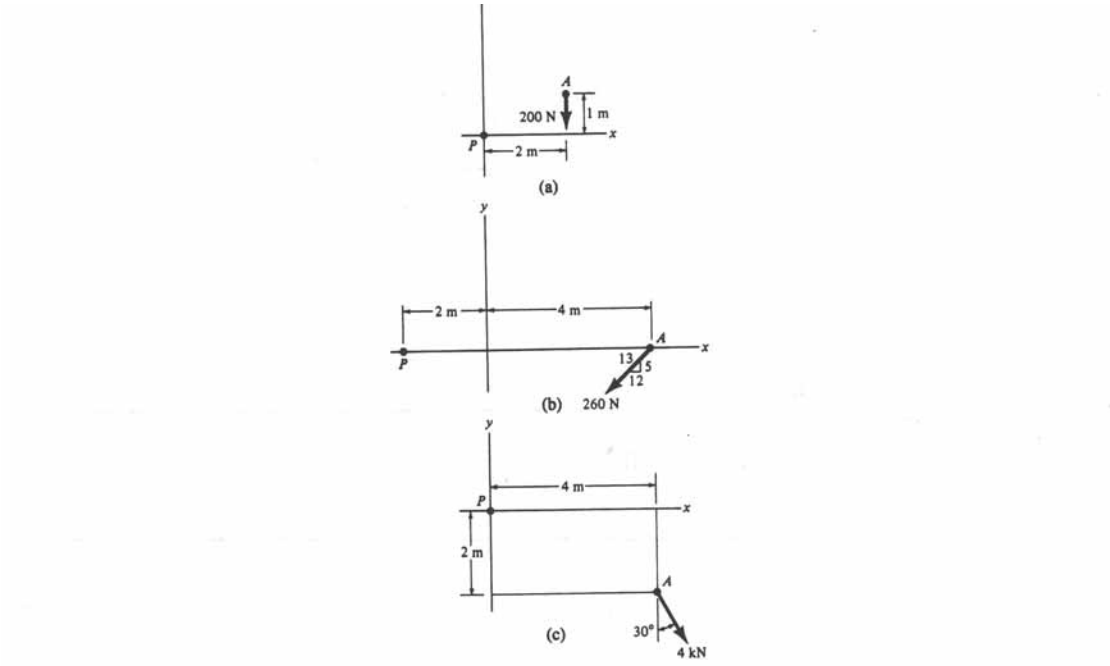
บทที่ 4

ระบบแรงซึ่งสมมูล

โมเมนต์ของแรงหนึ่งแรง

4.1 ในแต่ละกรณี ให้หาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงที่ A รอบจุด P



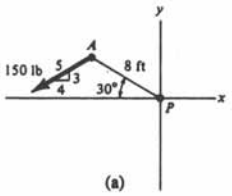
Solution

$$(+M_P = _____ = 400\ \text{N} \cdot \text{m}) \qquad \textit{Ans.}$$

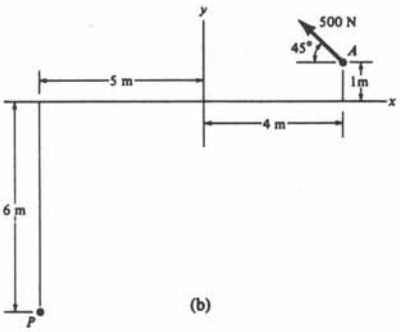
$$(+M_P = _____ = 600\ \text{N} \cdot \text{m}) \qquad \textit{Ans.}$$

$$(+M_P = _____ = 9.86\ \text{kN} \cdot \text{m}) \qquad \textit{Ans.}$$

4.2 ในแต่ละกรณี ให้หาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงที่ A รอบจุด P



(a)



(b)

Solution

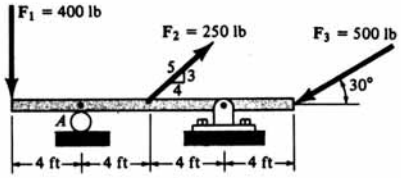
$(+M_P =$ _____

$M_P = 1.10 \text{ kip} \cdot \text{ft}$) *Ans.*

$(+M_P =$ _____

$M_P = 5.66 \text{ kN} \cdot \text{m}$) *Ans.*

4.3 ให้หาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของแรงทั้งสาม รอบจุด A



Solution

$M_1 =$ _____ $= 1600\ \text{lb} \cdot \text{ft}$) *Ans.*

$M_2 =$ _____ $= 600\ \text{lb} \cdot \text{ft}$) *Ans.*

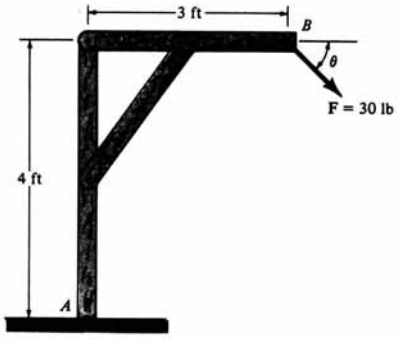
$M_3 =$ _____ $= 3000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$) *Ans.*

