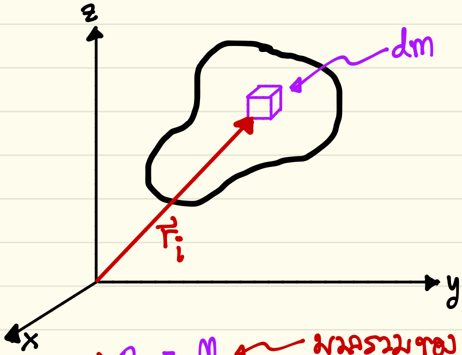
บทที่ 6 Plane Motion of Rigid Body

Rigid body ≡ ระบบของอนุภาคที่ระยะระหว่างอนุภาคคู่ใดๆ คงที่ [$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| =$ คงที่]

CM of rigid body



จากนิยาม $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$

สำหรับวัตถุแข็งเกร็งใดๆ $\vec{r}_{cm} =$

$\vec{r}_{cm} =$

ความหนาแน่น $\rho = \dfrac{M}{V}$ ← มวลรวมของวัตถุแข็งเกร็ง

$= \dfrac{dm}{dV}$

$dm = \rho\, dV$

วัตถุแผ่นบาง $dm = \sigma\, dA$; $\sigma \equiv$ surface density

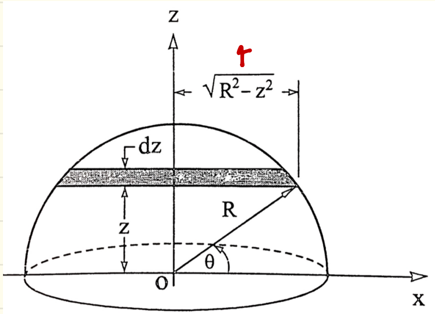
$\vec{r}_{cm} =$

Line wire $dm = \lambda\, dl$; $\lambda \equiv$ linear density

$\vec{r}_{cm} =$

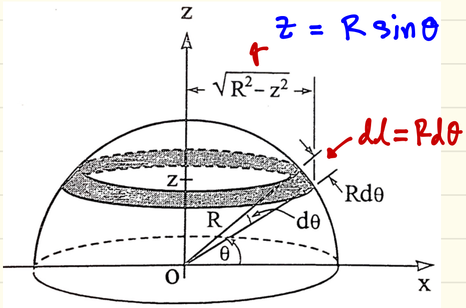
CM ของครึ่งทรงกลมตัน

มวลของครึ่งทรงกลมตัน $M = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho$

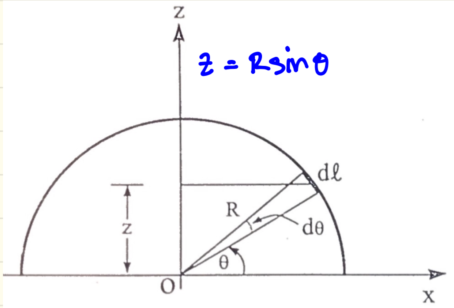


CM ของครึ่งทรงกลมกลม

$M = \sigma 2\pi R^2$

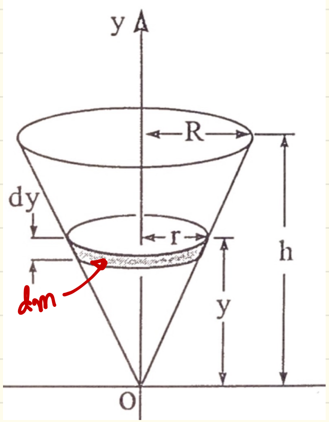


CM ของลวดครึ่งวงกลม



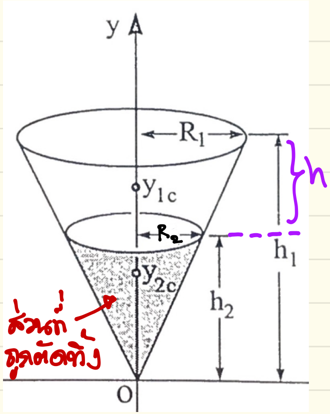
H.W. หา CM ของแผ่นครึ่งวงกลม $\left(\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)$

