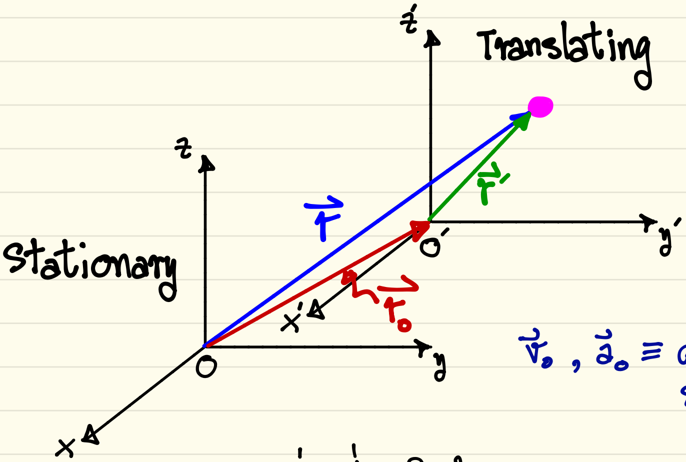
บทที่ 4 Noninertial Reference Frame

I. Translation Coordinate System



สมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน

$\vec{v}_0$, $\vec{a}_0$ ≡ ความเร็วและความเร่งของ translation system เมื่อเทียบกับ stationary system

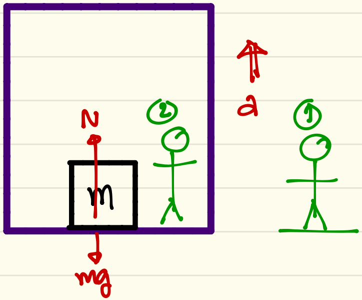
$\vec{F}$ ≡ จากผู้สังเกตในกรอบเฉื่อย ($\vec{F}_{true}$)

$\vec{F}'$ ≡ วัดในกรอบไม่เฉื่อย ($\vec{F}_{apparent}$)

$$\vec{F}_{app} = \vec{F}_{true} + \vec{F}_{fict}$$

Ex 4-1 การนำไปใช้

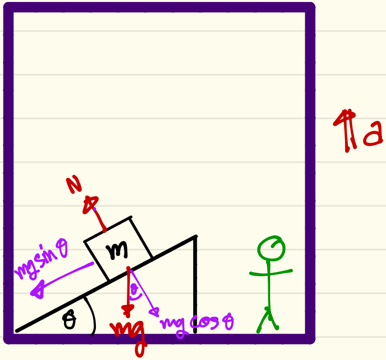
1. ลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง $\vec{a}$ ให้หาแรงปฏิกิริยาที่พื้นกระทำต่อวัตถุ



① inertial frame

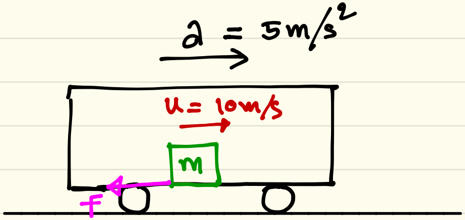
② noninertial frame

2. หาความเร่งของมวล m



noninertial frame

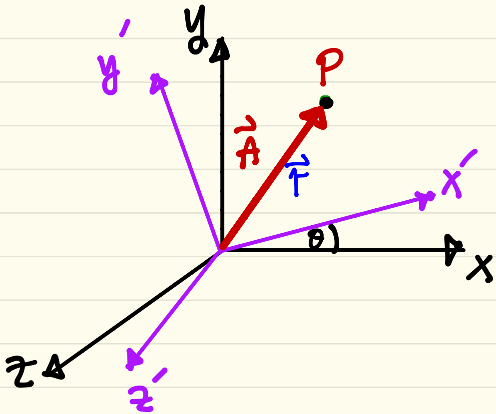
EX 4-2 รถคันหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง $5\ m/s^2$ ในทิศ $+x$ ขณะเดียวกันมวล $2\ kg$ ที่อยู่บนพื้นรถ ได้ถูกทำให้ไถลไปด้วยความเร็วต้น $10\ m/s$ ในทิศ $+x$ ($\mu_k = 0.3$) ให้อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ($\mu_s = 0.6$)



