บทที่ 3 แรงในแนวศูนย์กลาง [Central Force]

I. เป็นแรงที่ชี้เข้าหาหรือออกจากจุดตรึงใดๆ ซึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด หรือ จุดศูนย์กลางแรง ถ้าเป็นแรงระหว่างวัตถุ 2 ก้อน แรงนี้จะมีทิศในแนวเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง center ของทั้ง 2 วัตถุนั้น

II. แรงนี้เป็น f^{n} ของ $\vec{r}$

$$\vec{F} =$$

ตัวอย่าง central force

- แรงโน้มถ่วงจากดวงอาทิตย์กระทำต่อดวงดาว (ดูด)
- แรงทางนิวเคลียร์กระทำต่ออิเล็กตรอน (ดูด)
- แรง Coulomb (ดูด - ผลัก)

เนื่องจากเป็น conservative force

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = F(r)\hat{r} =$$

$F_x =$, $F_y =$, $F_z =$

จาก $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} = 0$

$\therefore (\vec{\nabla}\times\vec{F})_x =$

พิจารณา $\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r}F(r)\right) =$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{\partial F_y}{\partial z} =$

$\therefore (\vec{\nabla}\times\vec{F})_x =$

จาก $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore \frac{\partial r}{\partial y} =$ $\frac{\partial r}{\partial z} =$

$\therefore$ แสดงว่า $(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x =$

ในทำนองเดียวกัน $(\vec{\nabla}\times\vec{F})_y =$

$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z =$

$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{F} =$

$\therefore \vec{F}(r) =$

C2

คุณสมบัติของการเคลื่อนที่ภายใต้ Central force

1. Angular momentum มีค่าคงที่

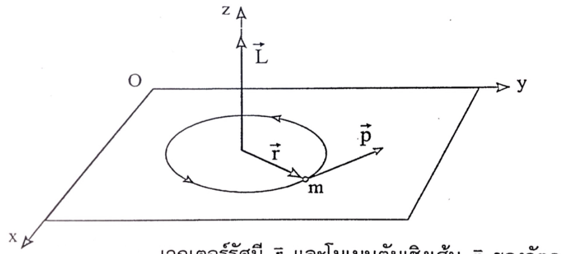
จาก $\vec{L} =$

$\therefore \vec{L} =$

ดังนั้น $\frac{d\vec{L}}{dt} =$

2. เส้นทางการเคลื่อนที่อยู่บนระนาบ และระนาบนี้ตั้งฉากกับ $\vec{L}$

จาก $\vec{L} =$



เวกเตอร์รัศมี $\bar{r}$ และโมเมนตัมเชิงเส้น $\bar{p}$ ของวัตถุ

อยู่ในระนาบซึ่งตั้งฉากกับโมเมนตัมเชิงมุม $\bar{L}$

3. Law of equal areas

C3

โมเมนตัมเชิงมุมและพลังงาน

Polar coordinate (plane) $m\ddot{\vec{r}} =$

เนื่องจาก $F(r)$ เป็นแรงอนุรักษ์

9.26 plane polar coordinate $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e} + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

จาก $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$

$\frac{dr}{dt} = \dot{r} =$ $\longrightarrow$ $t =$

เปลี่ยน r ให้อยู่ใน f^n ของ θ

แก้สมการโดย หา $r(\theta)$ แทน $r(t)$

$\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta} \Rightarrow \ddot{r} =$

แทนค่า $\dot{\theta}$, $\ddot{r}$ ในสมการ ③ $m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r)$

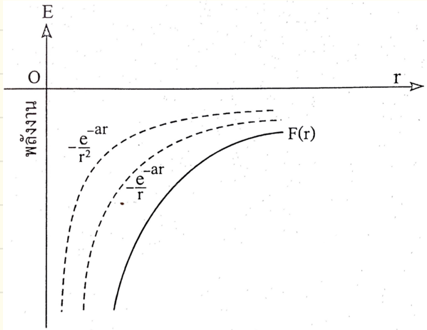
EX 3-1 อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ตามเส้นทางโคจรเป็นรูปเกลียว (spiral orbit) ตามสมการ $r=k\theta$ [k = คงที่] เป็นไปได้หรือไม่ที่วงโคจรนี้อยู่ภายใต้ central force ถ้าเป็นไปได้จงหาแรงนี้

