WYc$

จากรูป $X_B = 2l\sin\theta$: $Yc = l\cos\theta$

$Ve = (1/2)K(2l\sin\theta)^2$ และ $Vg = W\,l\cos\theta$

รวม $V = Ve + Vg = 2Kl^2\sin^2\theta + W\,l\cos\theta$ ________ 8.22

เมื่อพิจารณาสมดุลเพื่อหาค่า θ

จาก

รวม $V = 2Kl^2\sin^2\theta + Wl\cos\theta$

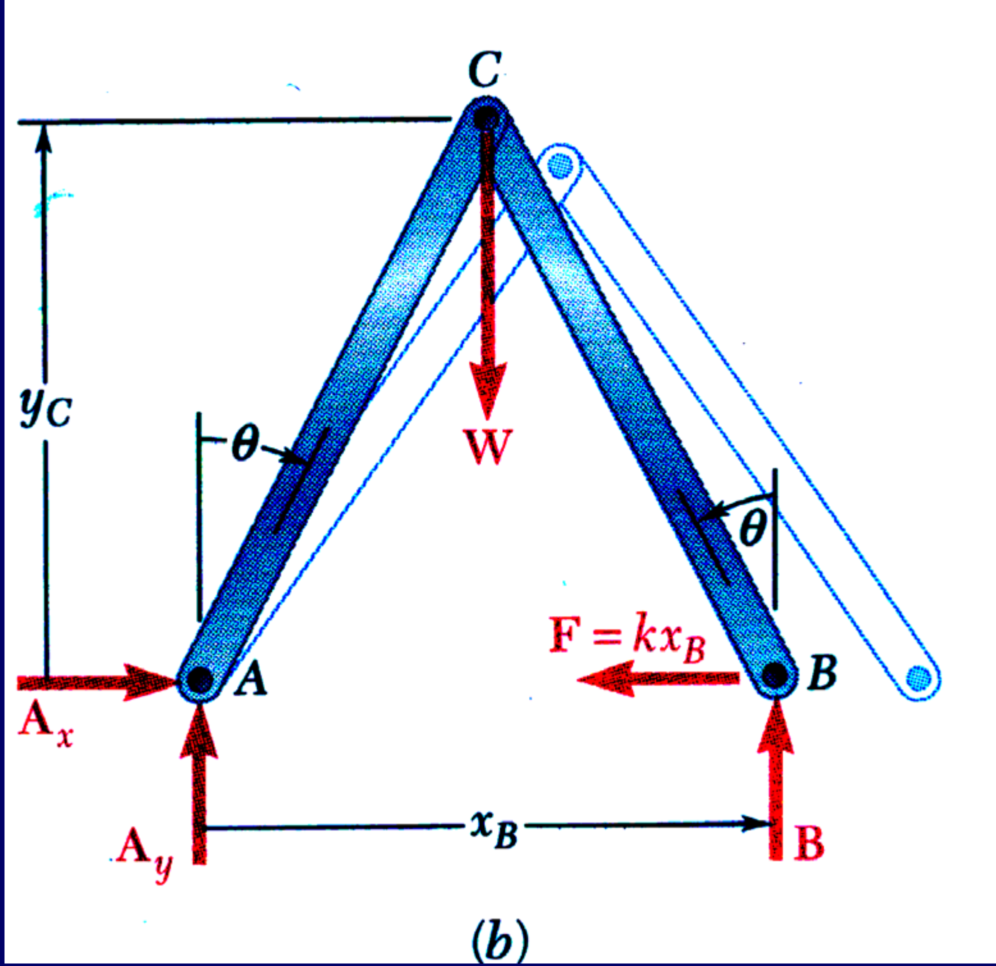
$dV/d\theta = 4Kl^2\sin\theta\cos\theta - Wl\sin\theta$

