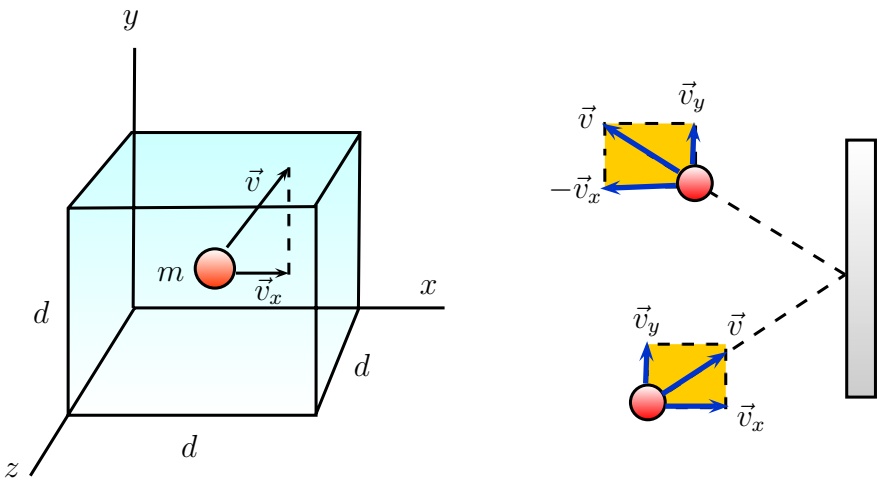
ฟิสิกส์ทั่วไป 1

General Physics I



ดร. ศรีประจักร์ ครองสุข

ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยขอนแก่น

คำนำ

เนื้อหาในตำราเล่มนี้ผู้เขียนได้จัดทำขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์หลักก็เพื่อใช้ในประกอบการเรียนการสอนในวิชา315 102 General Physics I สำหรับนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์และคณะศึกษาศาสตร์ชั้นปีที่ 1 เนื้อหาในตำราเล่มนี้ส่วนใหญ่จะอ้างอิงจากตำราภาษาอังกฤษ ซึ่งได้มีการอธิบายหลักการต่าง ๆทางฟิสิกส์ รวมทั้งโจทย์ตัวอย่างได้อย่างชัดเจนและเข้าใจง่าย ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ผู้เขียนมีความพยายามที่จะทำตำราเล่มนี้ขึ้นมาโดยทำการจัดวางลำดับของเนื้อหาให้มีความสัมพันธ์และสอดคล้องกับตำราภาษาอังกฤษที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย โดยมุ่งหวังให้นักศึกษาได้สามารถเรียนรู้เพิ่มเติมจากเนื้อหาที่สอนในชั้นเรียนและมีทักษะในการคิดวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหาอย่างเป็นระบบ

สำหรับตำราเล่มนี้ผู้เขียนก็หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะเกิดประโยชน์ต่อนักเรียนนักศึกษาหรือผู้ที่สนใจวิชาฟิสิกส์ทั่วไปไม่มากก็น้อย ในการทำงานใด ๆ ย่อยมีข้อผิดพลาดเกิดบ้างเป็นธรรมดาเช่นเดียวกันในสำหรับตำราเล่มนี้ก็อาจจะมีข้อบกพร่องได้เสมอ ดังนั้นผู้เขียนเองขอน้อมรับคำติชมและข้อแนะนำที่เป็นเป็นโยชน์จากผู้อ่านทุกท่านเพื่อจะได้นำไปปรับปรุงเนื้อหาให้ดียิ่งขึ้นในโอกาสต่อไป ผู้เขียนต้องขอขอบคุณทีมงานที่พัฒนาโปรแกรม LaTeX 2_εและ LatexDraw ที่ช่วยทำให้ตำราเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ในการพิมพ์ครั้งนี้ ได้รับทุนสนับสนุนจากกองทุนพัฒนาและส่งเสริมด้านวิชาการ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ผู้เขียนจึงใคร่ขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

ดร. ศรีประจักร์ ครองสุข
ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น
สิงหาคม 2552

สารบัญ

คำนำ i

สารบัญ i

1 บทนำ 1

1.1 ความสำคัญของวิชาฟิสิกส์ 1

1.2 ฟิสิกส์กับการวัด 2

1.2.1 เลขนัยสำคัญ 2

1.2.2 การวิเคราะห์เชิงไดเมนชันส์ 3

1.2.3 หน่วย (unit) 4

1.3 แคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับฟิสิกส์ 5

1.3.1 อนุพันธ์ (derivative) 5

1.3.2 อินทิกรัล (integral) 7

1.4 แบบฝึกหัด 10

2 การเคลื่อนที่แบบ 1 และ 2 มิติ 13

2.1 เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์ 13

2.1.1 สมบัติของเวกเตอร์ 13

2.1.2 การคูณของสองเวกเตอร์ 19

2.2 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติ 20

2.2.1 การกระจัด (Displacement) 20

2.2.2 ความเร็ว (Velocity) 21
2.2.3 ความเร่ง (Acceleration) 24
2.2.4 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว 26
2.2.5 การตกอย่างอิสระของวัตถุ 28
2.3 การเคลื่อนที่แบบ 2 มิติ 31
2.3.1 การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง 31
2.3.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ 32
2.3.3 การเคลื่อนที่แบบวงกลม 37
2.3.4 ความเร็วสัมพัทธ์ 38
2.4 แบบฝึกหัด 40

3 แรงและกฎการเคลื่อนที่ 43
3.1 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน 43
3.1.1 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน 43
3.1.2 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน 44
3.1.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน 46
3.2 แรงเสียดทาน (Forces of Friction) 50
3.3 แรงและการเคลื่อนที่เป็นวงกลม 54
3.3.1 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ 54
3.3.2 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วไม่คงที่ 55
3.4 แบบฝึกหัด 59

4 งานและพลังงาน 65
4.1 งานที่ทำโดยแรงคงที่ 65
4.2 งานที่ทำโดยแรงไม่คงที่ 67
4.2.1 งานที่ทำโดยแรงดึงกลับของสปริง 68
4.3 พลังงานจลน์และทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ 69
4.4 งานเนื่องจากแรงเสียดทาน 70

4.5 กำลัง 73
4.6 พลังงานศักย์ 75
4.6.1 พลังงานศักย์โน้มถ่วง 76
4.6.2 พลังงานศักย์ยืดหยุ่น 76
4.7 การอนุรักษ์ของพลังงานเชิงกล 76
4.8 งานที่ทำโดยแรงที่ไม่อนุรักษ์ 77
4.9 แบบฝึกหัด 83

5 โมเมนตัมเชิงเส้นและการชน 87
5.1 โมเมนตัมเชิงเส้น 87
5.2 การคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น 87
5.3 การดลและโมเมนตัม 89
5.4 การชนแบบยืดหยุ่น 90
5.5 การชนแบบไม่ยืดหยุ่น 91
5.6 การชนแบบ 2 มิติ 93
5.7 จุดศูนย์กลางมวล 95
5.8 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค 98
5.9 แบบฝึกหัด 99