Effective Potential

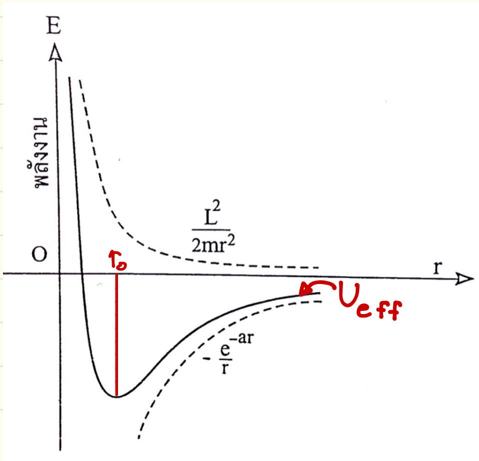
จากสมการ 1 $\quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r)$

EX3-2 จากทฤษฎีของ Yokawa เกี่ยวกับแรงนิวเคลียร์ แรงดึงดูดระหว่างโปรตอนและนิวตรอน ภายในนิวเคลียส แทนได้ด้วยพลังงานศักย์ $U(r) = \frac{ke^{-ar}}{r}$ โดยที่ a, k เป็นค่าคงที่ และ $k < 0$

ก. หา $F(r)$ และเขียนกราฟของ $F(r)$ กับ r



ข. อธิบายการเคลื่อนที่ภายใต้แรงนี้ และเขียนกราฟระหว่าง U_{eff} กับ r



C10

ค. หา E และ L ถ้าอนุภาคเคลื่อนเป็นวงกลมรัศมี r

ง. หาคาบในการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

แรงในแนวศูนย์กลางที่เป็นสัดส่วนกลับกับระยะทางกำลังสอง

จาก $\vec{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r}$ หรือ $F(r) = \frac{k}{r^2}$ ถ้าเป็น แรงดึงดูด $k < 0$

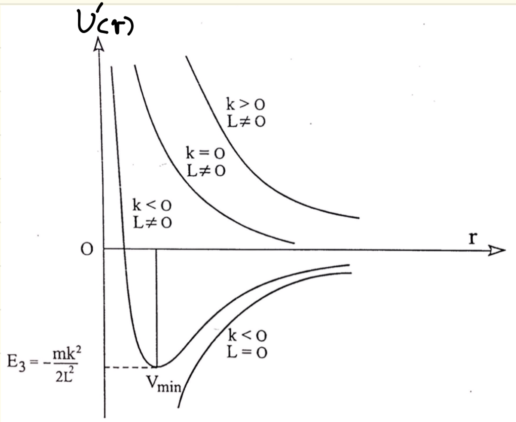
แรงผลัก $k > 0$

$\therefore U(r) =$ [ให้ $U(\infty) = 0$]