4.4 ให้หาทิศทาง θ ($0° \le \theta \le 180°$) ของแรง 30 lb ซึ่งทำให้

(a) เกิดโมเมนต์รอบจุด A มากที่สุด และ

(b) เกิดโมเมนต์รอบจุด A น้อยที่สุด

และให้หาโมเมนต์ในแต่ละกรณีนั้น



Solution

a) Set **F** ⊥ to AB,

$$\phi = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.1°$$

$$\theta = 90° - \phi = 36.9° \qquad \textit{Ans.}$$

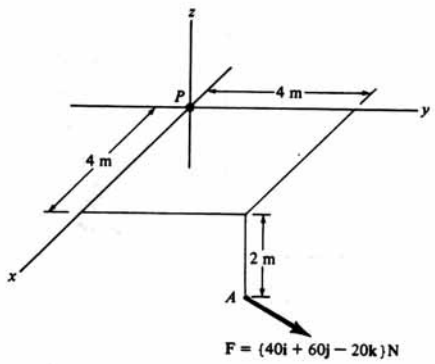
$$(M_A)_{max} = _____ = 150 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

b) Have **F** pass through A

$$\theta = 90° + \tan^{-1}\frac{3}{4} = 127° \qquad \textit{Ans.}$$

$$(M_A)_{min} = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

4.5 ให้หาโมเมนต์ของแรงที่ A รอบจุด P โดยใช้การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์และแสดงผลที่ได้ในรูปของเวกเตอร์ i, j และ k

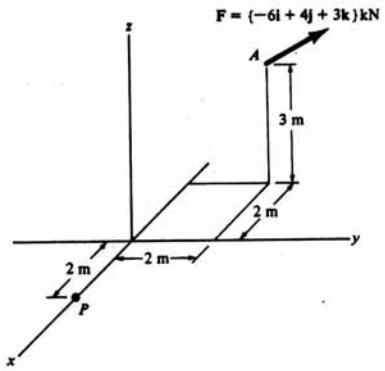


Solution

$$\mathbf{M}_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ — & — & — \\ — & — & — \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_P = \{40\mathbf{i} + 80\mathbf{k}\}\ \mathrm{N \cdot m}$$ *Ans.*

4.6 ให้หาโมเมนต์ของแรงที่ A รอบจุด P โดยใช้การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์และแสดงผลที่ได้ในรูปของเวกเตอร์ i, j และ k

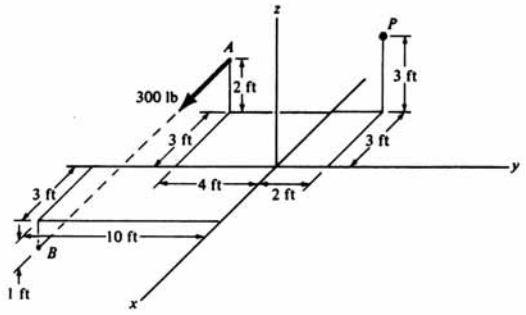


Solution

$$\mathbf{M}_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ — & — & — \\ — & — & — \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_P = \{-6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}\ \text{kN} \cdot \text{m}$$ *Ans.*

4.7 ให้หาโมเมนต์ของแรงที่ A รอบจุด P โดยใช้การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์และแสดงผลที่ได้ในรูปของเวกเตอร์ i, j และ k



Solution

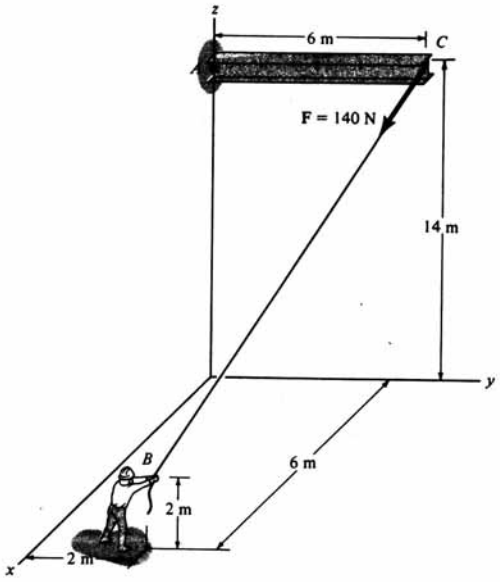
$$\mathbf{F} = 300\left(\frac{6}{9}\mathbf{i} - \frac{6}{9}\mathbf{j} - \frac{3}{9}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{F} = \{200\mathbf{i} - 200\mathbf{j} - 100\mathbf{k}\}\,\text{lb}$$

$$\mathbf{M}_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ - & - & - \\ - & - & - \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_P = \{400\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 1200\mathbf{k}\}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

4.8 ชายคนหนึ่งที่ B ออกแรง 140 N ต่อเชือกซึ่งผูกติดกับปลายคานดังรูป ให้หาโมเมนต์ของแรงนี้รอบจุด A