6 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง 103
6.1 ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม 103
6.2 การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ 105
6.3 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเชิงมุมและปริมาณเชิงเส้น 106
6.4 พลังงานจลน์ของการหมุน 107
6.5 การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย 109
6.6 ทอร์ค 113
6.7 งาน พลังงานและกำลังงานสำหรับการหมุน 117
6.8 การเคลื่อนที่แบบกลิ้ง 119

6.9 โมเมนตัมเชิงมุมและการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม 122
6.9.1 โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค 122
6.9.2 โมเมนตัมเชิงมุมของการหมุนวัตถุแข็งเกร็ง 123
6.9.3 การคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม 124
6.10 การเคลื่อนที่แบบไจโรสโคป (gyroscope motion) 127
6.11 สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง 128
6.12 แบบฝึกหัด 132

7 การเคลื่อนที่แบบออสซิลเลต 137
7.1 การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ 137
7.1.1 ความเร็ว และความเร่งของการเคลื่อนที่แบบ SHM 139
7.1.2 ความถี่เชิงมุมของการสั่นแบบ SHM 140
7.2 พลังงานของการออสซิลเลตแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ 142
7.3 การประยุกต์การเคลื่อนที่แบบ SHM 144
7.3.1 ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย 144
7.3.2 ลูกตุ้มฟิสิคัล (physical pendulum) 146
7.3.3 Torsional Pendulum 147
7.4 การออสซิลเลตแบบมีความหน่วง 147
7.5 การออสซิลเลตเมื่อมีแรงกระทำ (forced oscillations) 151
7.6 แบบฝึกหัด 154

8 กลศาสตร์ของไหล 157
8.1 ความดันและความหนาแน่น 157
8.1.1 ความดัน (Pressure) 157
8.1.2 ความหนาแน่น (Density) 158
8.2 ความดันที่ขึ้นอยู่กับความลึก 158
8.3 การวัดความดัน 161
8.4 แรงลอยตัวและหลักของอาร์คีมีดีส 163

8.5 พลวัติของไหลและสมการความต่อเนื่อง 166
8.5.1 สายกระแส 167
8.5.2 สมการความต่อเนื่อง 167
8.6 สมการแบร์นูลลี 168
8.7 แรงยกขึ้นที่ปีกเครื่องบิน 171
8.8 แบบฝึกหัด 173

9 เทอร์โมไดนามิกส์ 177
9.1 อุณหภูมิและกฎข้อที่ศูนย์ของเทอร์โมไดนามิกส์ 177
9.2 การขยายตัวเชิงความร้อน 178
9.3 การบรรยายในระดับมหภาคเกี่ยวกับกาซอุดมคติ (ideal gas) 179
9.4 ความร้อนและพลังงานภายใน 181
9.4.1 ความจุความร้อน 182
9.4.2 ความร้อนแฝง 182
9.5 งานและความร้อนในกระบวนการเทอร์โมไดนามิกส์ 186
9.6 กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ 187
9.7 กลไกการขนส่งพลังงาน (energy transfer mechanism) 191
9.7.1 การนำความร้อน (thermal conduction) 191
9.7.2 การพาความร้อน (convection) 194
9.7.3 การแผ่รังสี (radiation) 194
9.8 ทฤษฎีจลน์ของกาซ 195
9.8.1 แบบจำลองของกาซอุดมคติ 195
9.8.2 ความดันของกาซที่บรรจุในภาชนะลูกบาศก์ 196
9.8.3 การแปลความหมายในเชิงโมเลกุลของอุณหภูมิ 198
9.9 ความร้อนจำเพาะโมลาร์ของกาซอุดมคติ 199
9.10 กระบวนการ Adiabatic สำหรับกาซอุดมคติ 201
9.11 วิถีอิสระเฉลี่ย (mean free path) 203

9.12 เครื่องจักรความร้อนและกฎข้อที่สองของเทอร์โมไดนามิกส์ 205
9.12.1 เครื่องทำความเย็น 206
9.13 วัฏจักรคาร์โนท์ 207
9.14 เอนโทรปีและกฎข้อที่ 2 ของเทอร์โมไดนามิกส์ 210
9.15 แบบฝึกหัด 211

ก ค่าคงที่ทางฟิสิกส์ 215

ข ตัวย่อและสัญลักษณ์สากลสำหรับหน่วยวัด 217

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญของวิชาฟิสิกส์

วิชาฟิสิกส์ (physics) เป็นสาขาหนึ่งทางด้านวิทยาศาสตร์กายภาพ (physical science) ที่ศึกษาปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ โดยใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือสำหรับการวิเคราะห์และปรากฏการณ์หลาย ๆอย่างเหล่านี้สามารถเขียนอธิบายในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ ยกตัวอย่าง เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน กฎแห่งความโน้มถ่วง หลักการคงตัวของพลังงาน สมการคลื่นแม่เหล็ไฟฟ้า เป็นต้น ฟิสิกส์มีความสำคัญและมีบทบาทอย่างมากต่อวิทยาศาสตร์สาขาอื่น ๆทั้งที่เป็นวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ (pure science) และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ (applied science) หรือเทคโนโลยี (technology)

ในด้านวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ ฟิสิกส์มีบทบาทสำคัญต่อวิชาเคมีและชีววิทยามาก เพราะว่าสสาร (matter) ประกอบด้วยกลุ่มก้อนของอนุภาคที่เรียกว่าอะตอม (atom) และโมเลกุล (molecule) และอนุภาคเหล่านั้นก็จะมีแรงยึดจับกันทำให้เกิดการก่อตัวเป็นรูปร่างที่มีขนาดในการเปลี่ยนแปลงของโครงสร้างโมลกุลหนึ่งไปเป็นอีกโครงสร้างของโมเลกุลอีกชนิดหนึ่งหรือกระบวนต่าง ๆที่เกิดขึ้นในสิ่งมีชีวิต เช่น กระบวนการสังเคราะห์แสงของพืช การทำงานของระบบประสาท การมองเห็นของตา เป็นต้น สิ่งเหล่านี้ล้วนจำเป็นต้องอาศัยองค์ความรู้ของวิชาฟิสิกส์เป็นพื้นฐานในการอธิบาย

สำหรับบทบาทของวิชาฟิสิกส์ในด้านวิทยาศาสตร์ประยุกต์และเทคโนโลยีนั้น จะเห็นว่าในปัจจุบันมีการประดิษฐ์เครื่องมือและอุปกรณ์ต่าง ๆที่ทันสมัยและช่วยอำนวยความสะดวกให้กับมนุษยศาสตร์ได้ดำรงชีวิตอยู่อย่างมีความสุขและปลอดภัย ยกตัวอย่างเช่น

- **ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์** อาศัยเครื่องมือและทฤษฎีต่าง ๆทางฟิสิกส์ เพื่อศึกษาหาวัสดุที่เหมาะสมในการก่อสร้าง และโครงสร้างของสิ่งก่อสร้าง