$= 0$

$dV/d\theta = l\sin\theta(4Kl\cos\theta - W) = 0$

ถ้า $l\sin\theta = 0$

$\sin\theta = 0$ $\qquad \theta = 0$

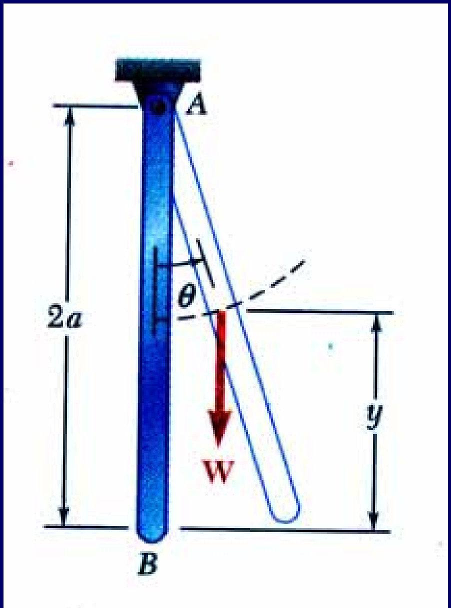


ถ้า $4Kl\cos\theta - W = 0$

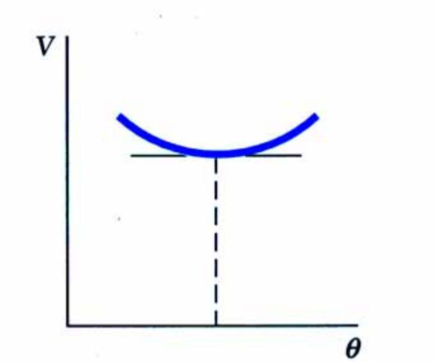
$\cos\theta = W/4kl$ $\qquad \theta = \cos^{-1}(W/4kl)$

กรณีนี้ W ต้องไม่มากกว่า $4kl$ เพราะ $\cos\theta$ มากกว่า 1 เป็นไปไม่ได้

8.9 เสถียรภาพของสมดุล Stability of Equilibrium



(a) Stable equilibrium



(a) Stable equilibrium

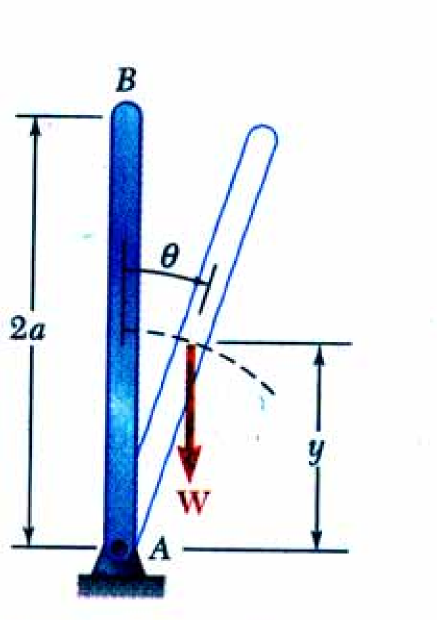
เมื่อ $dV/d\theta$ คือค่า Slope หรือความลาดเอียงของเส้นกร๊าฟ ของฟังชั่น V

$d^2V/d\theta^2$ คืออัตราการเปลี่ยนความลาดชัน

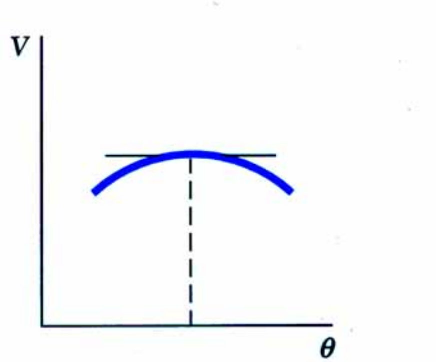
กรณีนี้ $d^2V/d\theta^2$ เป็น + หรือ มากกว่า 0