Solution

$\mathbf{r}_{AC} =$ _____

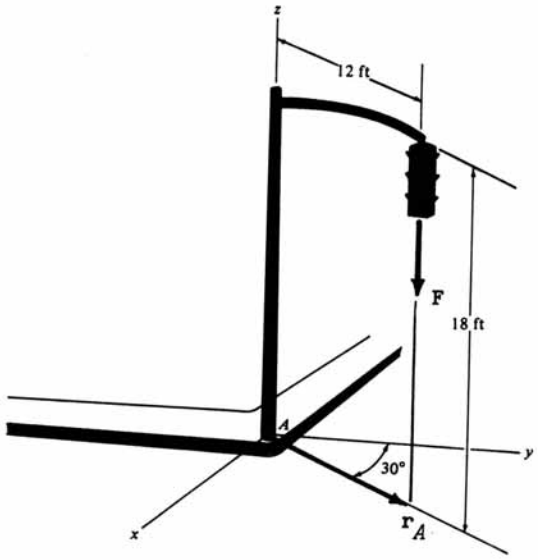
$\mathbf{F} =$ _____

$\mathbf{F} = \{60\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 120\mathbf{k}\}\text{N}$

$\mathbf{M}_A = 6\mathbf{j} \times (60\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 120\mathbf{k})$

$\mathbf{M}_A = \{-720\mathbf{i} - 360\mathbf{k}\}\ \text{N} \cdot \text{m}$ *Ans.*

4.9 เสาต้นหนึ่งรองรับโคมไฟจราจรซึ่งหนัก 22 lb ให้ใช้การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์หาโมเมนต์ซึ่งเกิดจากน้ำหนักโคมไฟจราจรรอบฐานเสาที่จุด A



Solution

$\mathbf{r}_A =$ _____

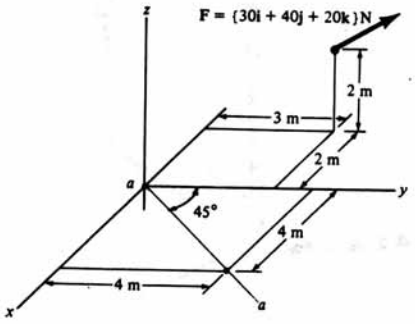
$\mathbf{F} =$ _____

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = 12\sin 30°(-22)(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) + 12\cos 30°(-22)(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = \{-229\mathbf{i} + 132\mathbf{j}\}\text{lb}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

โมเมนต์รอบแกนที่กำหนด

4.10 ให้หาภาพฉาย (projection) ของโมเมนต์ซึ่งเกิดจากแรงในรูปรอบแกน aa



Solution

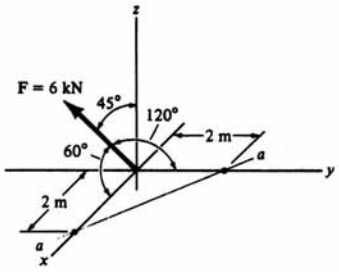
$\mathbf{u} =$ _____

$\mathbf{r} =$ _____

$\mathbf{F} = \{30\mathbf{i} + 40\mathbf{j} + 20\mathbf{k}\}\text{N}$

$$M_P = \begin{vmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix} = 56.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$ *Ans.*

4.11 ให้หาภาพฉาย (projection) ของโมเมนต์ซึ่งเกิดจากแรงในรูปรอบแกน aa



Solution

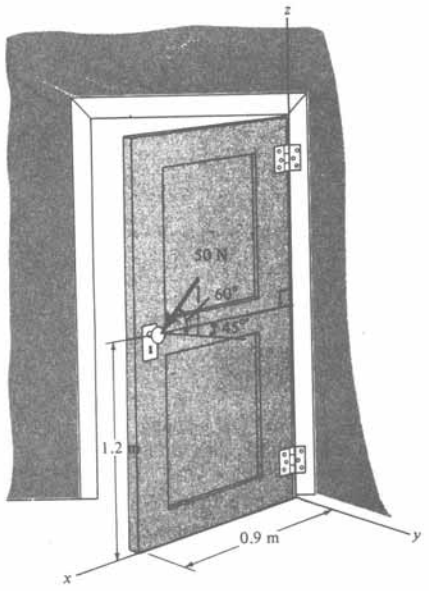
$\mathbf{u} =$ _____

$\mathbf{r} =$ _____

$\mathbf{F} =$ _____

$$M_P = \begin{vmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix} = |6\ \text{kN} \cdot \text{m}|$$ *Ans.*

4.12 แรง 50 N กระทำต่อมือจับประตูดังรูป ให้หาภาพฉาย (projection) ของโมเมนต์ซึ่งเกิดจากแรงนี้รอบแกน z ของบานพับ ไม่คำนึงถึงขนาดของปุ่มมือจับ ข้อแนะนำ ให้ใช้การวิเคราะห์เชิงสเกลาร์