- **ทางด้านแพทยศาสตร์** อาศัยเครื่องมือและทฤษฎีต่าง ๆทางฟิสิกส์ในการวินิจฉัย และรักษาโรค เช่น การใช้กัมมันตภาพรังสีในการวินิจฉัยและรักษาโรคบางชนิด การใช้แสงเลเซอร์ในการผ่าตัดเฉพาะที่
- **ทางด้านธรณีวิทยา** อาศัยเครื่องมือและทฤษฎีต่าง ๆทางฟิสิกส์ในการสำรวจแหล่งน้ำ น้ำมัน และโครงสร้างของชั้นต่าง ๆของเปลือกโลก

ในความเป็นจริงยังมีอีกหลากหลายสาขาวิชาที่จำเป็นต้องใช้พื้นฐานของวิชาฟิสิกส์เป็นหลัก ดังนั้นการเรียนวิชาฟิสิกส์จึงมีความจำเป็นอย่างมากสำหรับนักเรียนและนักศึกษาทั้งสาขาทางด้านวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี

1.2 ฟิสิกส์กับการวัด

ในการทดลองทางวิทยาศาสตร์จำเป็นต้องมีการวัดปริมาณต่าง ๆด้วยเครื่องมือ ปริมาณบางอย่างอาจมีเครื่องวัดได้โดยตรงเช่น ระยะทาง เวลา กระแสไฟฟ้า เป็นต้น แต่ก็มีปริมาณบางอย่างที่ไม่สามารถวัดได้โดยตรงด้วยเครื่อง จะต้องคำนวณจากปริมาณต่าง ๆที่วัดได้ เช่น โมเมนตัม พลังงานจลน์ การวัดแต่ละอย่าง ผลของการวัดย่อมมีความไม่แน่นอนเกิดขึ้นเสมอ เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนของการวัด (error of measurements) ซึ่งจำแนกได้สามประเภทดังนี้

1. **ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากสะเพร่า (gross errors)** เกิดจากตัวผู้ทำการทดลองเองที่ไม่รอบครอบ บันทึกผิดพลาด การอ่านค่าผิด
2. **ความคลาดเคลื่อนของเครื่องมือ (systematic errors)** เกิดจากความผิดพลาดของเครื่องมือ เช่น สเกลที่อ่านค่ามีความคลาดเคลื่อน ทำให้ข้อมูลที่บันทึกมีความคลาดเคลื่อนไปทั้งระบบ อย่างไรก็เราสามารถแก้ไขได้ด้วยการปรับระบบสเกลที่เครื่องมือ
3. **ความคลาดเคลื่อนที่ไม่รู้สาเหตุ (random errors)** เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากสาเหตุภายนอกที่ไม่สามารถควบคุมได้ซึ่งมีผลต่อเครื่องมือและผู้ทำการทดลองสำหรับความคลาดเคลื่อนนี้เราสามารถจัดการได้ด้วยการใช้วิธีการางสถิติ

1.2.1 เลขนัยสำคัญ

ในการบันทึกข้อมูลเชิงตัวเลขของปริมาณต่าง ๆที่วัดโดยเครื่องมือจะต้องคำนึงถึงความละเอียดของเครื่องมือที่ทำการวัดและตัวเลขที่บันทึกจะต้องสื่อความหมายอย่างมีนัยสำคัญ เช่น ต้องการ

วัดพื้นที่สี่เหลี่ยมของแผ่นแก้วอันหนึ่งโดยใช้ตลับเมตร สมมติว่าความแม่นยำ (accuracy) ในการวัดด้วยเครื่องมือนี้คือ ± 0.1 cm ถ้าวัดความยาวของแผ่นแก้วได้ 5.5 cm เราสามารถอ้างได้ว่าความยาวของแผ่นแก้วนี้มีค่าอยู่ระหว่าง 5.4 และ 5.6 cm ในกรณีนี้เรากล่าวได้ว่าค่าที่วัดได้มีเลขนัยสำคัญ (significant figure) 2 ตัว ในทำนองเดียวกัน ในการวัดความกว้างของมัน ค่าที่ได้คือ 6.4 ดังนั้นค่าจริงจะอยู่ระหว่างค่า 6.3 และ 6.5 cm ข้อสังเกตุตัวเลขนัยสำคัญจะรวมตัวเลขที่ได้จากการกะประมาณลำดับแรก ดังนั้นเราสามารถเขียนค่าที่ทำการวัดได้ดังนี้5.5 ± 0.1 cm และ 6.4 ± 0.1 cm เมื่อทำการคำนวณหาพื้นที่เราจะได้ (5.5) cm(6.4) cm $= 35.2$ cm^2 จะเห็นว่าคำตอบนี้ไม่น่าเชื่อถือ เนื่องจากค่าที่ได้จำนวนตัวเลขนัยสำคัญ 3 ตัว ซึ่งมากกว่าเลขนัยสำคัญของแต่ละตัวที่นำมาคูณ ดังนั้นในการหาจำนวนตัวเลขนัยสำคัญจึงมีกฎดังนี้คือ *เมื่อทำการคูณหลาย ๆปริมาณ จำนวนตัวเลขนัยสำคัญของคำตอบสุดท้ายจะต้องเท่ากับจำนวนเลขนัยสำคัญที่น้อยที่สุดของปริมาณที่นำมาคูณ และกฎเดียวกันนี้สามารถนำไปใช้กับการหาร* จากกฎดังกล่าวทำให้เราได้คำตอบสุดท้ายว่า พื้นที่ของแผ่นแก้วมีค่าเป็น 35 cm^2 ซึ่งค่าจริงอาจจะอยู่ระหว่าง 34 และ 36 cm^2 ก็ได้

ตัวเลขศูนย์อาจจะเป็นหรือไม่เป็นเลขนัยสำคัญก็ได้ขึ้นอยู่ตำแหน่งของมัน เช่น เลขศูนย์ที่ใช้ในการระบุเลขทศนิยม 0.03 และ 0.0075 ไม่มีนัยสำคัญ ดังนั้นทั้งสองจำนวนจึงมีเลขนัยสำคัญเป็น 1 และ 2 ตัว ตามลำดับ อย่างไรก็ตาม เลขศูนย์ที่ตามหลังเลขอื่น ๆอาจจะมีค่ากำกวนในการพิจารณาเลขนัยสำคัญเช่น มวลวัตถุวัดได้ 1500 g จะเห็นว่าเราไม่รู้ว่าเลขศูนย์สองตัวสุดท้ายมีนัยสำคัญในการวัดครั้งนี้หรือไม่ เพื่อแก้ปัญหานี้เราควรเขียนตัวเลขในแบบวิทยาศาสตร์ (scientific notation) ดังนี้คือ 1.5×10^3 g ในกรณีนี้จะมีเลขนัยสำคัญ 2 ตัว หรือ 1.50×10^3 g จะมีเลขนัยสำคัญ 3 ตัว เป็นต้น

