บทที่ 2 Particle Dynamics

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\vec{F} =$$

แรงที่กระทำต่ออนุภาค

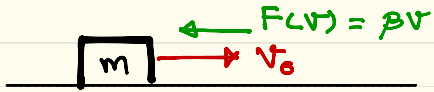
1. แรงเป็นค่าคงที่
2. แรงเป็น f^n ของเวลา [$F = F(t)$]
3. แรงเป็น f^n ของความเร็ว [$F = F(v)$]
4. แรงเป็น f^n ของระยะทาง [$F = F(x)$]

2.1 แรงเป็นฟังก์ชันของเวลา $F = F(t)$

Ex2-1 วัตถุมวล m วางบนพื้นผิวที่ไม่มีแรงเสียดทาน ณ เวลา $t=0$ วัตถุอยู่นิ่งที่จุด origin ถ้ามีแรง $F = F_0 e^{-\lambda t}$ กระทำต่อวัตถุนี้ (λ เป็น + มีค่าน้อย) จงหาค่า $x(t)$ และ $v(t)$ เมื่อ t มีค่าน้อยมาก และ t มีค่ามาก

2.2 แรงเป็นฟังก์ชันของความเร็ว $F = F(v)$

Ex2-2 วัตถุเคลื่อนไปบนพื้นที่ไม่มีแรงเสียดทาน แต่มีความต้านทานอากาศ โดยแรงต้านของอากาศเป็น f^n ของ v



สมการการเคลื่อนที่

Ordinary differential equation of second order with constant coefficient

Homogeneous equation $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$

วิธีหา general sol^{n} กำหนดให้ $x =$; $\dot{x} =$; $\ddot{x} =$

เงื่อนไข

① ถ้า $b^2-4ac=0$

Gen. Sol^{n}

$x =$

② ถ้า $b^2-4ac>0$

Gen. Sol^{n}

$x =$

③ ถ้า $b^2-4ac<0$

Gen. Sol^{n}

$x =$

หรือ $x =$

จาก Ex2-2 $m\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0$

ให้ $x = e^{\lambda t}$; $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$; $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Taylor series expansion ของ e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

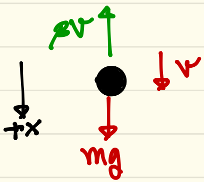
$$\therefore \quad e^{-\frac{\beta}{m}t} =$$

ในกรณีที่แรงมากระทำในช่วงสั้นๆ ตอนต้น (t น้อย $\rightarrow$ แรงเพิ่งเริ่มกระทำ)

จาก $v = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$

จาก $x = \frac{v_0 m}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$

Ex 2-3 วัตถุตกในตัวกลางที่มีแรงต้านการเคลื่อนที่ ที่มีขนาด βv



สมการการเคลื่อนที่

การ integrate

จาก $m\ddot{x} = mg - \beta\dot{x}$ ← แทนค่า $\dot{x}$ เพื่อหา $\ddot{x}$

Ordinary differential equation of second order

Inhomogeneous equation $\quad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t)$

การหา general sol$^{\text{n}}$

I. หา sol$^{\text{n}}$ ของ homogeneous eq$^{\text{n}}$

II. หา sol$^{\text{n}}$ ของ inhomogeneous eq$^{\text{n}}$

หา I (x_h) จาก Ex 2-2 $\quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0$

$$x_h =$$

หา II (x_i) กำหนดให้ $\quad x_i = \quad ; \quad \dot{x}_i = \quad ; \quad \ddot{x}_i =$

จาก $\quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} = mg$

$x_i =$

general sol^{n} $\quad x = x_h + x_i$

$x =$

$\dot{x} =$

$\ddot{x} =$

แทน I.C. หาค่า c_1, c_2

1) $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$

2) $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=v_0$

$x_0 =$

general solⁿ $x = x_h + x_i$

$$x = c_1 + c_2 e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta}t \quad \text{— (a)}$$

$$\dot{x} = -c_2 \frac{\beta}{m} e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \quad \text{— (b)}$$

$$\ddot{x} = c_2 \frac{\beta^2}{m^2} e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad \text{— (c)}$$