Solution

Force component perpendicular to face of door is

$$F_y = _____$$

$$F_y = 17.68 \text{ N}$$

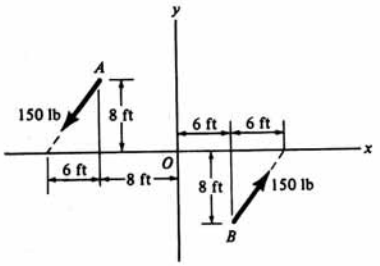
Thus

$$M_z = _____$$

$$M_z = -15.9 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

โมเมนต์ของคู่ควบ

4.13 ให้หาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของคู่ควบ



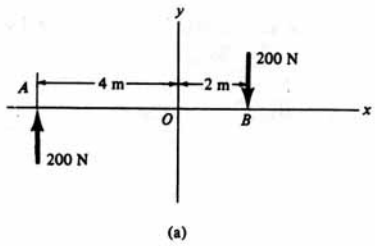
Solution

About *B*,

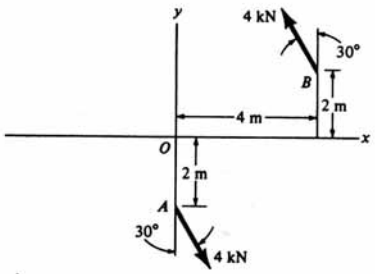
$$M_C = _____$$

$$= 3{,}120 \text{ lb} \cdot \text{ft} \circlearrowleft$$ ***Ans.***

4.14 ในแต่ละกรณี ให้หาขนาดและทิศทางของโมเมนต์ของคู่ควบ



(a)



(b)

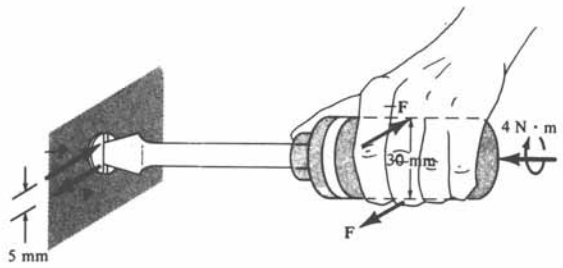
Solution

a) About A, $M_C =$ _____ $= 1200\ \text{N} \cdot \text{m}$) *Ans.*

b) About A, $M_C =$ _____

$M_C = 21.9\ \text{kN} \cdot \text{m}$) *Ans.*

4.15 แรงบิด 4 N.m กระทำต่อด้ามจับของไขควง ให้แยกโมเมนต์ของคู่ควบนี้ออกเป็นคู่ควบของแรง F คู่หนึ่ง กระทำต่อด้ามจับ และเป็นคู่ควบของแรง P คู่หนึ่ง กระทำต่อปลายไขควง



Solution

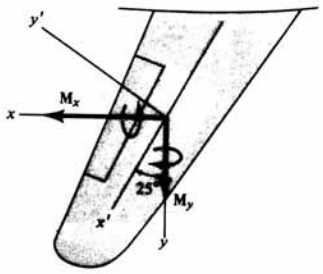
$P =$ _____

$P = 800$ N *Ans.*

$F =$ _____

$F = 133$ N *Ans.*

4.16 คานหลักตามแนวปีกของเครื่องบินลำหนึ่งบิดกลับด้วยมุม 25° จากการคำนวณน้ำหนักบรรทุกพบว่าคานถูกกระทำด้วยโมเมนต์ของคู่ควบ Mx = 25,000 lb.ft และ My = 17,000 lb.ft ให้หาโมเมนต์ของคู่ควบซึ่งสมมูลรอบแกน x' และ y'



Resolve each vector into x' and y' components and add the components.

Solution

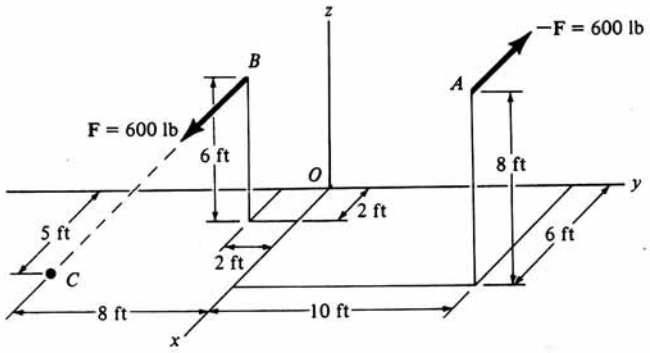
$M_{x'} =$ _____

$M_{x'} = 26.0$ kip · ft *Ans.*

$M_{y'} =$ _____

$M_{y'} = 15.5$ kip · ft *Ans.*

4.17 ให้หาโมเมนต์ของคู่ควบ โดยใช้การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ และแสดงผลในรูปของเวกเตอร์ i, j และ k



Solution

Summing moments of the forces about point A we have

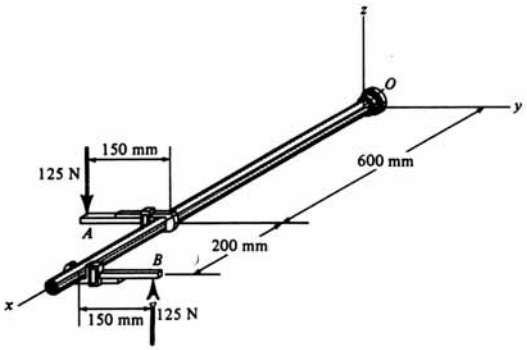
$$\mathbf{r}_{AB} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\mathbf{F} = 600\left(\frac{3}{9}\mathbf{i} - \frac{6}{9}\mathbf{j} - \frac{6}{9}\mathbf{k}\right) = \{200\,\mathbf{i} - 400\,\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\}\ \text{lb}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_C = \{4000\mathbf{i} - 2000\,\mathbf{j} + 4000\mathbf{k}\}\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