สำหรับการบวกหรือลบ จำนวนตำแหน่งเลขทศนิยมของผลลัพธ์จะเท่ากับจำนวนตำแหน่งเลขทศนิยมที่น้อยที่สุดของตัวเลขใด ๆที่นำมารวมกัน เช่น เราต้องการคำนวณ $123 + 5.35$ ผลลัพธ์ที่ได้จะต้องเท่ากับ 128 ไม่ใช่ 128.35 หรือ $1.0001 + 0.0003$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ 1.0004 ทำนองเดียวกันสำหรับการลบเช่น $1.002 - 0.998 = 0.004$

1.2.2 การวิเคราะห์เชิงไดเมนชันส์

โดยทั่วไปปริมาณที่จะนำมาบวกหรือลบกันได้นั้นจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขสองประการ คือ ประการแรกต้องเป็นปริมาณประเภทเดียวกัน ประการที่สองต้องมีหน่วยของการวัดเป็นหน่วนเดียวกัน ตัวบ่งชี้ว่าปริมาณนั้นเป็นประเภทเดียวกันหรือไม่นั้น เรียกว่า *ไดเมนชันส์ (dimensions)* การวิเคราะห์ไดเมนชันส์มีความสำคัญอย่างมากในการศึกษาวิชาฟิสิกส์ในการชี้นำในการแก้ปัญหาในการวิเคราะห์ไดเมนชันส์ เราเริ่มด้วยการกำหนดสัญลักษณ์ของปริมาณพื้นฐาน ได้แก่ ไดเมนชันส์ของความยาวเป็น L ไดเมนชันส์ของเวลาเป็น T ไดเมนชันส์ของมวลเป็น M เป็นต้น ดังนั้นในการวัดความเร็วซึ่งมีนิยามเป็นอัตราส่วนของระยะทางต่อเวลา

นั่นคือ ความเร็วมีไดเมนชันส์เป็น LT^{-1} ความเร่งคือความเร็วหารด้วยเวลา มีไดเมนชันส์เป็น LT^{-2} และแรงคือผลคูณของมวลกับความเร่ง มีไดเมนชันส์เป็น MLT^{-2} ถ้าปริมาณใดมีไดเมนชันส์เป็น 1 เช่น LL^{-1} กล่าวได้ว่าปริมาณนั้นไม่มีไดเมนชันส์ (dimensionless)

ตัวอย่างที่ 1 สมมติว่าเราทราบความเร่ง a ของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ v เป็นวงกลมรัศมี r เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ r^n และกับค่า v^m จงหาค่าของ n และ m
วิธีทำ สมมติว่าเรากำหนดให้

$$a = kr^n v^m$$

เมื่อ k คือค่าคงที่ไม่มีไดเมนชันส์ เนื่องจากเราทราบไดเมนชันส์ของ a, r และ v ดังนั้นเราสามารถวิเคราะห์หาค่า n และ m จากสมการของไดเมนชันส์ได้ดังนี้

$$\mathrm{L/T}^2 = \mathrm{L}^n(\mathrm{L/T})^m = \mathrm{L}^{n+m}/\mathrm{T}^m$$

ไดเมนชันส์ของทั้งสองข้างต้องเหมือนกันโดยเงื่อนไขที่ $n+m=1$ และ $m=2$ ดังนั้นเราจะได้ $n=-1$ และเราสารถเขียนสมการของความเร่งได้เป็น

$$a = kr^{-1}v^2 = k\frac{v^2}{r}$$

1.2.3 หน่วย (unit)

หน่วยเป็นสิ่งที่บอกให้รู้ว่าปริมาณที่ทำการวัดนั้นคืออะไรและวัดในระบบมาตราไหน เช่น ระยะทางอาจวัดในหน่วยเมตร (metre, m) หรือวัดในหน่วยกิโลเมตร (kilometre, km) ดังนั้นในการวิเคราะห์ข้อมูลจะต้องคำนึงถึงหน่วยที่วัดด้วยว่าปริมาณเหล่านั้นถูกวัดในมาตราเดียวกันหรือไม่ สำหรับมาตราที่ถือว่าเป็นหน่วยพื้นฐานของการวัดปริมาณทางฟิสิกส์ในระบบหน่วยสากล หรือที่เรียกว่า ระบบ SI (The International System of Units) มีอยู่ 7 อย่างดังนี้คือ

1. **หน่วยวินาที (second, s)** ใช้ในการวัดเวลา
2. **หน่วยเมตร (metre, m)** ใช้วัดระยะทาง
3. **หน่วยกิโลกรัม (kilogram, kg)** ใช้วัดมวล
4. **หน่วยแอมแปร์ (ampere, A)** ใช้วัดปริมาณกระแสไฟฟ้า
5. **หน่วยเคลวิน (kelvin, K)** ใช้วัดอุณหภูมิ

6. **หน่วยโมล (mole, mol)** ใช้วัดปริมาณของเนื้อสารที่มีชิ้นส่วนย่อยเท่ากับจำนวนอะตอมของคาร์บอน-12 ที่มีมวลรวมเท่ากับ 0.012 กิโลกรัม

7. **หน่วยแคนเดลา (candela, cd)** ใช้วัดความเข้มของแสง

หน่วยของปริมาณอื่น ๆสามารถเขียนในเทอมของหน่วยพื้นฐานเหล่านี้ได้เสมอ เช่น หน่วยของการวัดปริมาณของแรงคือ นิวตัน (N) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในหน่วยพื้นฐานได้เป็น $\mathrm{kg.m/s^2}$

1.3 แคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับฟิสิกส์

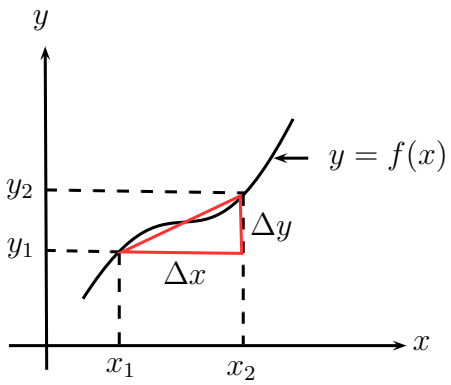
จุดสำคัญของคณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์อยู่ที่การวิเคราะห์อัตราการการแปรผันระหว่างตัวแปร จำนวนตัวแปรอาจเป็นคู่หนึ่งหรืออาจจะเป็นหลาย ๆตัวแปรก็ได้ซึ่งขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของปัญหา หลายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์หรือศาสตร์อื่น ๆมักจะบรรยายความเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งว่าจะเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่ออีกตัวแปรหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลง เช่น วัตถุที่เคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรง ตำแหน่งของวัตถุนั้นจะเปลี่ยนแปลงอย่างไรกับเวลา พลังงานจลน์ของวัตถุจะเปลี่ยนแปลงอย่างไรกับตำแหน่ง สนามแม่เหล็กจะเปลี่ยนไปกับเวลาอย่างไร เป็นต้น จะเห็นได้ว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญมากสำหรับการวิเคราะห์กฎเกณฑ์ทางธรรมชาติ เราจะเห็นว่าในอดีตที่ผ่านมาจนกระทั่งมาถึงยุคปัจจุบันนี้ นักฟิสิกส์ที่เก่ง ๆ และประสบความสำเร็จทั้งในด้านการทดลองและในด้านทฤษฎีนั้น ท่านทั้งหลายนั้นล้วนมีพื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์ที่ยอดเยี่ยมมาก