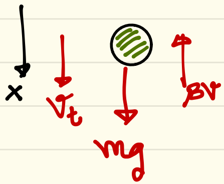
Terminal velocity

จากสมการ $v = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$ ถ้า t มากๆ $\rightarrow \infty$

$v_t =$

v_t : terminal velocity

[ความเร็วของวัตถุ ณ ที่แรงต้านการเคลื่อนที่ เท่ากับน้ำหนักของวัตถุพอดี แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์]



$m\ddot{x} =$

Characteristic time (τ)

พิจารณา $\frac{m}{\beta}$ มีหน่วยเป็น $\frac{v_t}{g}$ $\rightarrow$

$\frac{m}{\beta} \rightarrow \tau$: characteristic time

$\therefore v =$

ถ้า $v_0 = 0$ (วัตถุตกอิสระ) $v =$

ถ้า $t = \tau$ $v =$

τ คือเวลาที่ผ่านไปจนความเร็วเป็น $0.63\, v_t$

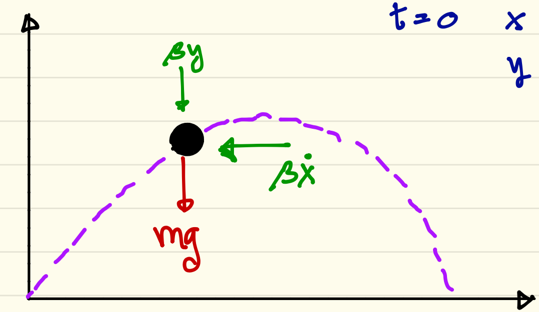
Projectile

สมการการเคลื่อนที่

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} = -mg$$

$t = 0$ $\quad x = 0 \quad \dot{x} = u_x$

$\qquad\quad y = 0 \quad \dot{y} = u_y$



$x =$

$y =$

หาเวลาที่ไปได้ไกลสุด ($y = 0$, $t = T$)

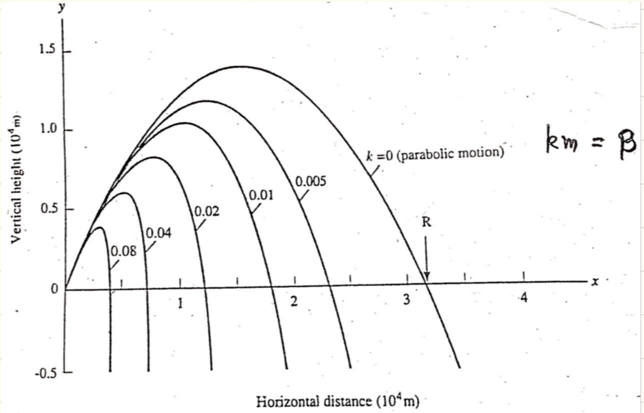


FIGURE 2-8 The calculated trajectories of a particle in air resistance ($F_{res} = -kmv$) for various values of k (in units of s^{-1}). The calculations were performed for values of $\theta = 60°$ and $v_0 = 600$ m/s. The values of y (Equation 2.44) are plotted versus x (Equation 2.43).

$km = \beta$

2.3 แรงเป็นฟังก์ชันของระยะทาง $F = F(x)$

$$m\ddot{x} = F(x)$$

$$F(x) = m\frac{dv}{dt} =$$

T : kinetic energy $= \frac{1}{2}mv^2$

$$\int_{T_0}^{T} dT =$$

$$T - T_0 =$$

นิยาม พลังงานศักย์ หรือ potential energy function

$$-\frac{dU(x)}{dx} =$$

$$\text{งาน} = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx =$$

$$T - T_0 =$$

$$T - T_0 = U(x_0) - U(x)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 =$$

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ภายใต้แรงที่เป็น f^n กับระยะทาง ผลรวมของพลังงานจลน์ (T) และพลังงานศักย์ (U) มีค่าคงที่ แรงนี้เรียกว่า แรงอนุรักษ์ (Conservative force)