เป็นลักษณะสมดุลที่มีเสถียรภาพ

8.9 เสถียรภาพของสมดุล Stability of Equilibrium



(b) Unstable equilibrium

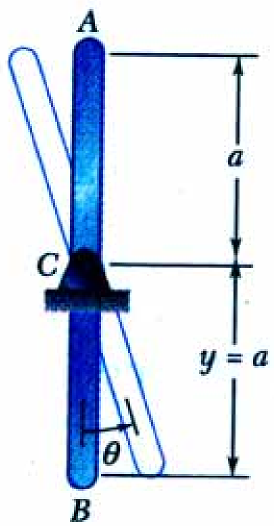


(b) Unstable equilibrium

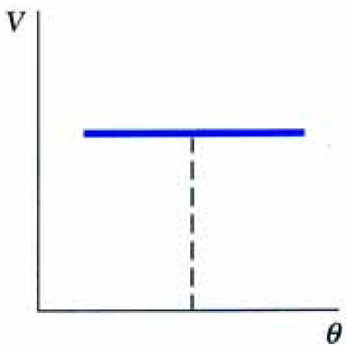
กรณีนี้ $d^2V/d\theta^2$ เป็น – หรือ น้อยกว่า 0

เป็นลักษณะสมดุลที่ไม่มีเสถียรภาพ

