บทที่ 7 Lagrange's Equation

Generalized coordinate

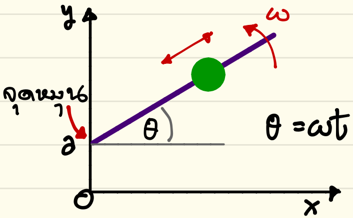
กรณีทั่วไป พิจารณาอนุภาค 1 ตัว coordinate ของตำแหน่งทั่วไป อาจจะเป็น

- Cartesian coordinate x, y, z
- Cylindrical coordinate ρ, θ, z
- Spherical coordinate r, θ, ϕ

นั่นคือ มี 3 coordinate สำหรับอนุภาค 1 ตัว ไม่ว่าจะเลือกแบบไหนก็ตาม

ดังนั้น สำหรับอนุภาค N ตัว ก็จะมีทั้งหมด ______________

แต่ถ้ามี Constraints (เงื่อนไขบังคับการเคลื่อนที่ของวัตถุ) $\Rightarrow$ Coordinate จะลดลงได้



ตัวอย่างเช่น ลูกปัดเล็กๆ ร้อยอยู่ในลวดตรง

$\therefore$ ลูกปัดจะเคลื่อนที่อยู่เฉพาะบนลวดตรง บนระนาบ xy เท่านั้น

ตำแหน่งของลูกปัด สามารถระบุได้โดยสมบูรณ์ โดย coordinate เพียงตัวเดียว (x หรือ y) เนื่องจาก x, y ไม่ได้เป็นอิสระจากกัน แต่สัมพันธ์กันด้วย

Degree of Freedom (n) ระดับขั้นความเสรี

หมายถึง จำนวน coordinate อิสระน้อยที่สุดที่ใช้ระบุตำแหน่งอนุภาคทุกตัวได้อย่างสมบูรณ์

ถ้าในระบบอนุภาค N ตัว และมี constraint อยู่ m $\therefore$ $n =$

จากตัวอย่าง กรณีของลูกปัด $\rightarrow$ $n =$

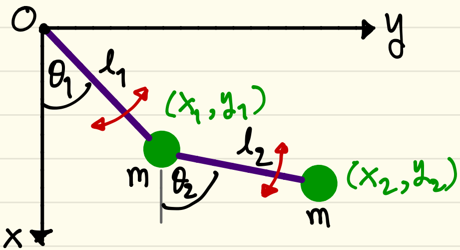
Coordinate อิสระทั้ง n ตัว สามารถที่จะเป็นปริมาณอะไรก็ได้ เช่น ความยาว (l), l^2, มุม หรือพลังงาน ฯลฯ หรือปริมาณที่ไม่มีหน่วย coordinate เหล่านี้ที่ใช้อธิบายระบบได้อย่างสมบูรณ์ เรียกว่า "generalized coordinate" (coordinate ทั่วไป) ซึ่งแทนด้วย $q \rightarrow$ ซึ่งสามารถเขียนในเทอมของ coordinate เดิม ดังนี้

$$\vec{r}_1 =$$

$$\vec{r}_2 =$$

$$\vdots$$

$$\vec{r}_N =$$



ตัวอย่าง ระบบ double pendulum l_1, l_2 ยาวคงที่

Coordinate ที่ใช้มี

สมการเงื่อนไขบังคับ (constraint equation)

ในระบบมี generalized coordinate

ชุดละ 2 ตัว คือ (x_1, x_2), (y_1, y_2)

(θ_1, θ_2)

ชุดที่เหมาะสม คือ

$\therefore$

Generalize Forces

การกระจัดของอนุภาคใน generalized coordinate $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ เขียนได้เป็น

$$d\vec{r}_i =$$

Work $\quad dW = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad =$

$$=$$

generalized force $\quad Q_j =$

$$Q_j =$$

สำหรับในระบบ conservative $\quad \vec{F} = -\nabla \vec{U}$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\therefore Q_j =$$

สมการ Lagrange

พิจารณาอนุภาคเดี่ยว (N=1) ในรูปของ generalized coordinate คือ

$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, ---, q_n)$ หรือ $x = x(q_1, q_2, ---, q_n)$