แรงที่ทำให้งาน (W) ไม่ขึ้นกับระยะทาง ขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น เช่น

จาก $T + U = E$ $\therefore \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$

$$v =$$

$$\int_{t_0}^{t} dt =$$

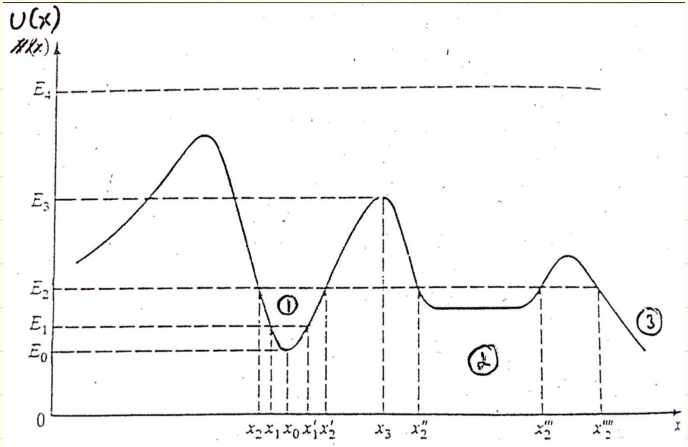


Figure 2.5 The solid curve corresponds to a potential function $V(x)$, and $E_0, E_1, \ldots,$ are different energies of a particle moving in such a potential.

กรณีแรงเป็น f^n ของตำแหน่ง $E = T + U \equiv$ คงที่

$\therefore \; E - U(x) = T$

เพื่อให้ $T \geq 0 \rightarrow E - U(x) \geq 0$

นั่นคือ $U(x) \leq E$

จากรูป ถ้า $E = E_2$

บริเวณที่วัตถุอยู่ได้ คือ 1, 2, 3

เช่น บริเวณ 1 วัตถุกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาจนถึง $x = x_2'$

$\therefore \; E_2 = U(x)$ จะได้ว่า $T = 0$ แสดงว่าวัตถุจะหยุดการเคลื่อนที่

แต่ $-\frac{dU}{dx} = F(x)$ จะมีแรงไปทาง $-x$ ทำให้วัตถุเคลื่อนกลับ

เรียกว่า "จุดวกกลับ" [Turning point] เช่นเดียวกับที่ตำแหน่ง x_2, x_2'', x_2'''

บริเวณ 1, 2 : bounded region

3 : unbounded region

ถ้าให้จุด equilibrium อยู่ที่ $x = 0$ โดย Taylor series

$$U(x) = U_0 + x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_0 + \cdots$$

ณ $x = 0$ เป็นจุด equilibrium U_0 คงที่ [ให้ $U_0 = 0$]

ณ จุด equilibrium $\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 =$

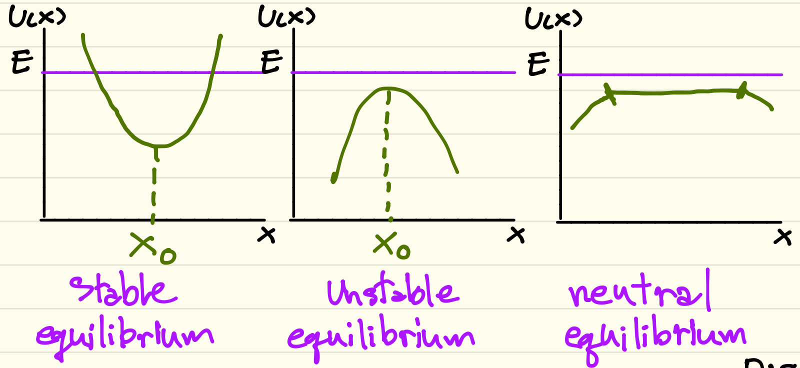
$\therefore$ $U(x) =$

ถ้าพิจารณาเฉพาะเทอมแรก เพราะใกล้จุด equilibrium ค่า x มีค่าน้อย

$\therefore$ $U(x) =$

$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 > 0$

$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 < 0$



$k > 0$

EX2-4 A particle moves along the x-axis in a force field having potential $U = \frac{1}{2}kx^2$