หาเวลาที่ทำให้มวล m หยุดนิ่ง

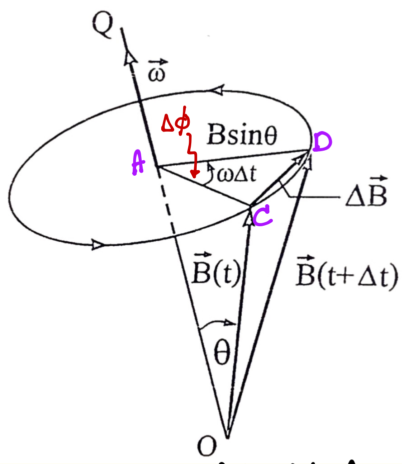
เมื่อมวล m หยุดนิ่งแล้ว สามารถไถลต่อได้หรือไม่

II. Rotating Coordinate System



แกน x', y', z' หมุนเทียบกับ x, y, z

$\vec{A}$ อยู่กับที่

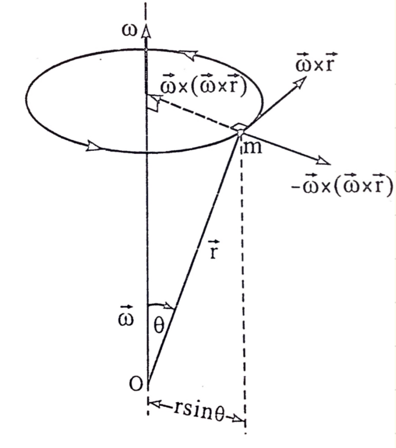


ถ้า $\vec{B}$ คือ $\hat{i}'$, $\hat{j}'$, $\hat{k}'$

พิจารณา $\vec{B}$ อยู่นิ่งในระบบ x', y', z' ; Δt มีค่าน้อยมากๆ

$$\therefore \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{Fix} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{Rot} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

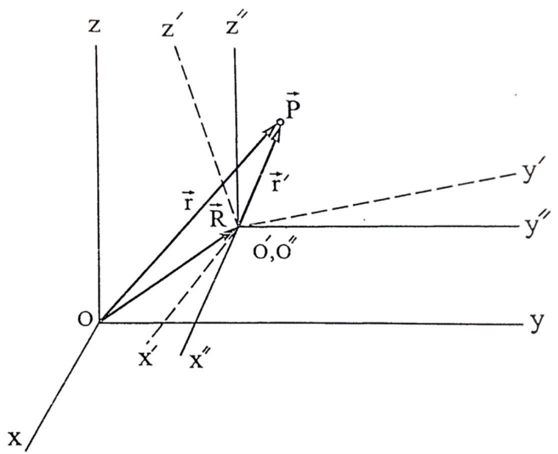
หรือ $\frac{d\vec{A}}{dt} =$



ความเร็ว

ความเร่ง

กรณีกรอบ (x', y', z') มีทั้งการ translate และ rotate



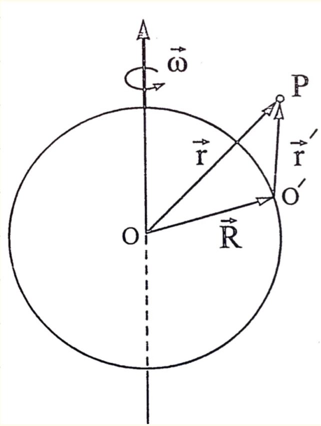
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} =$$

ตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบนี้ คือ

การเคลื่อนที่ของวัตถุ P ที่อยู่เหนือผิวโลก

- มีระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง O ของโลก ที่อยู่นิ่ง เป็นระยะ $\vec{r}$
- $O' \equiv$ ตำแหน่งผู้สังเกตบนผิวโลก
- $\vec{r}' \equiv$ ตำแหน่งของวัตถุเทียบกับผู้สังเกต O'
- $\vec{R} \equiv$ รัศมีของโลก
- โลกหมุนด้วย $\vec{\omega}$ คงที่ $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$



$$\ddot{\vec{r}} =$$

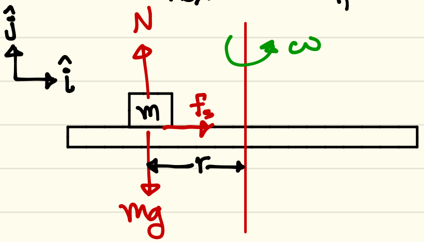
Equation of motion in noninertial frame

กฎของนิวตัน $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

$$\vec{F} = m\left(\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}' + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + (2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right)$$

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \underbrace{\underbrace{- m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{\text{transverse force}} \underbrace{- 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{v}}'}_{\text{Coriolis force}} \underbrace{- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{centrifugal force}}}_{\text{Fictitious force}}$$

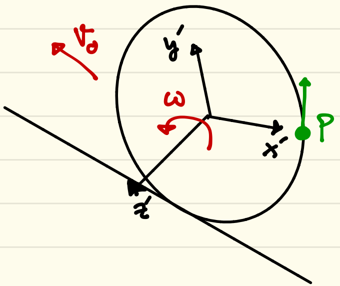
Ex 4-3 วัตถุมวล m วางบนจานกลม หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω รอบแกนในแนวดิ่ง
จงหา r_{max} ก่อนที่วัตถุจะไถล



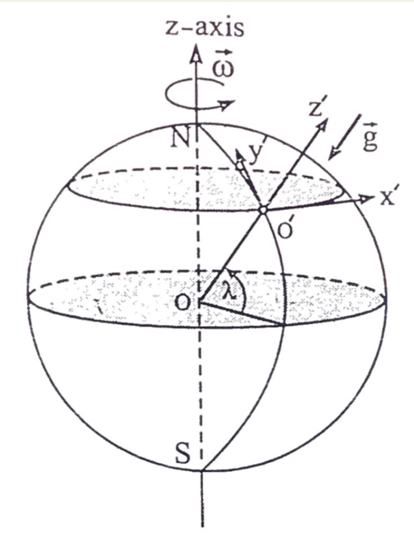
Inertial frame

Noninertial frame

EX4-4 วงล้อกลิ้งไปตามพื้น ด้วยอัตราเร็วคงที่ v_0 ให้หาความเร่งของจุดใดๆ บนขอบของล้อ เมื่อเทียบกับพื้น (วงล้อมีรัศมี b)



Effects of the Earth Rotation



การเคลื่อนที่ของวัตถุใกล้ผิวโลก

$$m\ddot{\vec r}' = \vec F - m\ddot{\vec R} - m\dot{\vec\omega}\times\vec r - 2m\vec\omega\times\vec v' - m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$$

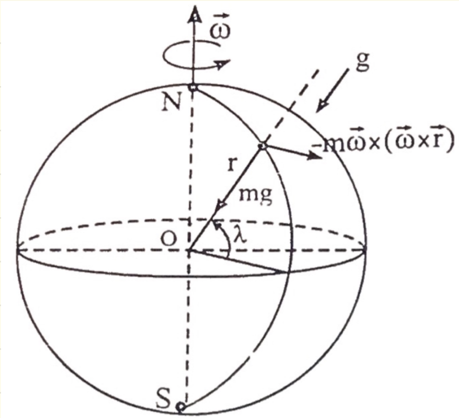
$\vec F$: all the physical force acting on particle