4.18 แสดงโมเมนต์ของคู่ควบซึ่งกระทำต่อท่อในรูปของเวกเตอร์ i, j และ k และให้หาขนาดของโมเมนต์ของคู่ควบนี้



Solution

Summing moments about point A, we have

$$\mathbf{r}_{AB} = _____$$

$$\mathbf{F}_B = _____$$

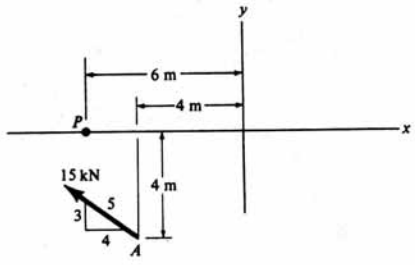
$$\mathbf{M}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_C = \{37.5\,\mathbf{i} - 25\mathbf{j}\}\ \mathrm{N \cdot m} \qquad \textit{Ans.}$$

$$M_C = 45.1\ \mathrm{N \cdot m} \qquad \textit{Ans.}$$

การทำระบบแรงให้อยู่ในรูปง่าย ๆ

4.19 แทนแรงที่ A ด้วยระบบแรงและโมเมนต์ของแรงคู่ควบซึ่งสมมูลที่ P



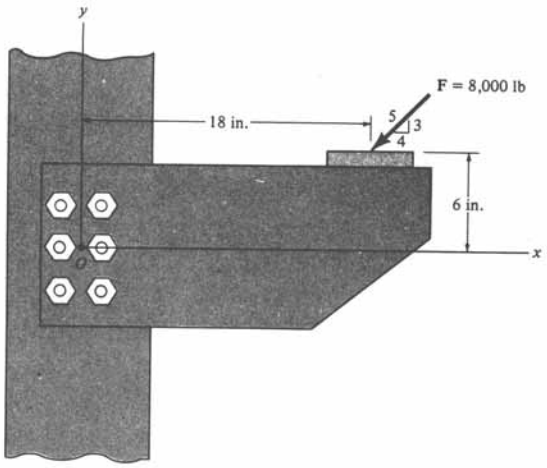
Solution

$F = 15$ kN (3, 4, 5) *Ans.*

$(+M_P =$ _____

$M_P = 30$ kN · m) *Ans.*

4.20 จุดต่อโครงสร้างถูกกระทำด้วยแรง 8000 lb ให้แทนแรงนี้ด้วยระบบแรงและโมเมนต์ของแรงคู่ควบกระทำที่ศูนย์กลางของกลุ่มสลัก O



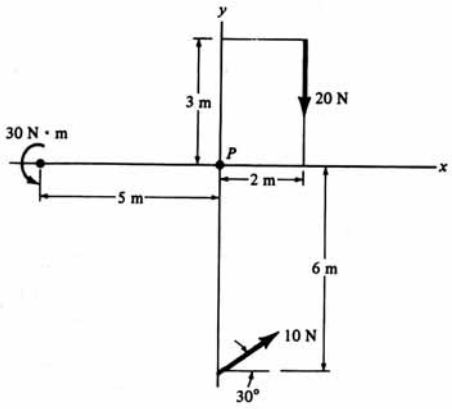
Solution

$F = 8{,}000$ lb $\angle\frac{5}{4}\frac{3}{}$ *Ans.*

$(+ M_O =$ _____

$M_O = 4$ kip · ft) *Ans.*

4.21 ให้แทนแรงและแรงคู่ควบด้วยแรงเดี่ยว 1 แรงและคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด P



Solution

$$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x = \underline{\qquad\qquad} = 8.66 \text{ N}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = \underline{\qquad\qquad} = -15 \text{ N}$$

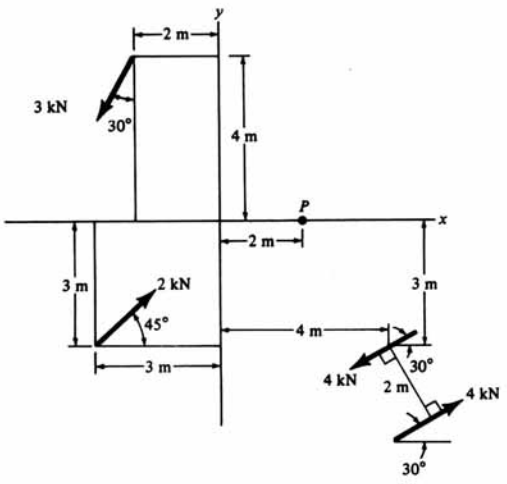
$$\circlearrowleft + M_P = \Sigma M_P = \underline{\qquad\qquad}$$

$M_P = 42.0 \text{ N} \cdot \text{m}\circlearrowleft$ *Ans.*

$F_R = \sqrt{(8.66)^2 + (-15)^2} = 17.3 \text{ N}$ *Ans.*

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{15}{8.66}\right) = 60°$ *Ans.*