1.3.1 อนุพันธ์ (derivative)

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรคือ y และ x โดยที่ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตามหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ค่าของตัวแปร y ขึ้นอยู่กับตัวแปร x ในทางคณิตศาสาตร์ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$ เมื่อ f แทนฟังก์ชันใด ๆก็ได้ที่มีค่า x ปรากฏอยู่ในสมการ เช่น $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ หรือ $y = f(x) = \sin(x)$ เป็นต้น ดังนั้นในการหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x มีนิยามดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

จากรูปที่ 1.1 เมื่อ $\Delta x = x_2 - x_1$ และ $\Delta y = y_2 - y_1$ สิ่งสำคัญที่ต้องทำความเข้าใจคือว่า dy/dx ไม่ใช่อัตราส่วนระหว่างค่า dy กับ dx แต่มีความหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ



รูปที่ 1.1: การหาค่าอนุพันธ์ของตัวแปร y เทียบกับ ตัวแปร x

y เทียบกับ x เมื่อขนาดของ Δx มีค่าเข้าใกล้ศูนย์นั่นเองจากรูปเราจะเห็นว่าค่า dy/dx ก็คือค่าความชัน (slope) ของกราฟระหว่างจุดสองจุดนั่นเอง และถ้าเราทำการลดขนาดของ Δx ให้น้อยลงมาก ๆจนถือได้ว่าจุดสองจุดเกือบจะทับกันพอดี ดังนั้นค่า dy/dx ก็คือค่าความชันของกราฟที่จุดนั้น

สมบัติพิเศษของอนุพันธ์

- **อนุพันธ์ของผลคูณของสองฟังก์ชัน** ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นผลคูณของฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ แล้วอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเป็นดังนี้

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g(x)\frac{dh(x)}{dx} + h(x)\frac{dg(x)}{dx} \tag{1.2}$$

- **อนุพันธ์ของผลบวกของสองฟังก์ชัน** ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นผลบวกของฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ แล้วอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเป็นดังนี้

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx} \tag{1.3}$$

- **กฎลูกโซ่ (chain rule) ของอนุพันธ์** ถ้า $y = f(x)$ และ $x = g(z)$ แล้วค่าอนุพันธ์ของ dy/dz สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของสองอนุพันธ์ดังนี้

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} \tag{1.4}$$

- **การหาอนุพันธ์ลำดับที่สอง (the second derivative)** อนุพันธ์ลำดับที่สองของ y เทียบกับ x มีค่าเป็นดังนี้

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1.5}$$

จากสมบัติดังกล่าวของอนุพันธ์ ทำให้เราสามารถสร้างตารางของสูตรมาตรฐานสำหรับการหาค่าอนุพันธ์ได้ดังแสดงในตารางที่ 1.1

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ดังนี้

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

วิธีทำ โดยการใช้สูตรมาตราฐานที่แสดงในตารางที่ 1.1 จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(8x^5 + 4x^3 + 2x + 7) = 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0$$
$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 + 12x^2 + 2$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าอนุพันธ์ของ $y(x) = x^3/(x+1)^2$ เทียบกับ x

วิธีทำ เราสามารถเขียนฟังก์ชันของ $y(x) = x^3(x+1)^{-2}$ จากนั้นทำการประยุกต์ใช้สมบัติของการหาอนุพันธ์ผลคูณของสองฟังก์ชันตามสมการ 1.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x+1)^{-2}\frac{d}{dx}(x^3) + x^3\frac{d}{dx}(x+1)^{-2} \\ &= (x+1)^{-2}3x^2 + x^3(-2)(x+1)^{-1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

1.3.2 อินทิกรัล (integral)

ให้ $y(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเราไม่ทราบรูปร่างว่าเป็นอย่างไร แต่เราทราบว่าอนุพันธ์ของมันคือ $dy/dx = g(x)$ ซึ่งในที่นี้เรารู้รูปร่างของฟังก์ชัน $g(x)$ จากข้อกำหนดนี้ถ้าต้องการรู้ว่าฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นรูปใดนั้น เราจะต้องดำเนินการด้วยตัวดำเนินการ (operator) กับฟังก์ชัน $g(x)$ ดังนี้

$$y(x) \equiv \int g(x)dx$$

เรียกตัวดำเนินการนี้ว่า การอินทิเกรต (integration) และผลลัพธ์ที่ได้จากการอินทิเกรต เรียกว่า อินทิกรัล (integral) เราอาจจะคิดได้ว่าการอินทิเกรตคล้ายกับส่วนกลับของการหาอนุพันธ์ เช่น

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

สูตรอนุพันธ์สำหรับบางฟังก์ชัน	สูตรอินทิกรัลสำหรับบางฟังก์ชัน
$\frac{d}{dx}(a) = 0$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$	$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$	$\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$
$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a\sec^2 ax$	$\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C$
$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a\csc^2 ax$	$\int \tan axdx = \frac{1}{a}\ln(\cos ax) + C$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$	$\int \cot axdx = \frac{1}{a}\ln(\sin ax) + C$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$	$\int \sin^2 axdx = \frac{x}{2} - \frac{sin2ax}{4a} + C$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\int \cos^2 axdx = \frac{x}{2} + \frac{sin2ax}{4a} + C$

ตารางที่ 1.1: แสดงสูตรการหาค่าอนุพันธ์และการอินทิกรัลสำหรับบางฟังก์ชัน

ซึ่งก็คือผลของลัพธ์ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

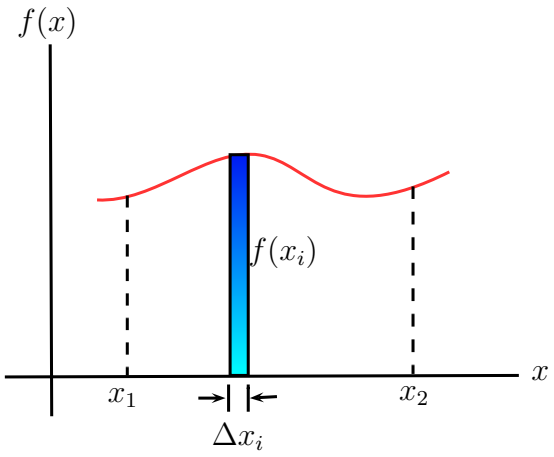
$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

นั่นคือ

$$y(x) = \int f(x)dx = \int (3ax^2 + b)dx = ax^3 + bx + c$$

เมื่อ c คือ ค่าคงที่ของการอินทิเกรต ซึ่งเราเรียกการอินทิเกรตแบบนี้ว่า อินทิกรัลที่ยังไม่มีการกำหนดขอบเขต (indefinite integral) ดังนั้นค่าคงที่ c จึงเป็นค่าใด ๆก็ได้ สำหรับการอินทิกรัลที่ยังไม่มีการกำหนดขอบเขตทั่ว ๆไปแทนด้วย $I(x)$ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$I(x) = \int f(x)dx \tag{1.6}$$