ถ้าวัตถุมวล m อยู่ที่ระยะ r ห่างจากจุดศูนย์กลางโลก ถูกกระทำด้วยแรง

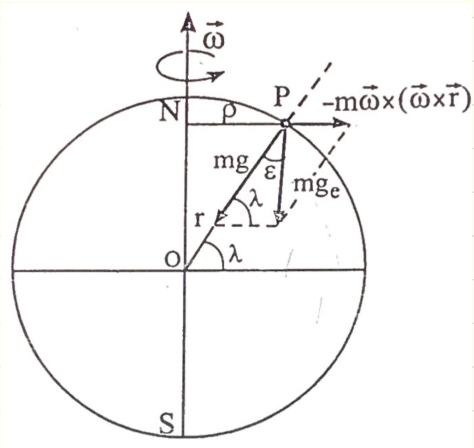
$m\vec g$ + แรงอื่นๆ เช่นแรงเสียดทาน [$\vec F$]

$m\ddot{\vec r}' =$

ผลกระทบต่อแนวลูกดิ่ง [Plumb Line]



พิจารณาวัตถุที่อยู่นิ่ง เช่นในกรณีของการแขวนลูกดิ่ง การหมุนของโลกจะไปมีผลต่อแนวการทิ้งดิ่ง



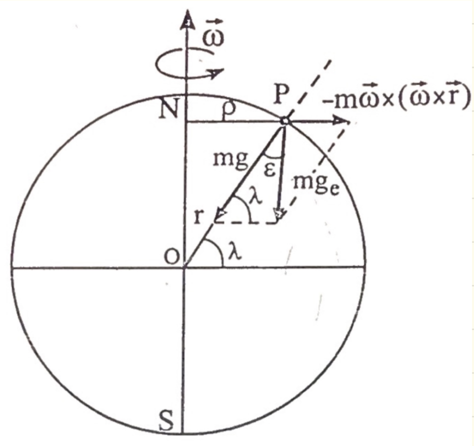
เมื่อทิ้งมวลใกล้ผิวโลก มันจะไปตามทิศ $\vec{g}_e$ = แนวของลูกดิ่ง

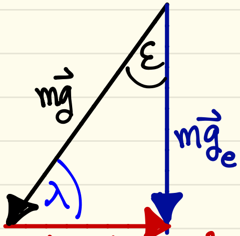
ค่า g_e จะเปลี่ยนตาม latitude λ

ขนาดของ Centrifugal acceleration ของมวล m ณ จุดใดๆ คือ

$$\rho\omega^2 =$$

$$|\vec{F}_{cent}| = m\rho\omega^2 =$$





$|-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})| = mr\omega^2\cos\lambda$

ใช้กฎของ sin

ถ้า ε มีค่าน้อยๆ $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$

$\varepsilon =$

ณ equator $\lambda = 0^\circ$

ขั้วโลก $\lambda = 90^\circ$

$\Big\}\ \varepsilon =$

ε_{max} เกิดที่ $\lambda =$; $\varepsilon_{max} =$

Motion of a Projectile

การเคลื่อนที่ของวัตถุใกล้ผิวโลก

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m\vec{g} - m\ddot{\vec{R}} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{F} = 0 \;,\; \ddot{\vec{R}} = 0 \;,\; \dot{\vec{\omega}} = 0$$

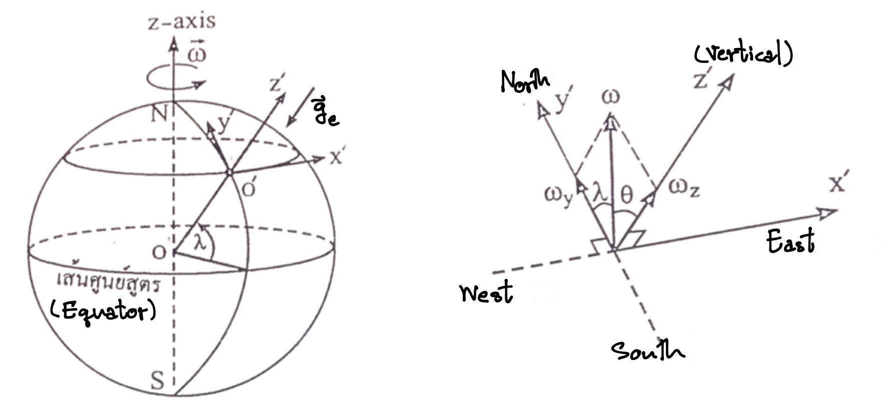
$\therefore$ $m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}' =$