4.22 ให้แทนแรงและแรงคู่ควบด้วยแรงเดี่ยว 1 แรงและคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด P



Solution

$$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x = \underline{\qquad\qquad} = -0.0858 \text{ kN}$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y = \underline{\qquad\qquad} = -1.18 \text{ kN}$$

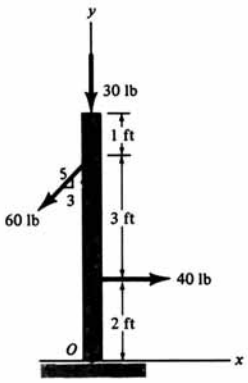
$$\curvearrowleft + M_P = \Sigma M_P = \underline{\qquad\qquad}$$

$$M_P = 21.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

$$F_R = \sqrt{(-0.0858)^2 + (-1.18)^2} = 1.18 \text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1.18}{0.0858} = 85.8° \qquad \textit{Ans.}$$

4.23 ให้แทนระบบน้ำหนักบรรทุกซึ่งกระทำต่อเสา ด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด O



Solution

$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x ; (F_R)_x =$ _____ $= 4$ lb

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y ; (F_R)_y =$ _____ $= -78$ lb

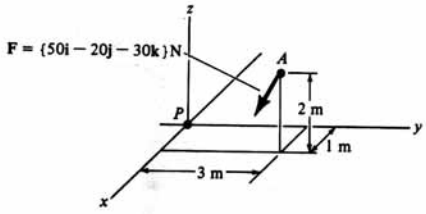
$F_R = \sqrt{(4)^2 + (-78)^2} = 78.1$ lb *Ans.*

$\theta = \tan^{-1}\frac{78}{4} = 87.1°$ *Ans.*

$(+ (M_R)_O = \Sigma M_O ; (M_R)_O =$ _____

$(M_R)_O = 100$ lb · ft) *Ans.*

4.24 ให้แทนแรงที่ A ด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด P โดยให้แสดงผลที่ได้ในรูปเวกเตอร์ i, j และ k



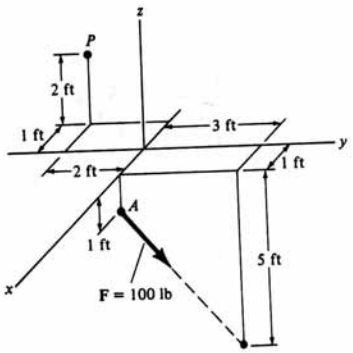
Solution

$$\mathbf{F} = \{50\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 30\mathbf{k}\}\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\mathbf{M}_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_P = \{-50\mathbf{i} + 130\mathbf{j} - 170\mathbf{k}\}\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

4.25 ให้แทนแรงที่ A ด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด P โดยให้แสดงผลที่ได้ในรูปเวกเตอร์ i, j และ k



Solution

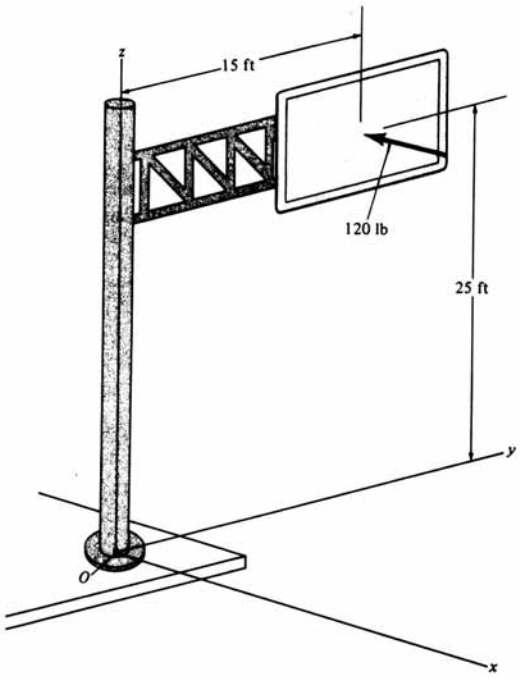
$\mathbf{F} =$ _____

$\mathbf{F} = \{60\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\}$ lb *Ans.*

$$\mathbf{M}_P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix}$$

$\mathbf{M}_P = \{20\mathbf{i} + 160\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\}$ lb · ft *Ans.*

4.26 แรงลัพธ์ของน้ำหนักบรรทุกจากลมซึ่งกระทำตั้งฉากกับผิวของป้ายดังรูป ให้แทนแรงนี้ด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด O



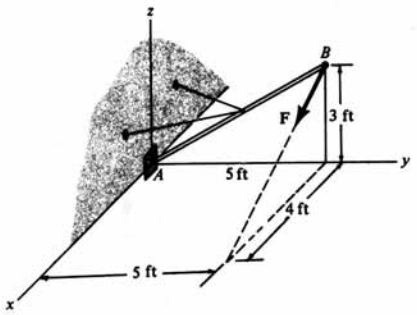
Solution

$$\mathbf{F} = \{-120\mathbf{i}\}\ \text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \{-3000\mathbf{j} + 1800\mathbf{k}\}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