$y = y(q_1, q_2, ---, q_n)$

$z = z(q_1, q_2, ---, q_n)$

$\dot{x} =$

$\dot{y} =$ $\dot{z} =$

พลังงานจลน์ของอนุภาค $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = m\left[\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}}\right]$$

$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_j} =$; $\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_j} =$; $\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_j} =$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} =$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = m\left[\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) =$$

หา $\dot{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_j}\dot{q}_j = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \text{---} + \frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_j} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_j}\right) =$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_j}\right) =$$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_j}\right) =$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_j}\right) =$

$$m\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_j} =$$

จะได้ $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} =$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} =$$

ในกรณี conservative force $\quad Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} =$$

นิยาม $\quad L = T - U$

Lagrangian

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} =$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

สมการ Lagrange ในระบบอนุรักษ์

ถ้า generalized force ไม่เป็น conservative ทั้งหมด

$$Q_j = Q'_j - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

ส่วนที่ไม่เป็น conservative

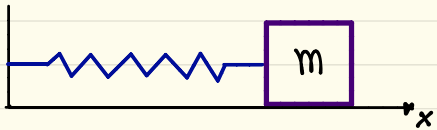
$$\therefore \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

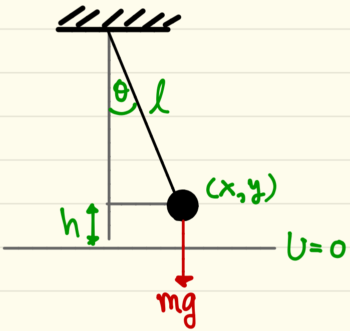
การนำสมการ Lagrange ไปใช้

1. เลือก set ของ generalized coordinate ที่เหมาะสม
2. หาสมการของการ transformation ที่ให้ความสัมพันธ์ระหว่าง dependent cartesian coord. และ independent generalized coord.
3. หาพลังงานจลน์ T ในรูป Function ของ generalized coord.
4. หา function ของ U ในรูป generalized coord. [ใน conservative system] ถ้าไม่ใช่ conservative system ให้หา generalized force Q_j

Ex 7-1 Harmonic oscillation ใน 1 มิติ

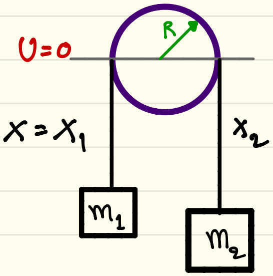


Ex 7-2 Simple pendulum



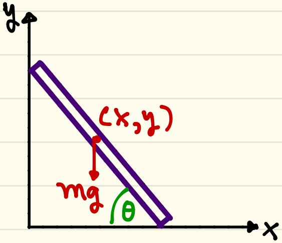
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Ex 7-3 Atwood machine [เชือกยาว ℓ รอกมี moment of inertia I]



EX7-4 คานไม้ยาว l มวล m ไถลลงมาตามผนัง พื้นและผนังไม่มีแรงเสียดทาน จงหา

1. สมการการเคลื่อนที่ ถ้าคานไม้ยังคงแตะผนัง
2. ค่ามุม θ ที่คานไม้เริ่มไม่แตะผนัง

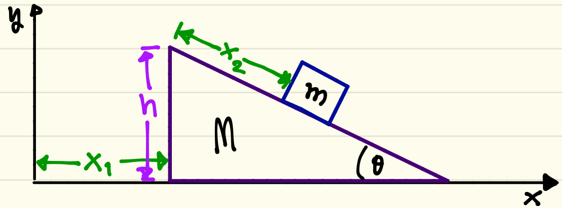


2. ค่ามุม θ ที่คานไม้เริ่มไม่แตะผนัง

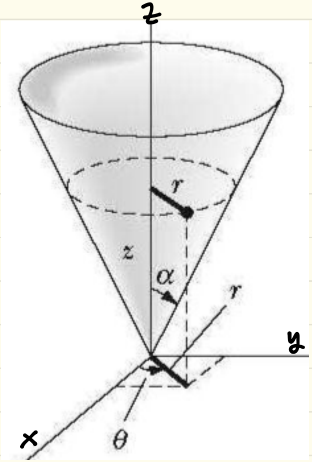
ถ้าผนังยังคงมีแรงกระทำต่อคานไม้ $\ddot{x} > 0$