เช่น (1) แรงโน้มถ่วง

(2) แรงคูลอมบ์

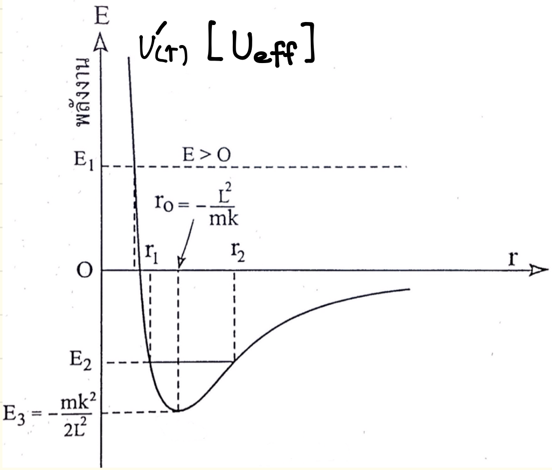
$\therefore U'(r)$ หรือ $U_{eff}(r) =$



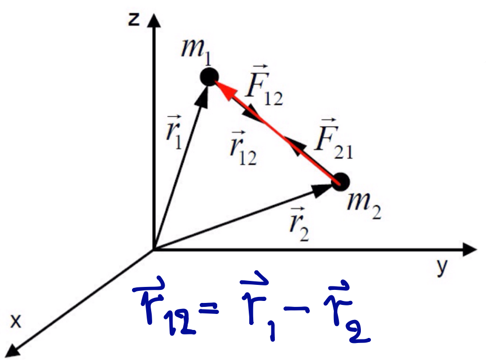
C12

การหาค่า r_0

r_0 เกิดขึ้นที่จุดสมดุล



มวลลดทอน [Reduced Mass]



$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

- ระบบประกอบด้วย 2 อนุภาค (ระบบแบบโดดเดี่ยว)
- แรงระหว่างอนุภาคเป็น Centra force

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \qquad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \qquad \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12}$$

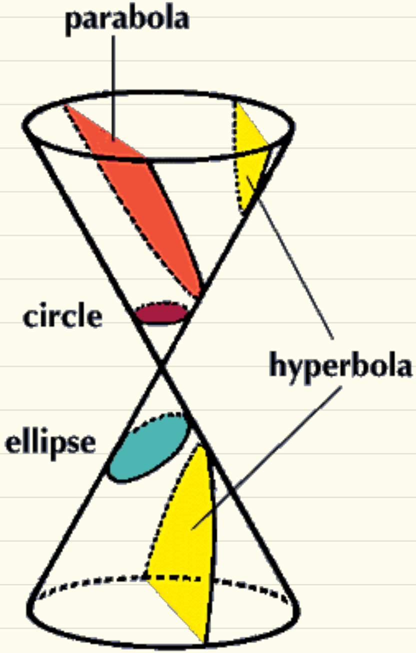
$$\vec{F}_{12} = \mu\ddot{\vec{r}}_{12}$$

วงโคจรภายใต้แรงที่เป็นสัดส่วนกลับกับระยะทางกำลังสอง

พิจารณากรณี $F(r) = -\frac{k}{r^2}$ $U(r) = -\frac{k}{r}$

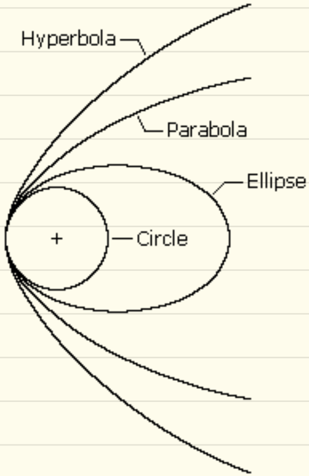
$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \pm \sqrt{\frac{m^2k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}$$

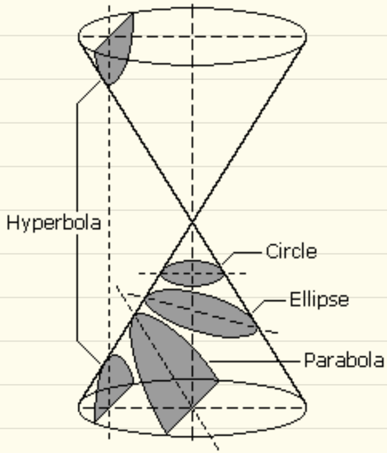
$$r = \frac{L^2}{mk} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0)\right)}$$



ค่า ε เป็นค่าที่กำหนดรูปร่างของวงโคจร

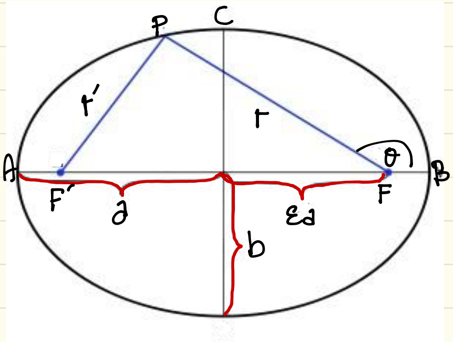
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$