8.9 เสถียรภาพของสมดุล Stability of Equilibrium



(c) Neutral equilibrium

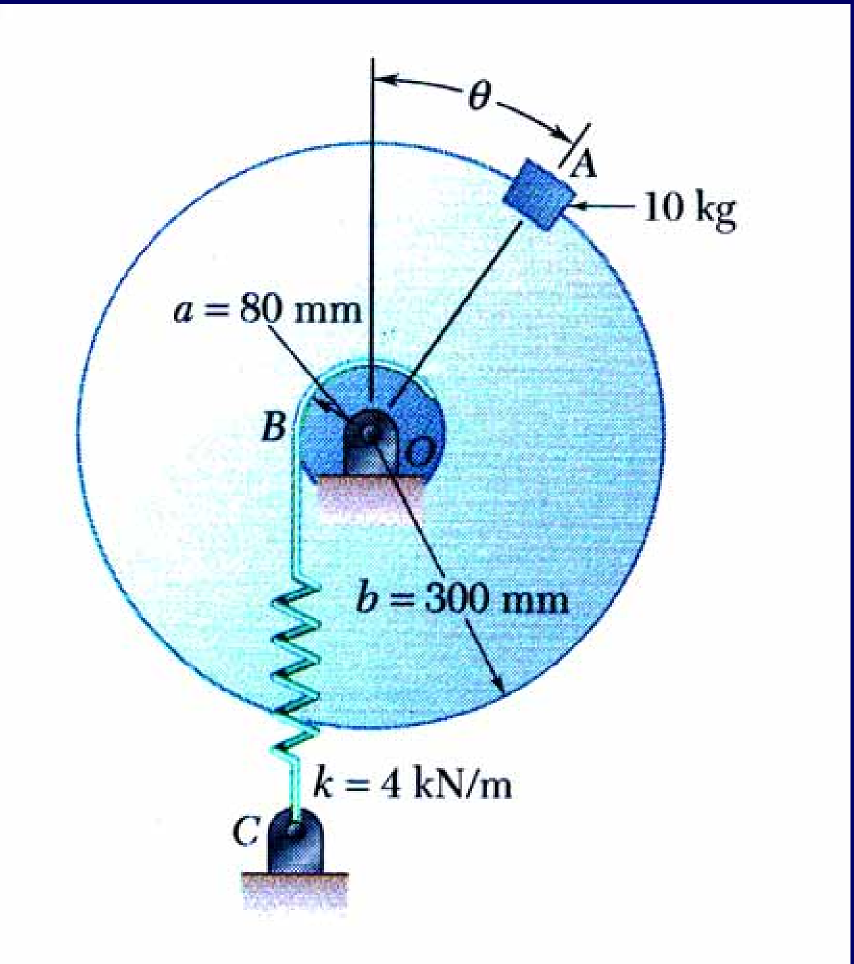


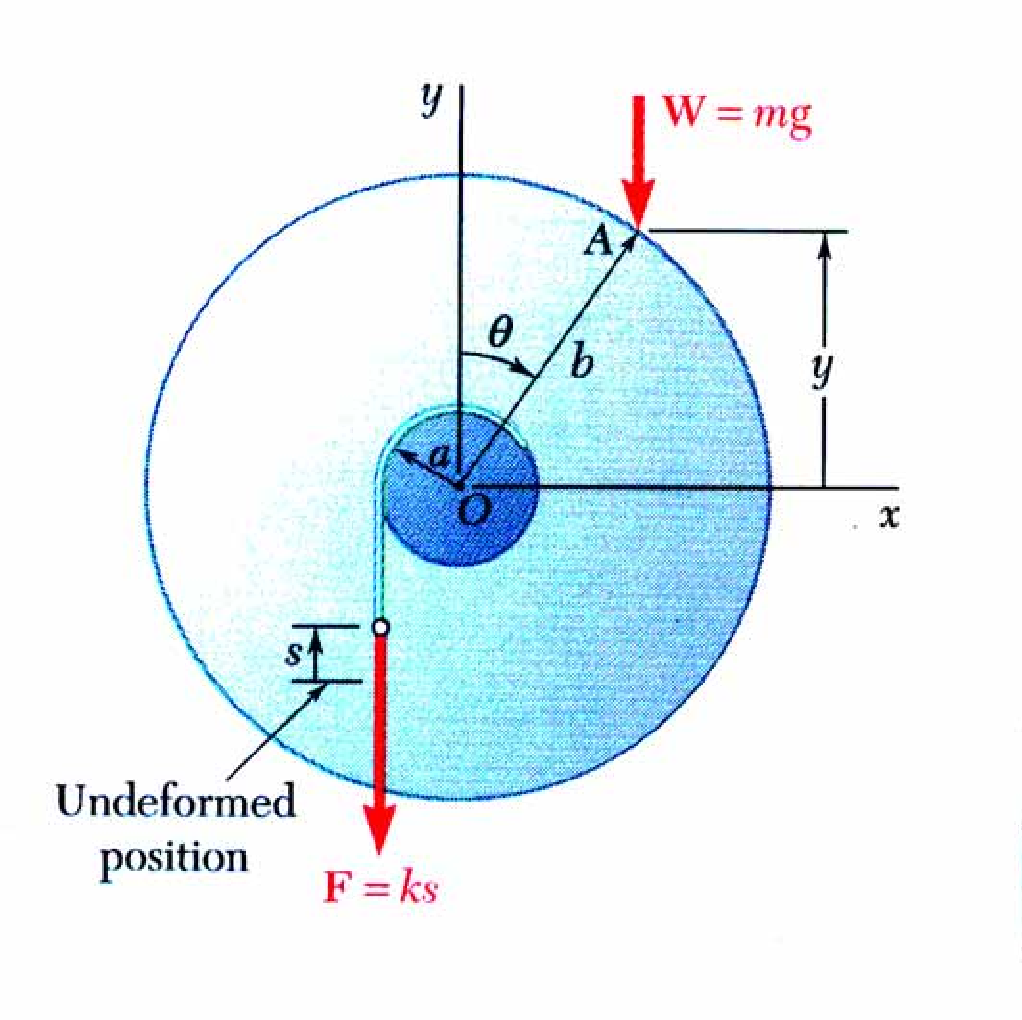
(c) Neutral equilibrium

กรณีนี้ $d^2V/d\theta^2$ มีค่าเป็น 0

เป็นลักษณะสมดุลที่มีเสถียรภาพคงตัว

ตัวอย่างที่ 8.4