4.27 ให้แทนแรง F ซึ่งมีขนาด 40 lb และกระทำที่ B ด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด A



Solution

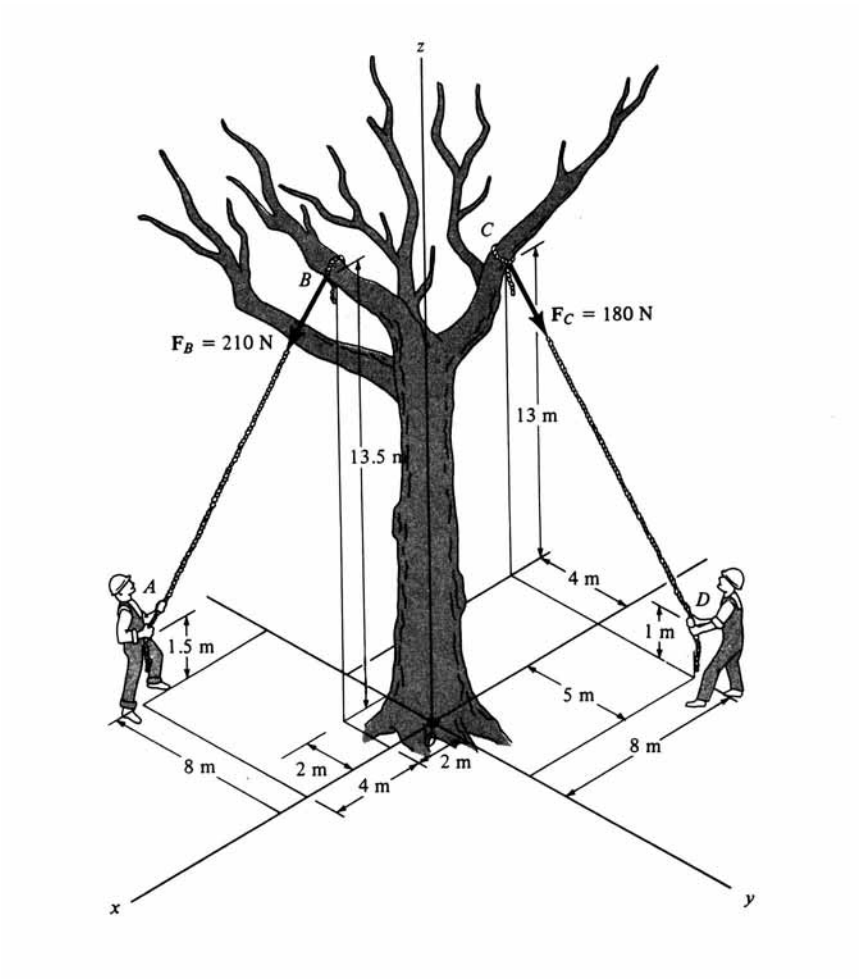
$$\mathbf{F} = (40)\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{i} - (40)\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = \{32\mathbf{i} - 24\mathbf{k}\}\ \text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$

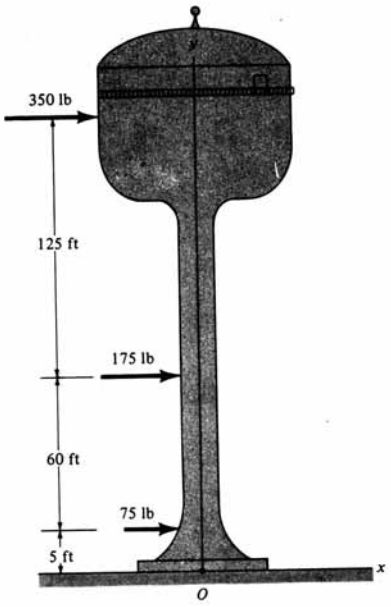
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = \{-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 160\mathbf{k}\}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

4.28 ให้แทนแรงสองแรงซึ่งกระทำต่อกิ่งไม้ ด้วยระบบแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำที่จุด O



4.29 แรงสามแรงกระทำต่อถังเก็บน้ำแทนผลของลม ให้แทนระบบแรงนี้ด้วยแรงเดี่ยว 1 แรง พร้อมทั้งระบุตำแหน่งของแรงดังกล่าวในแนวดิ่งวัดจากจุด O



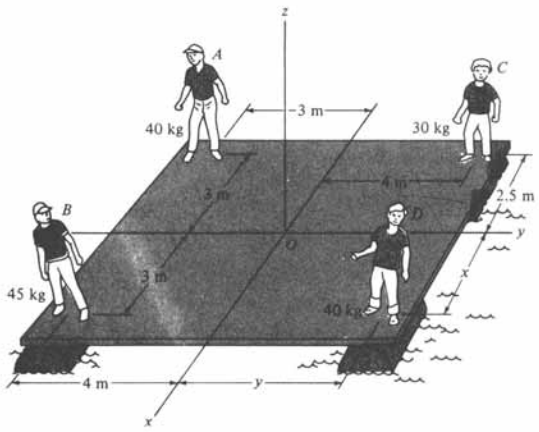
Solution

$$\stackrel{+}{\rightarrow} F_{R_x} = \Sigma F_x;\quad F_{R_x} = _____ = 600 \text{ lb}$$