CM ของกรวยตัน รัศมี R สูง h



จากรูป $\frac{r}{R} = \frac{y}{h} \Rightarrow r =$

หา CM ของกรวยตันที่ถูกตัดปลายทิ้ง



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow h_2 = \frac{R_2}{R_1} h_1$$

$m_1 =$ $\qquad$ $m_2 =$

$y_{1cm} =$ $\qquad$; $y_{2cm} =$

∴ CM ของกรวยที่ถูกตัดปลายทิ้ง

$y_{cm} =$

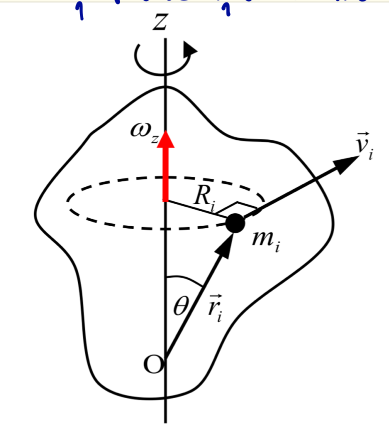
ถ้า h คือความสูงของกรวยที่เหลือ $\quad h = h_1 - h_2$

$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{R_1}{h_1} \Rightarrow h_1 =$$

$y_{cm} =$

Rotation of a rigid body [fixed axis]

วัตถุแข็งเกร็ง หมุนรอบแกน z



Angular momentum ($\vec{L}$)

พิจารณาอนุภาคมวล m_i : $\vec{L}_i =$

จากรูป $L_i =$

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \Rightarrow v_i =$

$\therefore v_i =$

ดังนั้น $L_i =$

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง รอบแกน z คือ $L_z =$

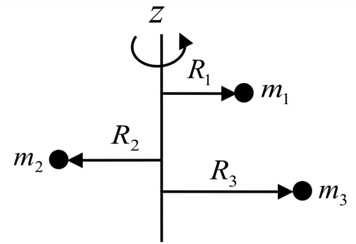
นิยาม $I_z =$ $\equiv$ โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia) รอบแกน z

$L_z =$ ω_z มีทิศชี้ไปตามแกน z นั่นคือ $L_x = 0$ และ $L_y = 0$

หรือ $L = I\omega = I\dot{\theta}$

Calculation of the Moment of Inertia

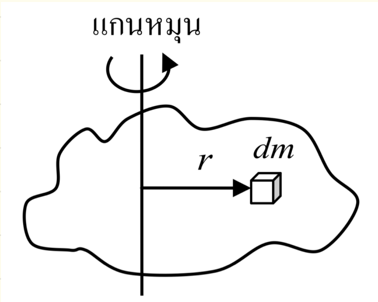
ระบบอนุภาค



โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุน $I =$

$r_i \equiv$ ระยะทางตั้งฉากกับแกนหมุนถึงมวล m_i

มวลกระจายสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียว



$I =$

$r \equiv$ ระยะทางตั้งฉากกับแกนหมุนถึงมวล dm

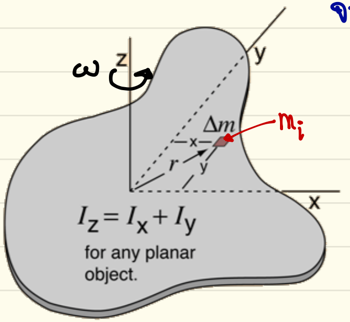
1 มิติ (เส้นลวด) $I =$

2 มิติ (แผ่นบาง) $I =$

3 มิติ $I =$

ถ้าวัตถุแข็งเกร็งหลายอัน แต่มีจุดหมุนเดียวกัน $I_{tot} = I_1 + I_2 + I_3 + \_\_\_$

ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (Perpendicular axis Theorem)



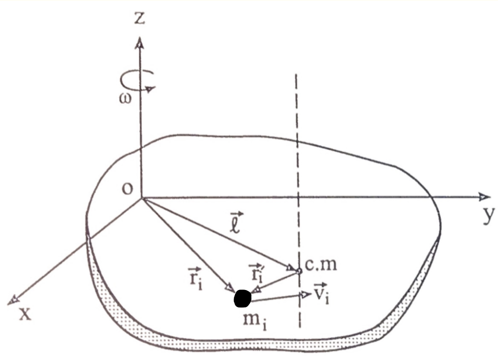
จากรูป I_z =

ผลรวมโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุบางรอบแกน 2 แกน ซึ่งตั้งฉากกัน และอยู่บนระนาบของวัตถุ = โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนซึ่งผ่านจุดตัดแกนทั้งสอง และตั้งฉากกับระนาบของวัตถุ