ให้หาตำแหน่งที่เกิดสภาวะสมดุล และตรวจสอบเสถียรภาพ

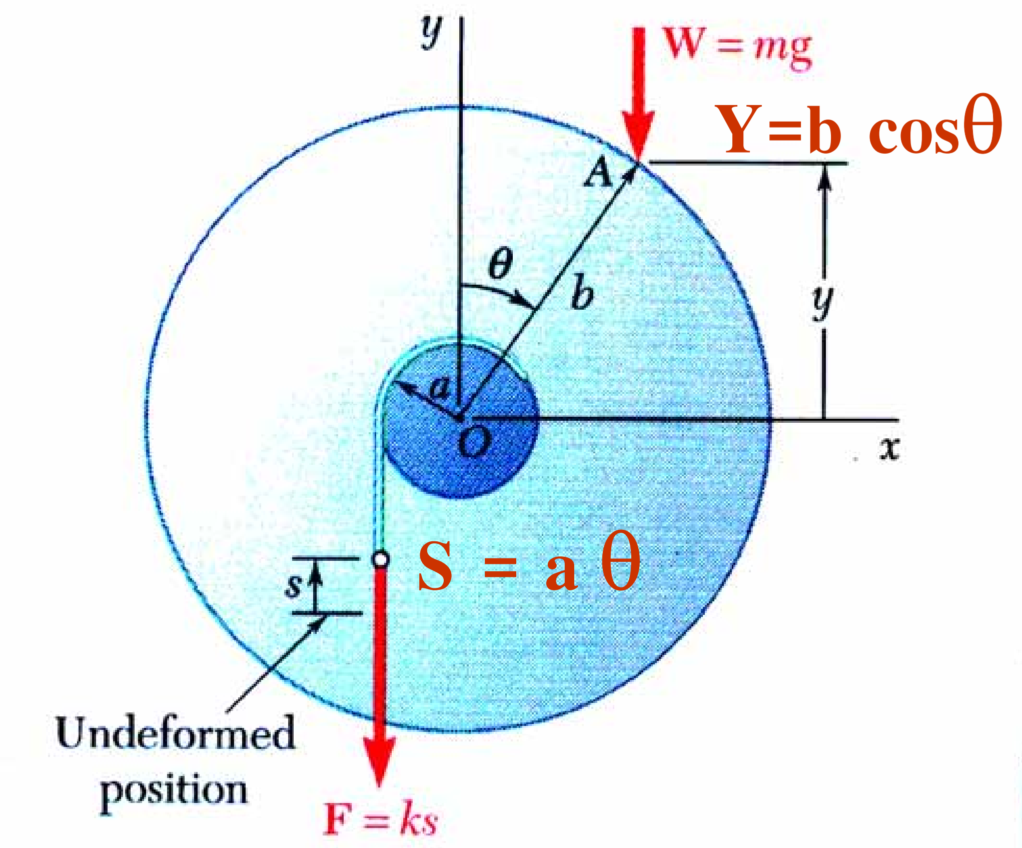
ตัวอย่างที่ 8.4

จากสปริง

$$Ve = (1/2)ks^2$$

จากน้ำหนัก W

$$Vg = WY = mg\ Y$$



แทนค่า Y และ S

$$Ve = (1/2)ka^2\ \theta^2$$

$$Vg = mg\ b\cos\theta$$

$$V = Ve + Vg$$