$$(+ (M_O)_R = \Sigma M_O;\quad 600(d) = _____$$

$d = 130$ ft *Ans.*

4.30 เด็กชายสามคน A, B และ C ยืนใกล้กับขอบของแพดังรูป ให้หาตำแหน่ง (x, y) ของเด็กชาย D ซึ่งทำให้เด็กชายทั้งสี่คนก่อให้เกิดแรงลัพธ์เดี่ยวกระทำผ่านศูนย์กลางของแพ O กำหนดให้แพสมมาตรในตัวเอง จากสภาพดังกล่าวจะทำให้แพลอยน้ำอยู่ในระนาบราบ มวลของเด็กชายแต่ละคนแสดงไว้ในรูป



Solution

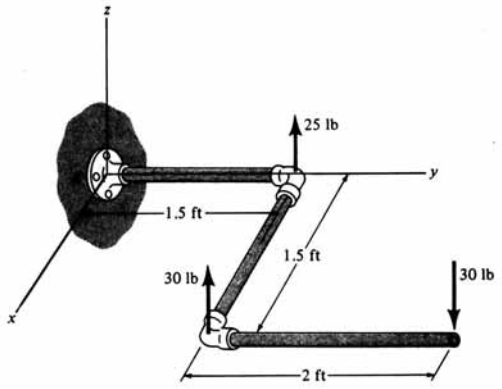
$(M_R)_y = \Sigma M_y$;

$x = 1.5$ m *Ans.*

$(M_R)_x = \Sigma M_x$;

$y = 4.5$ m *Ans.*

4.31 แรงและแรงคู่ควบกระทำต่อท่อดังรูป ให้แทนระบบแรงนี้ด้วยแรงเดี่ยวลัพธ์ 1 แรงซึ่งสมมูล พร้อมทั้งให้ระบุตำแหน่งของแรงลัพธ์ตามแนวแกน y โดยวัดจากจุด A ท่อนี้วางตัวอยู่ในระนาบ xy



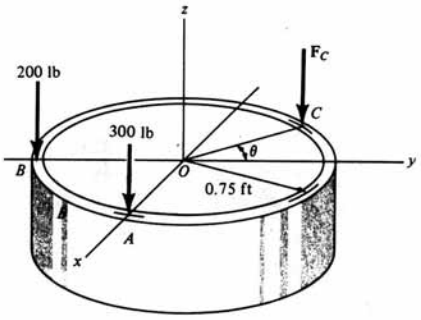
Solution

$+\uparrow (F_R)_z = \Sigma F_z; (F_R)_z = 25 \text{ lb}$ *Ans.*

$(M_A)_x = \Sigma M_x;$ _____

$y = -0.9 \text{ ft}$ *Ans.*

4.32 แรงขนาน 3 แรงกระทำต่อขอบของท่อ ถ้าต้องการให้แรงลัพธ์ F_R ของระบบแรงมีแนวการกระทำผ่านศูนย์กลางแกน z ให้หาขนาดของ F_C และตำแหน่งของมันบนขอบท่อในรูป θ และขนาดของแรงลัพธ์ F_R เป็นเท่าใด ข้อแนะนำ ในการแก้ปัญหานี้ต้องใช้สมการ $\Sigma M_x = 0$ และ $\Sigma M_y = 0$ เพราะเหตุใด



Solution

$$F_z = \Sigma F_z; \quad F_R = 200 + 300 + F_C$$

$$(M_R)_x = \Sigma M_x;$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y;$$

Solving,

$$F_C = 361 \text{ lb}, \quad \theta = 56.3°, \quad F_R = 861 \text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

4.33 ให้แทนน้ำหนักบรรทุกด้วยแรงและแรงคู่ควบซึ่งสมมูลกระทำต่อจุด O

4.34 ลมได้พัดทรายขึ้นไปกองบนแผ่นพื้นอันหนึ่งโดยที่ความเข้มของน้ำหนักบรรทุกสามารถแทนโดยประมาณด้วยฟังก์ชัน $w = (\frac{1}{2}x^3)$ N/m ให้แทนน้ำหนักบรรทุกกระจายนี้ด้วยแรงเดี่ยว 1 แรง พร้อมทั้งระบุขนาดและตำแหน่งของแรงเดี่ยวนี้วัดจาก A

4.35 น้ำหนักบรรทุกจากแรงดันดินกระทำต่อด้านข้างและด้านล่างของฐานรากแผ่ดังรูป แทนแรงดังกล่าวด้วยแรงลัพธ์เดี่ยว 1 แรงและแรงคู่ควบกระทำที่ A และแรงลัพธ์ FR เป็นเท่าใด

4.36 อิฐวางอยู่บนคานและจุดรองรับที่ด้านล่าง ก่อให้เกิดน้ำหนักบรรทุกกระจายดังรูป ให้หาความเข้ม w ที่จำเป็นและขนาดของ d ของจุดรองรับทางด้านขวาซึ่งทำให้แรงและคู่ควบลัพธ์ที่ A ของระบบต่างเท่ากับ 0