วัตถุที่มีรูปร่างอยู่บนระนาบเดียว เรียกว่า "plane lamina"

ทฤษฎีนี้ใช้ได้กับ plane lamina รูปร่างใดๆ เท่านั้น

ทฤษฎีแกนขนาน [Parallel axis Theorem]

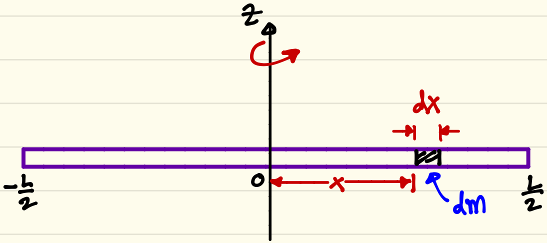


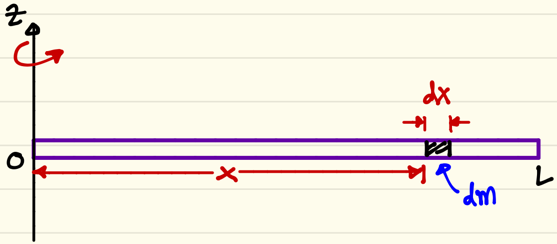
จากรูป $\vec{r}_i = \vec{l} + \vec{r}_i'$; $v_i = \omega r_i$

$I_z =$

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนใดๆ $=$ โมเมนต์ความเฉื่อยขนานกับแกนหมุนนั้นและผ่านจุดศูนย์กลางมวล $+$ ผลคูณของมวลของวัตถุกับระยะห่างระหว่างแกนทั้งสองยกกำลังสอง

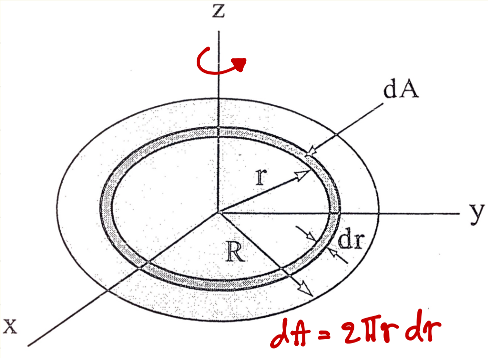
Thin rod ยาว L มวล m



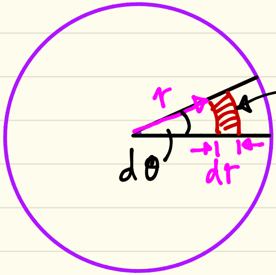


จากทฤษฎีแกนขนาน $\quad I_z = I_{cm} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$

Circular disk

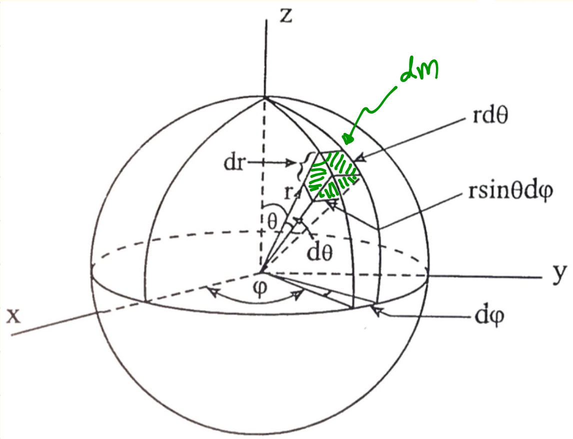


혹은 Polar coordinate



$dA = r\,d\theta\,dr$

Solid sphere



ความหนาแน่น $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{dm}{dV}$

$dV =$

Radius of gyration (k)