$$V = (1/2)ka^2\ \theta^2 + mg\ b\cos\theta$$

เมื่อให้ θ เป็นตัวแปร

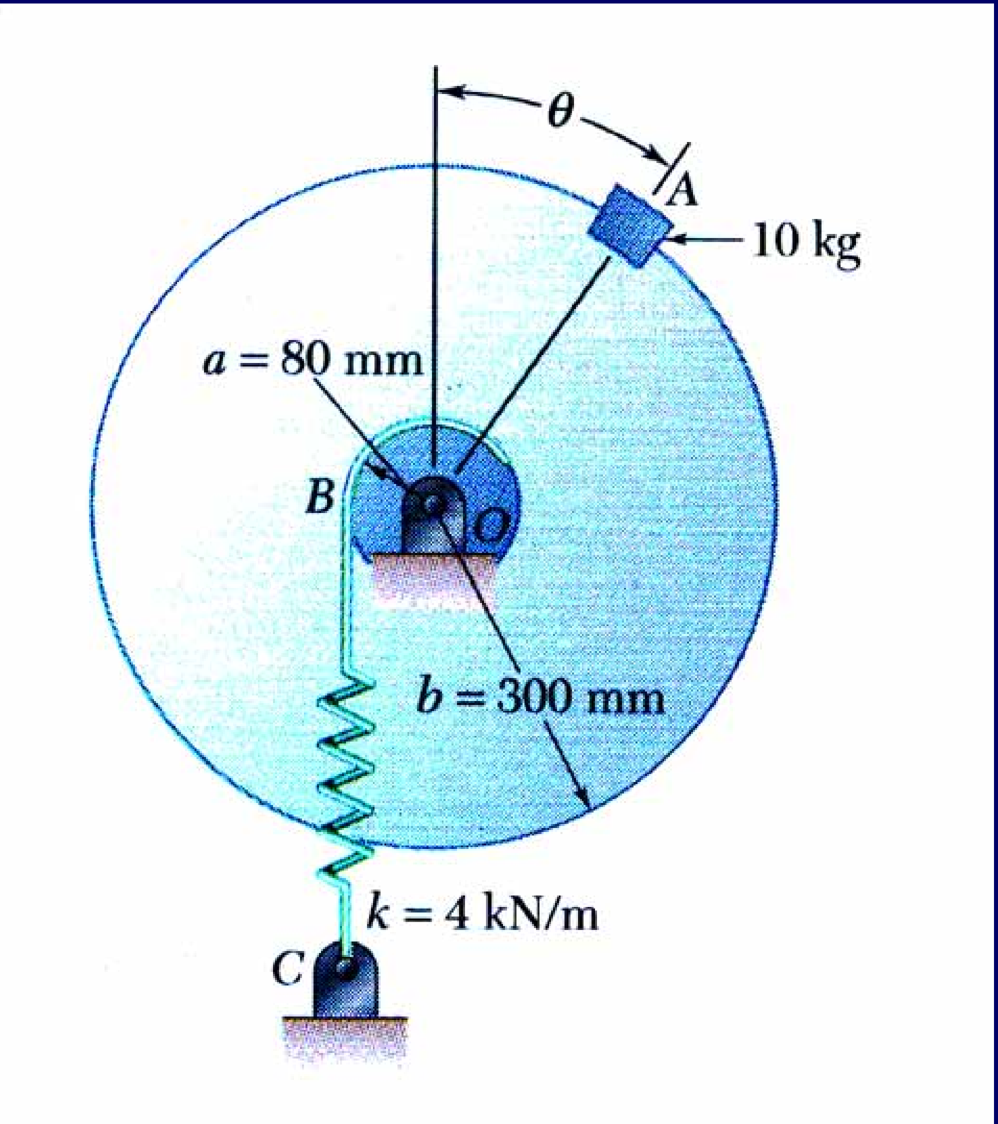
$$dV/d\theta = ka^2\ \theta - mg\ b\sin\theta = 0$$

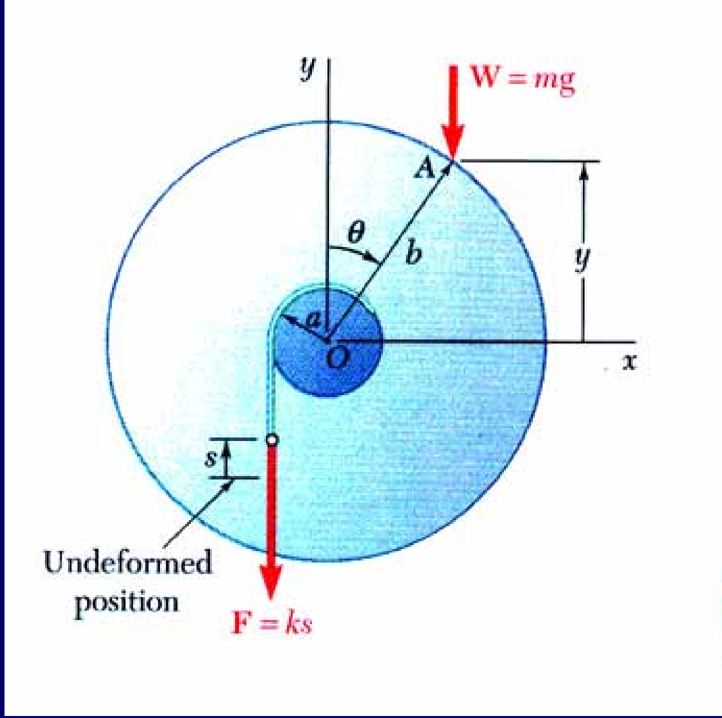
$$ka^2\ \theta - mg\ b\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = (ka^2\ \theta)/(mgb)$$