ถ้าคานไม้หลุดออกจากผนัง $\ddot{x} = 0$

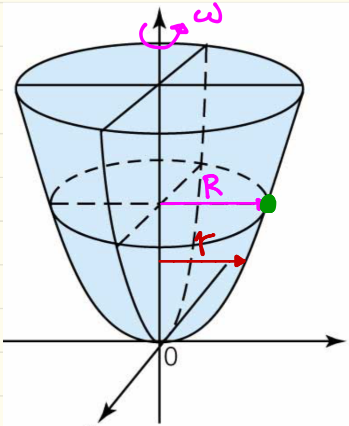
EX 7-5 มวล m วางบนพื้นเอียง มวล M ทุกพื้นผิวไม่มีแรงเสียดทาน จงหาความเร่งของ M และ m บนพื้นเอียง



EX 7-6 อนุภาคถูก constraint ให้เคลื่อนที่ในผิวในของโคนที่เรียบภายใต้แรงดึงดูดของโลก

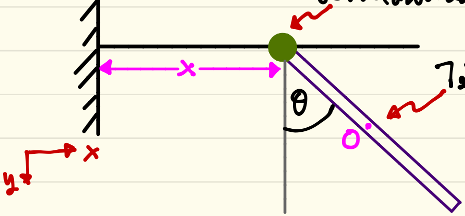


Ex 7-7 ลูกปัดเม็ดหนึ่งถูกร้อยอยู่ในเส้นลวดที่ขดเป็นรูปพาราโบลา $z = cr^2$ ลูกปัดนี้จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี R เมื่อลวดหมุนรอบแกนสมมาตร ในแนวดิ่งด้วยความเร่งเชิงมุม ω จงหาค่า c



Ex 7-8

วงแหวนมวล m เลื่อนไปมาได้



ไม้มวล $2m$ ยาว $2l$ แกว่งไป-มาได้ในระนาบดิ่ง

จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของท่อนไม้

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m(\dot{x}^2 + 2l\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \frac{4}{3}l^2\dot{\theta}^2) + 2mgl\cos\theta$$

generalized coord.

ฟังก์ชันแฮมิลโทเนียน [Hamiltonian]

สำหรับ Lagrangian $f^{=}$ สามารถอธิบายในเทอมของ generalized coord q_j , $\dot{q}_j$
และถ้า L เป็น $f^{=}$ ของเวลา จะเขียนได้ว่า

$$L(q,\dot{q},t) = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

ถ้าตัวแปร q_j , $\dot{q}_j$, t เปลี่ยนแปลงไป จะทำให้ L เปลี่ยนแปลงไป

$dL =$

$dL =$

$\frac{dL}{dt} =$

กรณีที่ 1 ถ้า L ไม่ขึ้นกับเวลาอย่างชัดแจ้ง

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

จาก ① $\frac{dL}{dt} =$

จาก Lagrange eqⁿ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$$ → แทนค่าในสมการ ②

$$\frac{dL}{dt} =$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right] = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L =$$

$H \equiv$ เป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่

ถ้า U ไม่ขึ้นกับความเร็วอย่างชัดแจ้ง

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} =$$

แทนค่าในสมการ ③ $\quad H =$

จาก Lagrange eqⁿ $\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow$

กรณีที่ 2 ถ้า L ไม่ขึ้นกับ coord. q_j อย่างชัดแจ้ง

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

จาก Lagrange eq$^{\text{n}}$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) =$

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับพลังงานจลน์

พลังงานจลน์ T เป็น f$^{\text{n}}$ กำลังสอง (quadratic function) ของความเร็ว

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) =$$

generalized coordinate : $\quad r_i = r_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$

$$dr_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} dt$$

generalized velocity : $\quad v_i = \frac{dr_i}{dt} =$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right]^2$$

$$=$$

$$T =$$

$$T =$$

ถ้าเวลาไม่ปรากฏอยู่ใน generalized coord. r_i $\Rightarrow$

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} q_j q_k$$

$\Rightarrow$ T เป็น $f^{\underline{n}}$ กำลังสองเอกพันธ์ (homogeneous quadratic $f^{\underline{n}}$) ของ generalized velocity