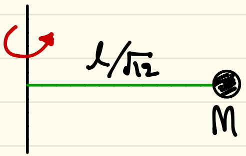
$$I = Mk^2 \Rightarrow k =$$

$k \equiv$ ระยะจากแกนหมุนซึ่งสมมุติเหมือนกับว่ามวลทั้งหมดรวมกันอยู่ที่ระยะนั้น

เช่น แท่งเล็กยาว ℓ แกนหมุนผ่านจุด CM

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 \Rightarrow k =$$

หมายความว่า: เหมือนมวลรวมกันอยู่ที่ระยะห่างจากแกนหมุน $\frac{\ell}{\sqrt{12}}$



Equation of Motion

การเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่เชิงเส้น กับการหมุน

	การเคลื่อนที่เชิงเส้น	การหมุน
การกระจัด	x	
ความเร็ว	$v = dx/dt$	
ความเร่ง	$a = dv/dt = d^2x/dt^2$	
สมการการเคลื่อนที่	$a \equiv$ คงที่	
	$v = u + at$	
	$x = ut + \frac{1}{2}at^2$	
	$v^2 = u^2 + 2aX$	

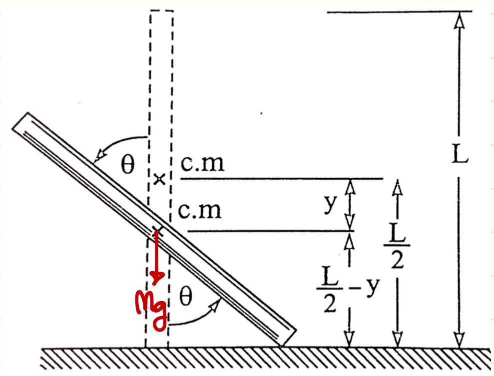
Kinetic energy $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 =$

Torque $\tau_z = \dfrac{dL_z}{dt} =$

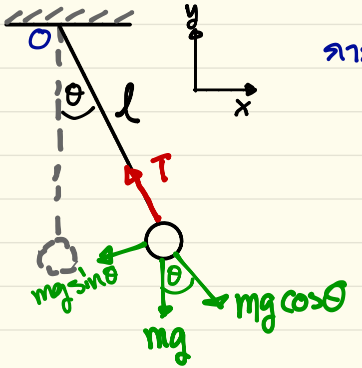
หรือ $\vec{\tau} =$

ถ้า τ รวมที่กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ $\dfrac{d\vec{L}}{dt} =$

Ex 6-1 แท่งไม้มวล m ยาว L เริ่มต้นวางอยู่นิ่งในแนวดิ่ง บนโต๊ะที่ไม่มีแรงเสียดทาน ถ้าแท่งไม้เริ่มล้มลง จงหาอัตราเร็วของการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของแท่งไม้ ที่เปลี่ยนไปในเทอมของมุม θ ที่ทำกับแนวดิ่ง

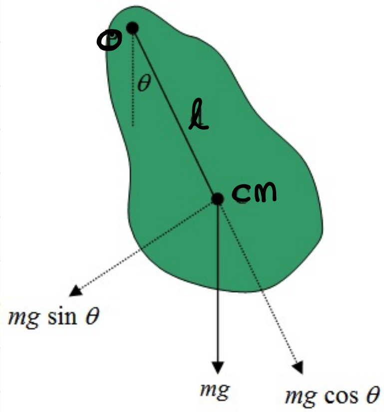


Simple Pendulum



การแกว่งนี้เทียบได้กับการหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ (ตรงจุด O)

Physical Pendulum [Compound Pendulum]



วัตถุแข็งเกร็งใดๆที่สามารถแกว่งอย่างอิสระรอบแกนคงที่ใดๆ
เนื่องจากน้ำหนักของมันเอง