แทนค่าแก้สมการหา ค่ามุม θ

ตัวอย่างที่ 8.4





$$\sin\theta = (ka^2\,\theta)/(mgb)$$

ได้ $\sin\theta = 0.8699\,\theta$

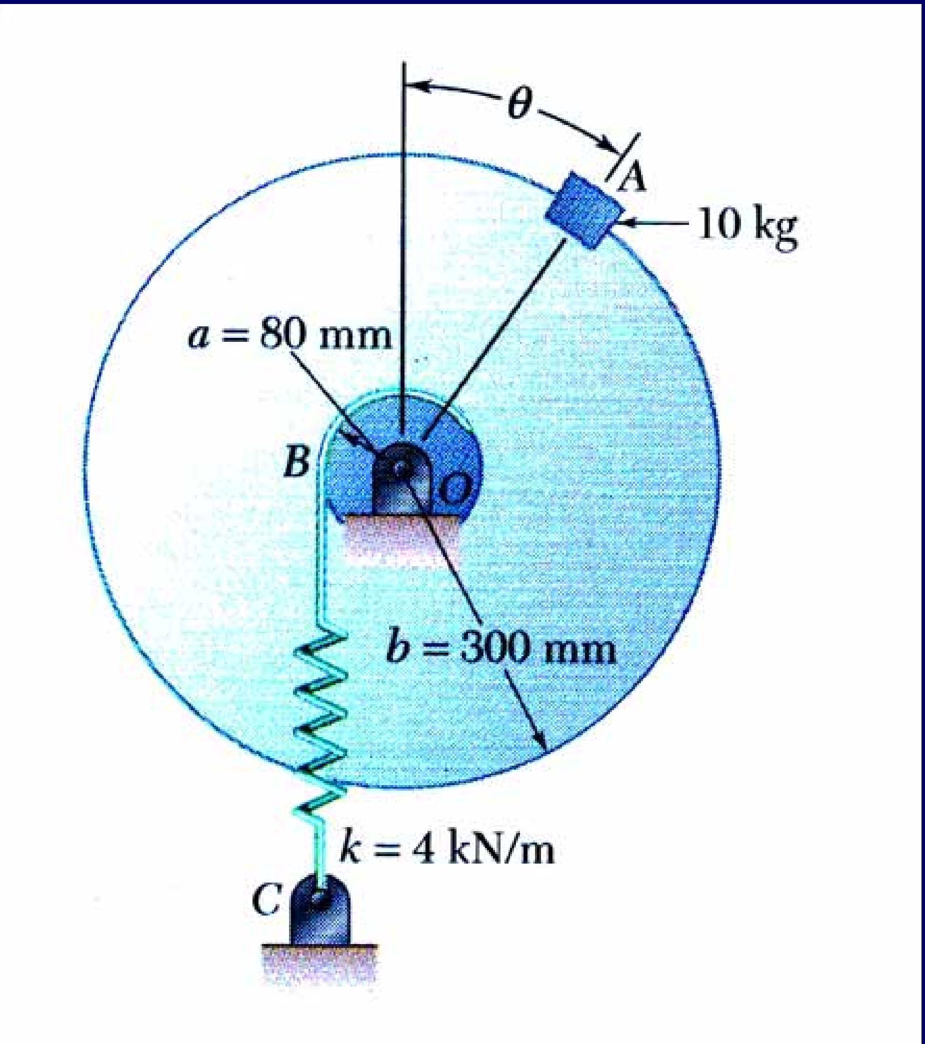
ลองผิดลองถูก

$\theta = 0$ และ 0.902 rad.

หรือ

θ = 0ฐ และ 51.7ฐ ตอบ

ตรวจสอบเสถียรภาพสมดุลทั้งสองตำแหน่ง



Diff V สองครั้ง

$V = (1/2)ka^2\,\theta^2 + mg\ b\cos\theta$

$d^2V/d\theta^2 = ka^2 - mg\ b\cos\theta$

แทนค่า

$d^2V/d\theta^2 = 25.6 - 29.34\cos\theta$

เมื่อ $\theta = 0$

$d^2V/d\theta^2 = -3.83$ ไม่มีเสถียรภาพ

เมื่อ $\theta = 51.7$

$d^2V/d\theta^2 = 7.36$ มีเสถียรภาพ

ตอบ

จบบทที่ 8