$0 < \varepsilon < 1$	$U_{min} < E < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0$	$E = U_{min}$	Circle
$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hyperbola
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parabola
$\varepsilon < 0$	$E < U_{min}$	Not allowed

Ellipse



นิยามของวงรี $r' + r =$ คงที่

$a \equiv$ semi-major axis ; $b \equiv$ semi-minor axis

ถ้า ตำแหน่ง $P \rightarrow B$ จะได้

จาก cosine law

$r'^2 =$

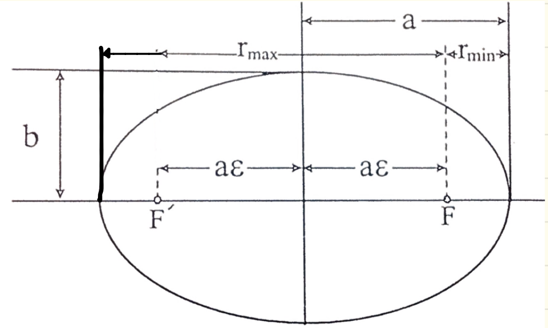
การหาค่า a ของวงรี

จาก $r = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$

$a \equiv$ ขึ้นกับค่าพลังงาน E ของวัตถุอย่างเดียว

$b \equiv$ ขึ้นกับค่าพลังงาน E และโมเมนตัมเชิงมุม L

จากสมการ $\frac{1}{r_{min}} = A + \frac{mk^2}{L^2}$ และ $\frac{1}{r_{max}} = -A + \frac{mk^2}{L^2}$

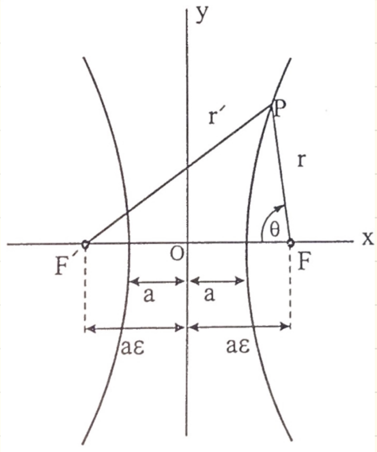


$r_{max} =$

$r_{min} =$

Hyperbola

นิยามของไฮเพอร์โบลา $r' - r =$ คงที่

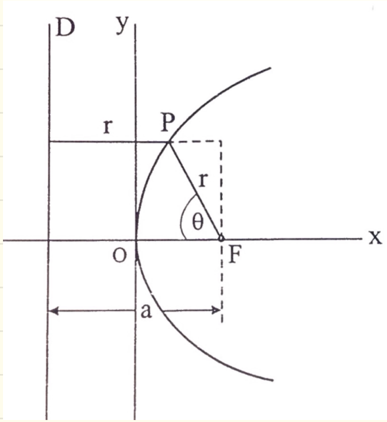


เมื่อ P อยู่ที่ตำแหน่งจุดยอดของไฮเพอร์โบลา จะได้

ถ้าพิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งทางซ้ายมือ จะได้ว่า

ในที่สุด จะได้

Parabola



นิยามของพาราโบลา D ≡ ไดเรคตริกซ์ (directrix)

กฎของเคปเลอร์ [Kepler's law]

1. Law of Ellipse (ค.ศ. 1609)

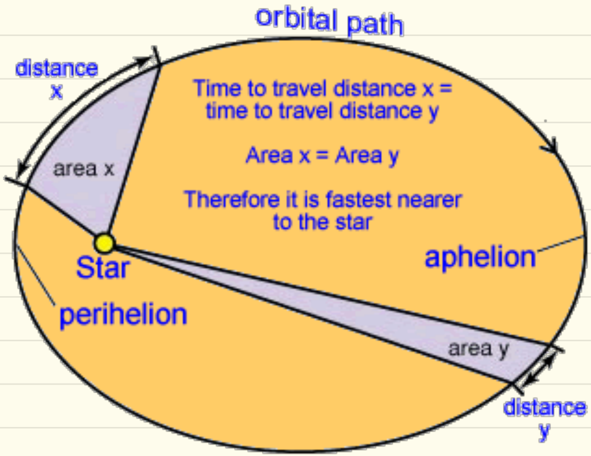
ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสอันหนึ่ง