รูปที่ 1.2: แสดงพื้นที่ใต้กราฟซึ่งหาได้จากการอินทิกรัลที่มีการกำหนดขอบเขต

สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องทั่ว ๆไป $f(x)$ อินทิกรัลสามารถอธิบายได้ด้วยพื้นที่ซึ่งอยู่ภายใต้ขอบเขตของเส้นกราฟ $f(x)$ และ แกน x ระหว่างค่าสองค่าที่กำหนดให้คือ x_1 และ x_2 ดังรูป 1.2 พื้นที่ส่วนเล็ก ๆโดยประมาณคือ $f(x_i)\Delta x_i$ ถ้าทำการรวมพื้นเล็ก ๆนี้ตั้งแต่ x_1 ถึง x_2 และใช้เงื่อนไขที่ว่า$\Delta x_i \to 0$ เราก็จะได้พื้นที่ใต้กราฟเป็นดังนี้

$$\text{พื้นที่} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{1.7}$$

การอินทิเกรตของฟังก์ชันดังกล่าวที่มีการระบุขอบเขตของการอินทิกรัล เราเรียกว่า อินทิกรัลแบบมีขอบเขต (definite integral) เช่นตัวอย่างการหาค่าอินทิกรัลแบบมีขอบเขตดังต่อไปนี้

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^a = \frac{a^3}{3}$$
$$\int_0^b x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}\Big]_0^b = \frac{2}{5}b^{5/2}$$
$$\int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2}\Big]_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8$$

1.4 แบบฝึกหัด

1. จงหาจำนวนเลขนัยสำคัญของตัวเลขดังต่อไปนี้ (ก) 23 cm (ข) 3.589 s (ค) 4.67×10^3 m/s (ง) 0.0032 m

2. ทำการวัดรัศมีของวงกลมได้ 10.5 ± 0.2 m จงคำนวณหา (ก) พื้นของวงกลม และ (ข) เส้นรอบวงของวงกลม

3. จงหาผลลัพธ์ของการดำเนินการต่อไปนี้โดยคำนึงถึงนัยสำคัญด้วย

   - $756 + 37.2 + 0.82 + 2.5$
   - 0.0032×356.3
   - $5.620 \times \pi$

4. จงหาจำนวนเลขนัยสำคัญของค่าต่อไปนี้ (ก) 78.9 ± 0.2 (ข) 3.788×10^9 (ค) 2.46×10^{-6} (ง) 0.0053

5. ชาวนาคนหนึ่งทำการวัดระยะที่ล้อมรอบพื้นที่สี่เหลี่ยมพื้นผ้าได้ด้านยาวเท่ากับ 38.44 เมตร และด้านกว้างไดเท่ากัน 19.5 เมตร จงหาระยะทั้งหมดที่ล้อมรอบพื้นที่และหาพื้นของรูปสี่เหลี่ยมนี้

6. สี่เหลี่ยมพื้นผ้ารูปหนึ่งวัดด้านยาวได้ 21.3 ± 0.2 cm และวัดด้านกว้างได้เป็น 9.80 ± 0.1 cm จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้และหาค่าความไม่แน่นอนของการคำนวณด้วย

7. มวลของดาวเสาร์มีค่าเท่ากับ 5.64×10^{26} kg รัศมีของมันมีค่าเท่ากับ 6.00×10^7 m จงคำนวณหาความหนาแน่นของดาวเสาร์ (ผลลัพธ์ให้คำนึงถึงเลขนัยสำคัญด้วย)

8. คาบ (T) ของการแกว่งลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายหาจากสมการนี้

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

เมื่อ ℓ คือความยาวของลูกตุ้มนาฬิกา g คือ ความเร่งโน้มถ่วงของโลก จงแสดงให้เห็นว่าสมการนี้มีไดเมนชันส์ที่ถูกต้อง

9. สมการที่แสดงดังต่อไปนี้สมการใดมีไดเมนชันส์ถูกต้อง

ก $v = v_0 + av$

ข $y = (2)\ \mathrm{m}\ \cos(kx)$, เมื่อ $k = 2\ \mathrm{m}^{-1}$

10. กฎของแรงดึงดูดระหว่างมวลของนิวตันเขียนแทนด้วยสมการ

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

เมื่อ F คือ แรงดึงดูด M และ m คือ มวลของวัตถุ r คือ ระยะห่างระหว่างมวลทั้งสอง แรงที่วัดในระบบ SI มีค่าเป็น kg.m/s^2 จงวิเคราะห์หาไดเมนชันส์ของค่า G

บทที่ 2

การเคลื่อนที่แบบ 1 และ 2 มิติ

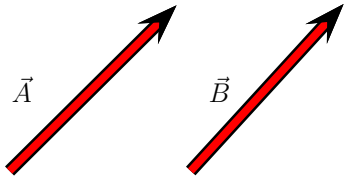
การศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุใด ๆโดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่ง (space) กับเวลา ความเร็วและความเร่งของวัตถุนั้นโดยไม่คำนึงถึงต้นเหตุของการทำให้เกิดการเคลื่อนที่เราเรียกว่า จลศาสตร์ ของการเคลื่อนที่(kinematics) สำหรับในบทนี้เราจะศึกษาการเคลื่อนที่แบบ 1 มิติ (การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง) และการเคลื่อนที่แบบ 2 มิติและนอกจากนี้ยังจะกล่าวถึงพื้นฐานเกี่ยวกับปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีความจำเป็นในการบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุและยังเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาในเนื้อหาวิชาฟิสิกส์

2.1 เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์

ปริมาณต่าง ๆในทางฟิสิกส์แบ่งออกเป็นสองกลุ่มคือปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) และปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ปริมาณเวกเตอร์จะต้องมีการระบุทั้งขนาดและทิศทางจึงจะสื่อความหมาย เช่น การกระจัด (displacement) ความเร็ว (velocity) ความเร่ง (acceleration) แรง (force) สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก เป็นต้น ส่วนปริมาณสเกลาร์ ระบุเพียงขนาดอย่างเดียวเช่น มวล ความดัน อุณหภูมิ ปริมาตร และความหนาแน่น เป็นต้น โดยทั่วไปจะเขียนปริมาณเวกเตอร์โดยใช้ลูกศรไว้ข้างบนตัวอักษร เช่น เวกเตอร์ A เขียนแทนด้วย $\vec{A}$ ส่วนขนาดของเวกเตอร์ A เขียนแทนด้วย A ในการเขียนรูปเวกเตอร์ใด ๆจะใช้ขนาดความยาวของลูกศรแทนขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรแทนทิศของเวกเตอร์

2.1.1 สมบัติของเวกเตอร์

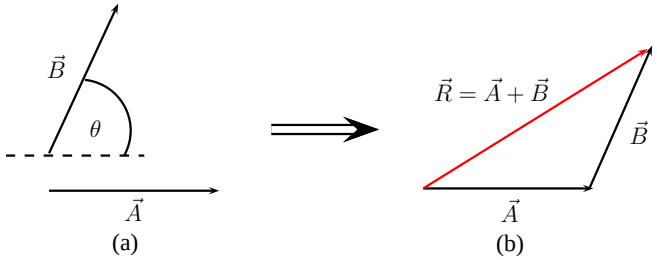
- **การเท่ากันของสองเวกเตอร์** เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ เวกเตอร์ $\vec{B}$ เท่ากันก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกันดังรูป 2.1



รูปที่ 2.1: การเท่ากันของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

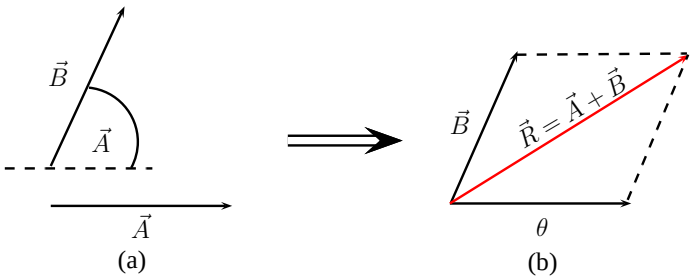
- **การบวกสองเวกเตอร์**

  (1) **การบวกสองเวกเตอร์ด้วยการวาดรูปสามเหลี่ยม** เมื่อกำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีขนาดและทิศทางดังรูป 2.2(a) เมื่อนำเวกเตอร์ $\vec{A}+\vec{B}$ หาได้โดยการลากเวกเตอร์ $\vec{A}$ ก่อนจากนำเวกเตอร์ $\vec{B}$ มาต่อที่หัวลูกศรของเวกเตอร์ $\vec{A}$ โดยที่ยังคงขนาดและทิศทางเดิมของเวกเตอร์ $\vec{B}$ ส่วนเวกเตอร์ผลลัพธ์($\vec{R}$) หาจากการลากลูกศรโดยเริ่มจากปลายของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ไปบรรจบที่หัวลูกศรของเวกเตอร์ $\vec{B}$ ดังรูป 2.2(b) (2)



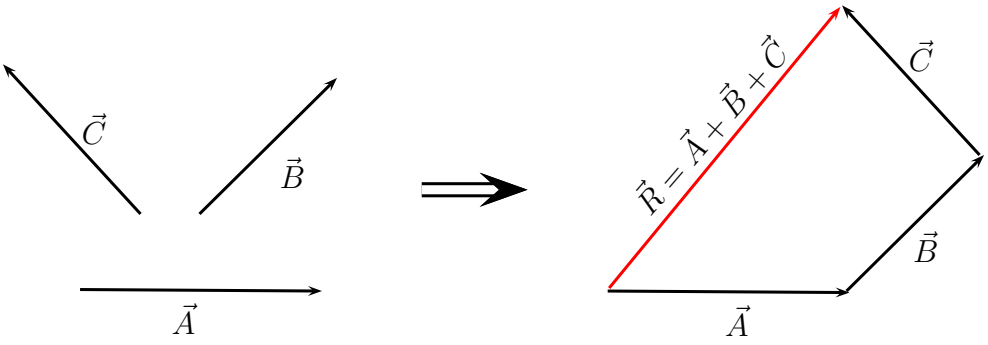
รูปที่ 2.2: การบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยการวาดรูปสามเหลี่ยม

การบวกสองเวกเตอร์ด้วยการวาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ทำได้โดยลากลูกศรออกจากจุดเดียวกันนั่นคือให้หางเวกเตอร์ทั้งสองประกบกันจากดังรูป 2.3 จากนั้นให้ลากเส้นประกบเพื่อสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและเวกเตอร์ของเวกเตอร์ $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$ หาได้จากการลากเส้นตรงในแนวทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูปที่ 2.3: การบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยการวาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

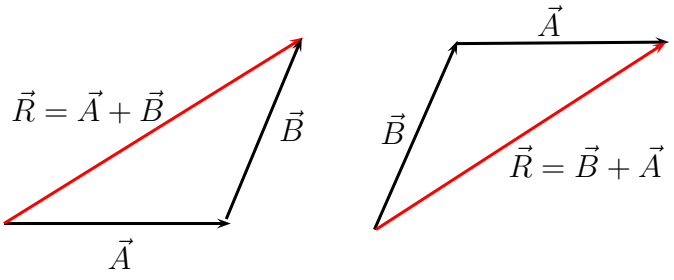
- **การบวกเวกเตอร์ที่มากกว่าสองเวกเตอร์**
  สำหรับกรณีที่มีหลายเวกเตอร์ เช่น $\vec{A}, \vec{B}$ และ$\vec{C}$ การบวกเวกเตอร์เหล่านี้ก็จะกระทำในลักษณะเดียวกันกับการบวกแบบสองเวกเตอร์ ดังแสดงในรูป 2.4 นั่นคือนำหางเวกเตอร์ที่สองมาต่อที่หัวของเวกเตอร์แรกและนำหางเวกเตอร์ที่สามมาต่อหัวเวกเตอร์ที่สองส่วนเวกเตอร์ลัพธ์ก็คือลากลูกศรออกจากหางเวกเตอร์แรกไปยังหัวของเวกเตอร์ที่สามนั่นเอง



รูปที่ 2.4: การบวกเวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$

- **การสลับที่การบวกกันของสองเวกเตอร์** การสลับตำแหน่งการบวกของสองเวกเตอร์ให้เวกเตอร์ลัพธ์เท่ากันดังแสดงในรูป 2.5 นั่นคือ

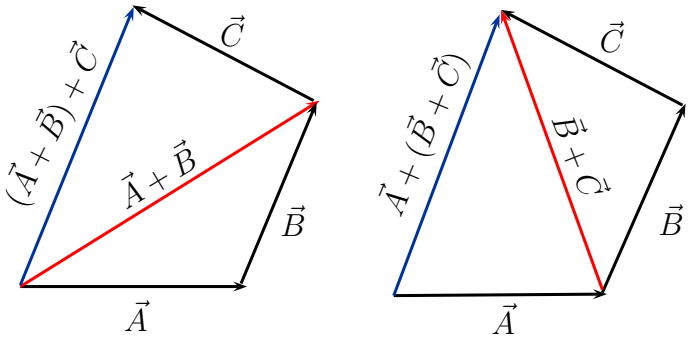
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



รูปที่ 2.5: การสลับที่ของการบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

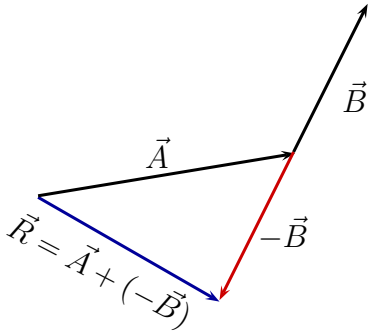
- **การจัดกลุ่มสำหรับการบวกกันของเวกเตอร์** การบวกเวกเตอร์หลายเวกเตอร์สามารถจัดกลุ่มการบวกได้และให้เวกเตอร์ลัพธ์เท่ากัน ดังแสดงในรูป 2.6 นั่นคือ