เทอม $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ มีค่าน้อยมาก

$\vec{F}' = \vec{F}_{eff} =$

ผลของ F_{cor}

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$



λ = latitude

θ = colatitude

$\theta = 90^\circ - \lambda$

$\omega = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$

$\omega_x = 0$

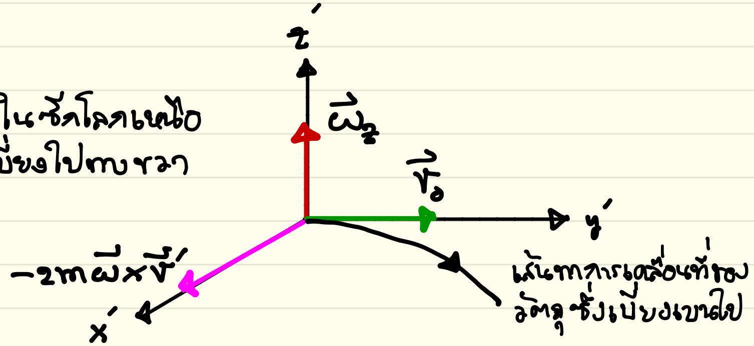
$\omega_y = \omega\cos\lambda$

$\omega_z = \omega\sin\lambda$

$g_e = -g\hat{k}$

$\vec{F}_{cor}$ ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{\omega}$ และ $\vec{v}'$

ถ้ามีอนุภาคเคลื่อนที่ตามแนวขนานพื้นโลก ในซีกโลกเหนือ $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$ จะทำให้เส้นทางของอนุภาคเบี่ยงไปทางขวาของแนวการเคลื่อนที่



สมการทั่วไปของการเคลื่อนที่ใกล้ผิวโลก

จาก $\vec{F}_{eff} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

$$\therefore \quad \vec{\omega} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$=$$

$$\ddot{x} =$$

$$\ddot{y} =$$

$$\ddot{z} =$$

EX4-5 พิจารณาวัตถุตกลงมายังผิวโลกจากความสูง h [น้อยมาก] จงหาว่าหลังจากเวลาผ่านไป t วัตถุจะเบี่ยงเบนไปทางตะวันออก (E) ด้วยค่า $\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\theta$ [ซีกโลกเหนือ]

จากสมการ ① $\ddot{x} = -2\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda)$

แทนค่า $\dot{x}$ ในสมการ ③ $\ddot{z} = -g + 2\omega(\dot{x}\cos\lambda)$

จากสมการ ② $\ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\lambda)$

ผู้มีค่าน้อยมากๆ

แทนค่า $\dot{y}, \dot{z}$ ใน ① $\ddot{x} = -2\omega[-gt\cos\lambda + 2\omega x\sin^2\lambda]$

จาก $\dot{z} = -gt$

แทน t ใน x

EX4-6 [Projectile] ยิงโปรเจคไตล์ไปทางใต้ที่ latitude λ ด้วยความเร็วเริ่มต้น v_0 ทำมุม α กับแนวระดับ จงหาตำแหน่ง ณ เวลา t ใดๆ [ซีกโลกเหนือ]

I.C. : $t=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

$\dot{x}=0$, $\dot{y}=-v_0\cos\alpha$, $\dot{z}=v_0\sin\alpha$

จากสมการ① $\ddot{x} = -2\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda)$

จากสมการ② $\ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\lambda)$

I.C.

จากสมการ③ $\ddot{z} = -g + 2\omega(\dot{x}\cos\lambda)$

I.C.