2. Law of Equal Area (ค.ศ. 1609)

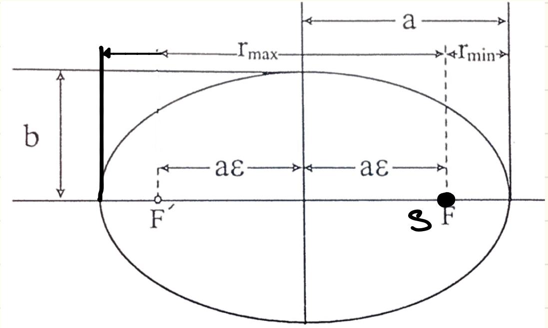
ขณะที่ดาวเคราะห์เคลื่อนที่รอบดวงอาทิตย์ เส้นที่ลากระหว่างดวงอาทิตย์ถึงดาวเคราะห์ จะกวาดพื้นที่ได้เท่ากันในเวลาที่เท่ากัน

3. Harmonic Law (ค.ศ. 1618)

คาบในการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ยกกำลังสอง จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ a^3



กฎข้อที่ 1 [Law of Ellipse]



$r_{max} =$

$r_{min} =$

	ดาวเคราะห์	ดาวเทียม
$r_{min} \rightarrow$	perihelion	perigee
$r_{max} \rightarrow$	aphelion	apogee

ตัวอย่าง โลก $\varepsilon = 0.017$

$r_{min} = 91$ ล้านไมล์

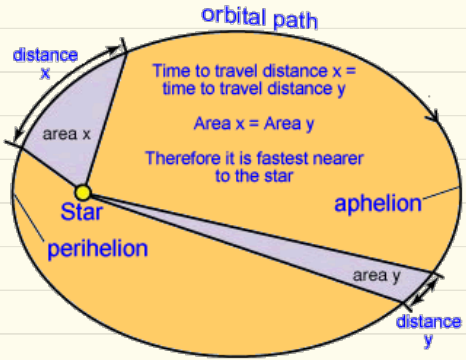
$r_{max} = 95$ ล้านไมล์

} เกือบเป็นวงกลม

ดาวหาง Halley $\varepsilon = 0.967$

$r_{min} = 55$ ล้านไมล์

$r_{max} = 3278$ ล้านไมล์



Application

จาก $\frac{1}{r_{min}} = \frac{mk}{L^2}(1+\varepsilon)$

$\varepsilon =$

ให้ $v_0 \equiv$ ความเร็วของดาวเทียม ณ r_{min}

จากหลักการคงตัวของ L , $L = mr^2\dot{\theta} =$

$\varepsilon =$

ถ้าให้ $v_c \equiv$ ความเร็วขณะเคลื่อนที่เป็นวงกลม

$$v_c^2 = \frac{k}{mr_{min}}$$

$\varepsilon =$

จาก $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos\theta}$

EX 3-3 ดาวเทียมเคลื่อนที่รอบโลกเป็นวงกลมรัศมี r_0 เมื่อมอเตอร์จรวดจุดระเบิด ทำให้อัตราเร็วของดาวเทียมเพิ่ม 15% จงหาสมการของวงโคจรใหม่ และหาระยะ Apogee