(a) Determine the points at equilibrium

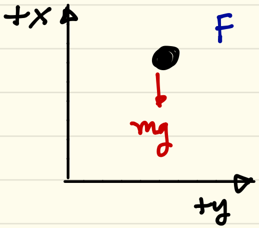
(b) Investigate the stability

EX2-5 วัตถุมวล m ถูกกระทำโดยแรง $F(x) = a - 2bx$ โดย a และ b เป็นค่าคงที่ จงหา

a) พลังงานศักย์ $U(x)$

b) กราฟระหว่าง $F(x)$ กับ x และ $U(x)$ กับ x

วัตถุตกอย่างอิสระ [Conservation motion]



$F = -mg$

I.C. : $x = 0$, ให้ $U = 0$

$U =$

ถ้าโยนวัตถุขึ้นด้วยความเร็วต้น v_0 จากจุด origin $x = 0$ $\therefore E =$

$\therefore \frac{1}{2}mv_0^2 =$

$v^2 =$

จุดมากสุด ณ จุด max. height ได้ $v =$

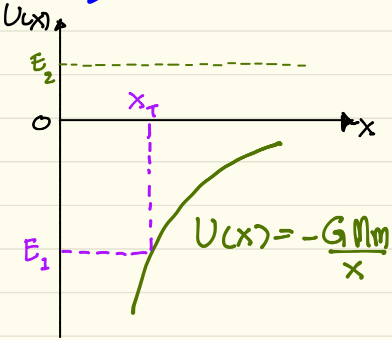
พลังงานศักย์โน้มถ่วง

แรงดึงดูดระหว่างโลก (M) กับมวล m ซึ่งอยู่ห่างจากศูนย์กลางโลก x คือ

$$F(x) = m\ddot{x} =$$

พลังงานศักย์โน้มถ่วง (Gravitational potential energy)

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) = E \Rightarrow \therefore v = \dot{x} =$



$\underline{E<0}$ การเคลื่อนที่จะ bound ที่ $x = x_T$ คือจุดวกกลับ

$\underline{E>0}$ ไม่มี turning point วัตถุนั้นก็จะไม่กลับมายังผิวโลก

$\underline{E=0}$ v จะเป็น escape velocity , v_e

พิจารณากรณี $E<0$ ณ $x = x_T$, $v = 0$

$\therefore E =$

หรือ $x_T =$ [$x_T \equiv$ เป็น ⊕ ∴ E ต้องเป็น ⊖]

จากสมการ $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GMm}{x}$

ให้วัตถุตกจากความสูง x_0 , ณ $v=0$

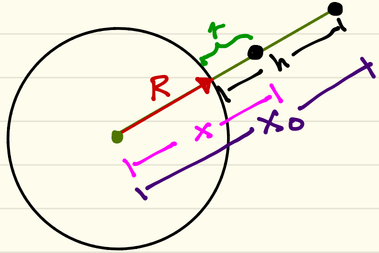
$\therefore$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GMm}{x} =$$

$$\therefore \dot{x}^2 =$$

ณ ตำแหน่งใกล้ๆ ผิวโลก ($x = R$: รัศมีของโลก) ได้ $g = g_0$

$$F_G = F_{g_0}$$



โดยทั่วไประยะทางทั้งหลายจะวัดจากผิวโลก

$x =$; $\dot{x} =$; $x_0 =$

ดังนั้น $v^2 =$

เมื่อ $r=0$ ก็คือวัตถุตกถึงผิวโลก , $v = v_0$

$$v_0^2 =$$

จาก Taylor series $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

ถ้า $h \ll R$ $\therefore$ $v_0^2 \approx$

เพื่อหาค่า ความเร็วหลุดพ้น (escape velocity) $h \approx \infty \Rightarrow$

$$v_e^2 =$$

$$v_e =$$

หรือคิดจาก ณ ผิวโลก $E=0$ $\left[E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GMm}{R} \right]$

$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{x}_e^2 =$$

$$v_e =$$