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} =$$

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} =$$

ถ้า L ไม่ขึ้นกับเวลา และ U ไม่ขึ้นกับความเร็ว

จาก $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j$

$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} =$

$\sum_j p_j \dot{q}_j =$

จาก $H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L =$

$H = 2T - (T-U) =$

สรุป H จะเท่ากับพลังงานรวม E ก็ต่อเมื่อ

1. พลังงานศักย์ไม่ขึ้นกับความเร็ว $U = U(q_j)$
2. สมการแปลง Coord. → generalized Coord. ไม่ขึ้นกับเวลา นั่นคือ T เป็น $f^{\text{ก}}$ กำลังสองเอกพันธ์ของความเร็ว $\dot{q}_j$

Ex 7-9 วัตถุมวล m ถูกดึงเข้าสู่จุดกำเนิดโดยแรง $F = -\frac{k}{r^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่

ก. จงหา Lagrange eq^{n}

ข. จงแสดง H ในเทอมของ coordinate และโมเมนตัม

Coord. : r, θ Momentum : p_r , p_θ

ค. H เท่ากับพลังงานรวม E หรือไม่

ง. H คงที่หรือไม่

จ. E คงที่หรือไม่

สมการของแฮมิลตัน

อาจเรียกว่า สมการการเคลื่อนที่แบบคาโนนิคอล (canonical equation of motion)

จาก $H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L$ —— ①

เนื่องจาก $L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$

$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$

$dH =$

หาอนุพันธ์ของสมการ ①

$dH =$

$=$

$dH =$

$$dH = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt \quad — \quad ②$$

$$dH = \sum_{j=1}^{n}\left(\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \quad — \quad ②$$

เทียบสมการ ② กับ ③ จะได้

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} =$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} =$$

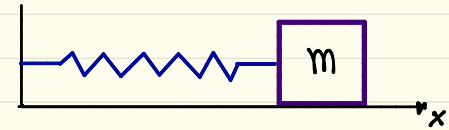
$$\frac{\partial H}{\partial t} =$$

พิจารณากรณีที่ L ไม่ขึ้นกับเวลาอย่างชัดแจ้ง ดังนั้น H ก็ไม่ขึ้นกับเวลาด้วย $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

จากสมการ ② $\quad \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) =$

H = ค่าคงที่ของการเคลื่อนที่

Ex 7-10 Simple harmonics motion ใน 1 มิติ หาสมการการเคลื่อนที่ โดยใช้สมการ Hamilton

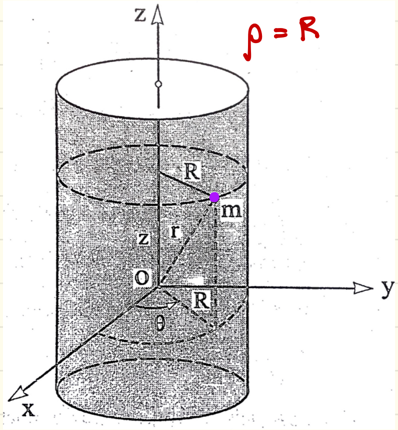


$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$; $U = \frac{1}{2} k x^2$ (จาก Ex 7-1)

EX 7-11 วัตถุมวล m ถูกดึงสู่จุดกำเนิดโดยแรง $F = -\frac{k}{r^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ จงหา H และ Hamilton eq^n

จาก Ex 7-9 $\quad T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad ; \quad U = -\frac{k}{r}$

EX 7-12 จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m ซึ่งถูกบังคับให้เคลื่อนที่บนผิวทรงกระบอกรัศมี R โดยแรงดึงดูดเข้าหาจุดกำเนิด ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะทางจากวัตถุถึงจุด O



$$H = T + U = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2M} + \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

จาก Hamilton eqⁿ $\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j$