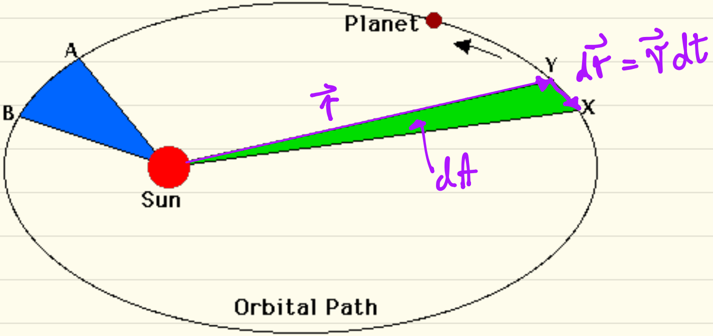
$v_c \equiv$ อัตราเร็วเมื่อเป็นวงกลม

$v_0 \equiv$ อัตราเร็วใหม่

$$\frac{v_0}{v_c} =$$

กฎข้อที่ 2 [Law of Equal Area]

จาก Conservation of angular momentum → $L =$



กฎข้อที่ 3 [Harmonic Law]

จาก $\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

เวลาของการกวาดพื้นที่ทั้งหมดของวงรี คือ คาบเวลา T ดังนั้น

$\int_0^T dt =$ พื้นที่ของวงรี $A = \pi ab$ จาก $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$T =$

$2a = r_{min} + r_{max} =$

$T^2 =$ $k = GmM$

การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์เป็นปัญหาของระบบที่มี 2 วัตถุ ไม่ใช่ปัญหาของระบบที่มีวัตถุเดียว
ดังนั้น $m \rightarrow$ reduced mass

$T^2 =$

EX3-4 จงหามวลของดวงอาทิตย์ ระยะทางจากโลก → ดวงอาทิตย์ 1.496×10^{11} m

คาบของโลกรอบดวงอาทิตย์ 3.156×10^{7} s

Ex 3-5 ดาวเทียมมวล 2,500 kg เคลื่อนเป็นวงรีรอบโลก ระยะ Altitude ของ apogee เป็น 3,600 km และ perigee เป็น 1,100 km จงหาพลังงาน (E) และ angular momentum (L) ของดาวเทียมนี้ และอัตราเร็ว v_a และ v_p ณ ตำแหน่ง apogee และ perigee

หาค่า L จาก $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2}$

$$L = \left[\frac{mk^2}{2E}(\varepsilon^2 - 1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} =$$

$$L =$$

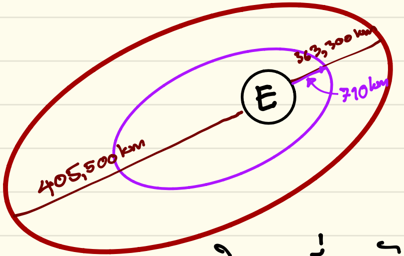
หา v_a และ v_d จาก $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r}$

จาก $L = mvr$ = constant

$$m r_a v_a = m r_p v_p$$

หา v_p โดยใช้วิธีเดียวกัน หรือ

EX 3-6 ระยะทางที่ดวงจันทร์อยู่ห่างจากโลกใกล้สุด และไกลสุดเท่ากับ 363,300 km และ 405,500 km คาบการโคจรรอบโลก 27.3 วัน ดาวเทียมที่มีความรีของวงโคจรเท่าดวงจันทร์ โคจรรอบโลกใกล้โลกที่สุด 710 km ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลางของโลกเป็น 12,800 km จงหาคาบของดาวเทียม



จาก $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$

$T_s^2 =$

$T_m^2 =$

$\frac{T_s^2}{T_m^2} =$

และ $\varepsilon_s = \varepsilon_m$

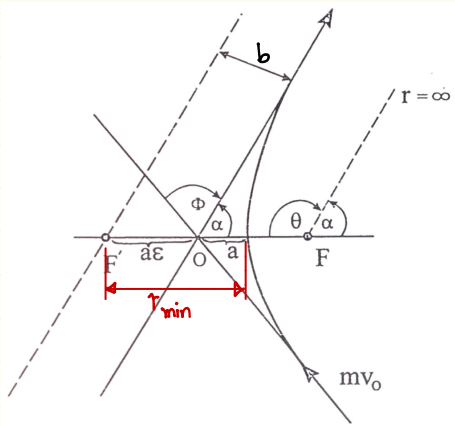
พิจารณาที่ดวงจันทร์

$$\varepsilon_m = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

พิจารณาดาวเทียม :