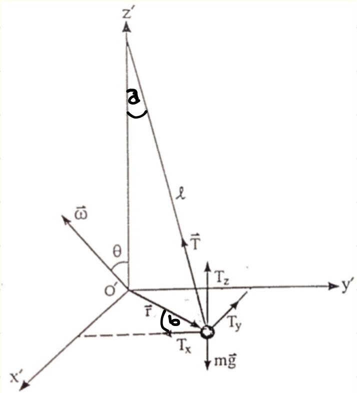
จากสมการ 1 $\ddot{x} = -2\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda)$

Foucault Pendulum

การทดลองแสดงว่าโลกหมุน ⇒ โลกเป็น noninertial system

ทดลองครั้งแรก ค.ศ. 1851 ที่กรุงปารีส โดย Jean Leon Foucault

⇒ แกว่งลูกตุ้มหนัก 28 kg ใช้ลวดยาว 67 m แกว่งในแนวดิ่ง พบว่า
ระนาบการแกว่งของลูกตุ้มไม่คงที่ แต่จะบิดไป 11°15′ ต่อชั่วโมง



Foucault Pendulum มวล m, เชือกยาว ℓ

จาก $\vec{F}' = m\vec{g} + \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

$\vec{F} =$; $\vec{v}' = \dot{\vec{r}} =$

$\vec{F}' =$

$\vec{g} =$

$\vec{\omega}\times\vec{v}' =$

$\vec{T}_x =$

$\vec{T}_y =$

$\vec{T}_z =$

$m\ddot{x} =$ (F1)

$m\ddot{y} =$ (F2)

$m\ddot{z} =$ (F3)

เงื่อนไข ℓ มีความยาวมาก → มุม θ มีค่าน้อยมาก การเคลื่อนที่ประมาณว่าอยู่บนระนาบ xy

$\therefore z \approx \ell \;,\; \dot{z} = 0 \;,\; \ddot{z} = 0$

จากสมการ (F3) $T =$

แทนค่าใน (F1) และ (F2)

$m\ddot{x} =$

$\ddot{x} =$

$m\ddot{y} =$

$\ddot{y}$

Note: ค่า x, y มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ l $\rightarrow$

$\ddot{x} =$

$\ddot{y} =$

$\ddot{x} =$ — ①

$\ddot{y} =$ — ②

แก้สมการ ①, ②

$$\ddot{u} + 2\acute{\omega}\dot{u}\,i + k^2 u = 0$$

$9u^2$ $u = e^{\lambda t}$

$\dot{u} = \lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{u} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

สมการ ④ $\dot{x} = -c_1(\omega'-k)\sin(\omega'-k)t + c_2(\omega'-k)\cos(\omega'-k)t - c_3(\omega'+k)\sin(\omega'+k)t + c_4(\omega'+k)\cos(\omega'-k)t$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\left[\sin(\omega t\sin\lambda)\hat{i} + \cos(\omega t\sin\lambda)\hat{j}\right]$$

∴ การเคลื่อนที่ของ Foucault ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

1. แกว่งไปมาด้วยคาบ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2. ทิศการแกว่ง ค่อยๆ หมุนรอบแกน z ด้วยคาบ $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega\sin\lambda}$

$T' \equiv$ คาบของการบิด

ตามเข็มนาฬิกาในซีกโลกเหนือ $(\lambda > 0)$

ทวนเข็มนาฬิกาในซีกโลกใต้ $(\lambda < 0)$

ขั้วโลก $\lambda = 90^\circ$ $T' = \frac{2\pi}{\omega} = 1$ วัน

กรุงปารีส $T' = 31.7$ h.

อัตราการบิด $\frac{360^\circ}{31.7} = 11.4^\circ\ h^{-1}$

ขอนแก่น $T' = 84.7$ h. $(\lambda \approx 16.46^\circ)$

อัตราการบิด $\frac{360^\circ}{84.7} = 4.25^\circ\ h^{-1}$