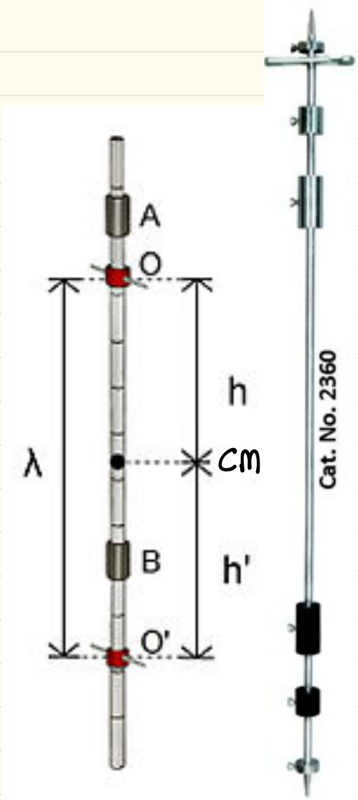
ทฤษฎีแกนขนาน $I_O = I_{cm} + ml^2$

$\therefore\ T =$

ถ้าเปลี่ยนจุดหมุนไปที่ O' ใดๆ

$T' =$

ถ้าปรับจนได้ $T = T'$



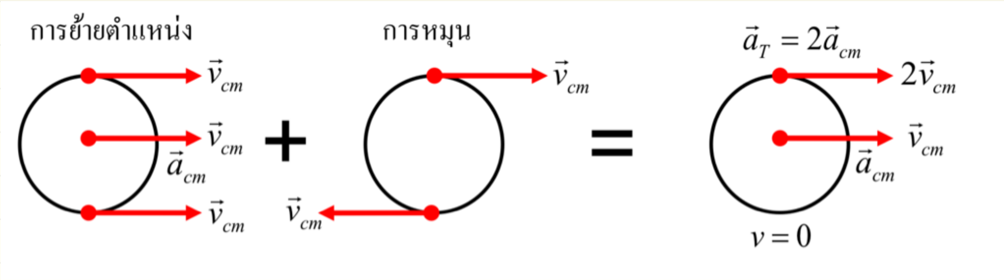
Kater's pendulum

$T =$

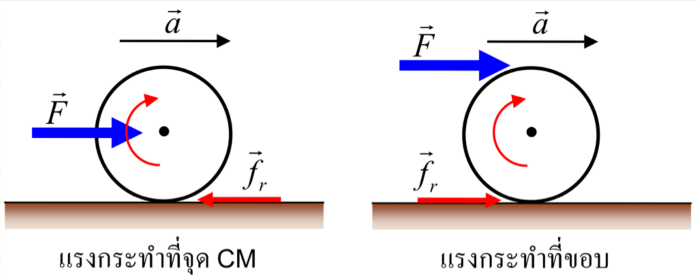
$g =$

ใช้วัดค่า g ได้แม่นยำ ถ้าทราบค่า $(l+l')$

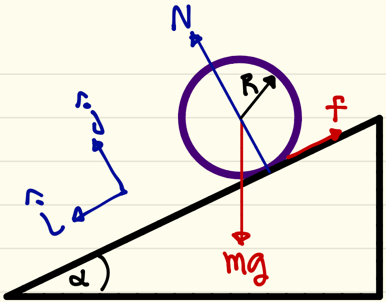
Rolling Motion



การกลิ้งจะเกิดขึ้นได้ ก็ต่อเมื่อ มีแรงเสียดทาน ซึ่งนำไปสู่แรงคู่ควบเพื่อให้เกิดการหมุน



$f_r \equiv$ Rolling fraction



No slipping

พิจารณาทรงกระบอกตัน มวล m รัศมี R กลิ้งลงพื้นเอียงมุม α

$m\ddot{x}_{cm} =$

$m\ddot{y}_{cm} =$

Torque รอบจุด cm $\vec{\tau} =$

$\vec{L} =$

$\vec{\tau} =$

$\therefore Rf =$

จาก $x = R\theta \Rightarrow \theta =$

$\ddot{\theta} =$

$Rf =$

$f =$

ใช้หลักการคงตัวของพลังงาน

พื้นเอียงยาว l จงหา t ที่ใช้เคลื่อนที่จนถึงจุดต่ำสุด

หา μ_{min} ที่ไม่ทำให้เกิดการไถล

จาก $f = \frac{1}{2}m\ddot{x} =$

$f =$

$\mu =$

ถ้า $\mu < \frac{1}{3}\tan\alpha \Rightarrow$ จะเกิดการไถล

ถ้ามีการไถล $f =$

$m\ddot{x}_{cm} =$

$\ddot{x}_{cm} =$

ความเร่งเมื่อมีการกลิ้ง $= R\ddot{\theta} =$

$\ddot{x} =$