$a_s =$

วงโคจรที่เป็นไฮเพอร์โบลา [ปัญหาของ Rutherford]

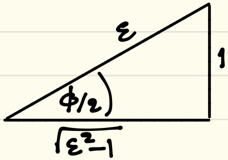


$\phi \equiv$ scattering angle : $\phi = \pi - 2\alpha$

$b \equiv$ impact parameter

สมการของวงโคจรไฮเพอร์โบลา $r = \dfrac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon\cos\theta}$

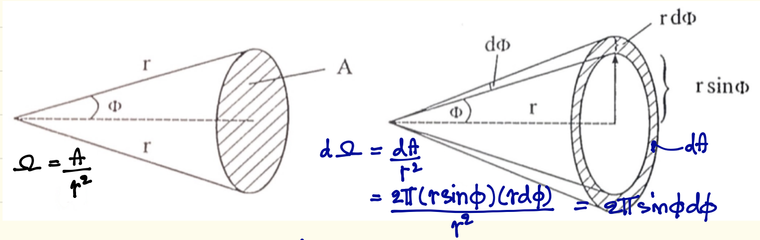
จาก $\phi = \pi - 2\alpha \Rightarrow$



$$\cot\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{2EL^2}{mk^2}} \qquad \text{เมื่อ} \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 \; ; \quad L = mv_0 b$$

$$\cot\frac{\phi}{2} =$$

$$b =$$



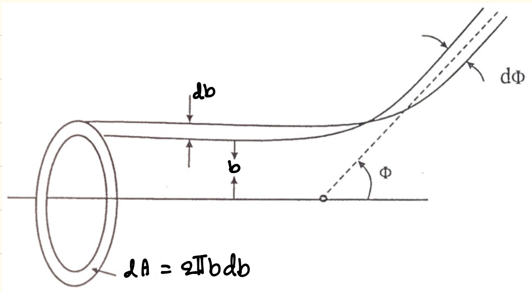
การทดลองเรื่องการกระเจิง

N ≡ จำนวนอนุภาคที่ผ่านหนึ่งหน่วยพื้นที่ที่ตั้งฉากกับทิศของลำอนุภาคในหนึ่งหน่วยเวลา

$\sigma(\phi)$ ≡ ภาคตัดขวางของการกระเจิงเชิงอนุพันธ์ [differential scattering cross section]

≡ จำนวนอนุภาคที่กระเจิงในหนึ่งหน่วย solid angle (Ω) ในหนึ่งหน่วยเวลา

$\sigma(\phi)d\Omega$ ≡ จำนวนอนุภาคที่กระเจิงเข้าไปในมุมตัน $d\Omega$ ในหนึ่งหน่วยเวลา



จำนวนอนุภาคที่กระเจิงไปในมุมตัน $d\Omega$ ($\phi \to \phi + d\phi$) เท่ากับ
จำนวนอนุภาคตกกระทบที่มี b ระหว่าง $b \to b + db$

$$[\sigma(\phi)d\Omega]N =$$

$$\sigma(\phi)2\pi\sin\phi\, d\phi =$$

$$\sigma(\phi) = -\frac{b}{\sin\phi}\frac{db}{d\phi} \quad \text{—— } ①$$

ปัญหาในเรื่องนี้ อนุภาคกระเจิงได้เนื่องจากแรงคูลอมบ์ [Coulomb force]

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} =$$

จาก $b = \frac{|k|}{m v_0^2} \cot\frac{\phi}{2}$

$q_1 \equiv$ อนุภาคแอลฟา ($q_1 = 2e$)
$q_2 \equiv$ ประจุของนิวเคลียสเป้า ($q_2 = Ze$)

ระยะทางที่อนุภาคแอลฟาเข้าใกล้นิวเคลียสมากที่สุด
$r \to$ สั้นที่สุดเมื่อ

$r_{min} =$

$r_{min} =$

$r_{min} =$