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$



รูปที่ 2.6: การจัดกลุ่มสำหรับการบวกเวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$

- **ค่าลบของเวกเตอร์ (Negative of a vector)** เช่น เวกเตอร์ $-\vec{A}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ $\vec{A}$ แต่มีทิศตรงข้าม
- **การคูณปริมาณสเกลาร์ (m) กับปริมาณเวกเตอร์** เช่น $\vec{B} = m\vec{A}$ ความหมายคือเวกเตอร์$\vec{B}$ มีขนาดความยาวเป็นจำนวน m เท่าของเวกเตอร์ $\vec{A}$ แต่มีทิศทางเดียวกัน
- **การลบเวกเตอร์** เช่น $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ ซึ่งก็คือการบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับเตอร์ลบของ $\vec{B}$ ดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7: เวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้จากการบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับเวกเตอร์ลบของ $\vec{B}$

- **การขนาดเวกเตอร์ลัพธ์และทิศทาง** ในกรณีที่สองเวกเตอร์ใด ๆ เช่น $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำมุมกันเป็นมุมθ ดังรูป 2.8 การหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้จากการบวกกันของสองเวกเตอร์นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้ กฎของโคไซน์ (cosine's law) ดังนี้คือ

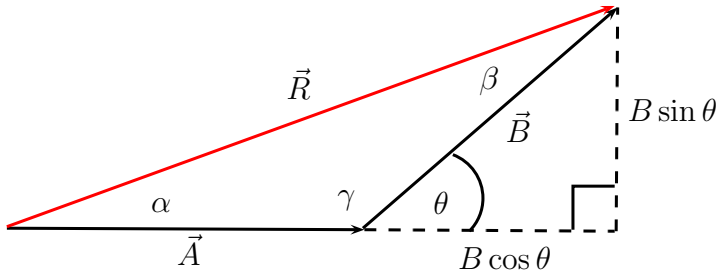
$$\begin{aligned} R^2 &= (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2 \\ &= A^2 + 2AB\cos\theta + B^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta \\ R^2 &= A^2 + B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2AB\cos\theta \\ R &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \end{aligned} \tag{2.1}$$

สำหรับทิศของเวกเตอร์หาได้จาก

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}\right) \tag{2.2}$$

นอกจากนี้ทั้งขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ตามกฎของไซน์ดังนี้

$$\frac{R}{\sin\gamma} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.8: แสดงวิธีการคำนวณหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ของการบวก $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$

- **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)** คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วยความยาว ซึ่งมีนิยามเป็นดังนี้คือ

$$\hat{e}_A = \frac{\vec{A}}{A} \tag{2.4}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\vec{A}$ หาได้จากอัตราส่วนของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ต่อขนาดของเวกเตอร์ A สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y และ z จะเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ ตามลำดับดังนั้นในการเขียนเวกเตอร์ใด ๆในระบบพิกัดฉาก (cartesian coordinate) ดังรูป 2.9 สามารถเขียนในรูปของผลบวกของเวกเตอร์ย่อยในแต่ละองค์ประกอบตามแกน x, y และ z ได้ดังนี้

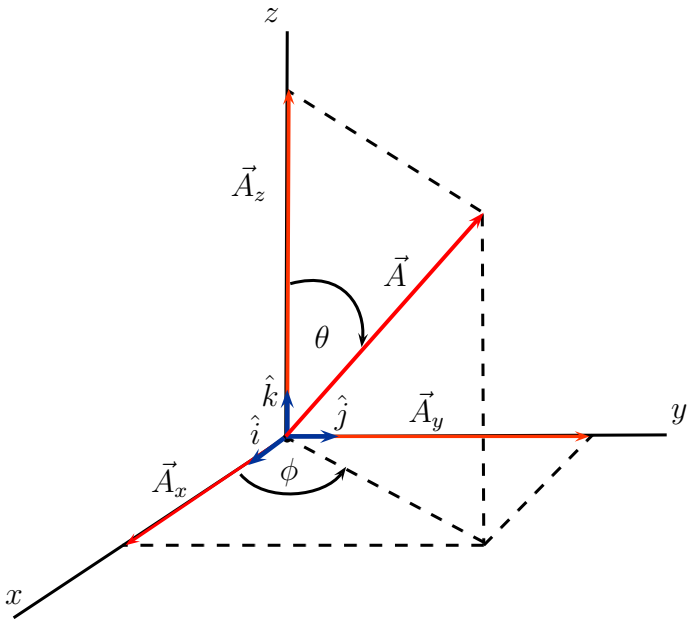
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

โดยที่ขนาดของเวกเตอร์องค์ประกอบตามแกนต่าง ๆและขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ หาได้

จากความสัมพันธ์นี้

$$A_x = A\sin\theta\cos\phi$$
$$A_y = A\sin\theta\sin\phi$$
$$A_z = A\cos\theta$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

ในกรณีที่เวกเตอร์วางตัวในระนาบ (2 มิติ) การแยกเวกเตอร์ใด ๆไปเป็นเวกเตอร์

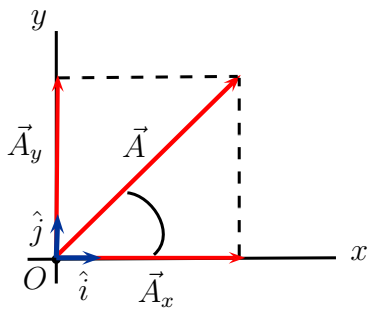


รูปที่ 2.9: แสดงเวกเตอร์ $\vec{A}$ เวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในระบบพิกัดฉาก

องค์ประกอบตามแกน x และ y ทำได้ดังนี้ จากรูป 2.10 จะได้ว่า

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$A_x = A\cos\theta; \quad A_y = A\sin\theta$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

- **การรวมเวกเตอร์ด้วยวิธีแยกองค์ประกอบ**
  ในกรณีที่มีหลากเวกเตอร์การหาเวกเตอร์ลัพธ์เนื่องจากการบวกกันของเหล่านี้สามารถทำได้โดยการแยกเวกเตอร์แต่ละตัวออกเป็นองค์ประกอบตามแกน x, y และ z จากนั้นรวมเวกเตอร์ย่อยในแต่ละองค์ประกอบนั้นก็จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ในแต่ละแกนและสุดท้าย



รูปที่ 2.10: การแยกเวกเตอร์ $\vec{A}$ลงบนแกน x และ y

คือนำค่าเวกเตอร์ลัพธ์ตามแกนทั้งสามมาคำนวณหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ เช่น สมมติ กำหนดให้

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &= A_{1x}\hat{i} + A_{1y}\hat{j} + A_{1z}\hat{k}\\ \vec{A}_2 &= A_{2x}\hat{i} + A_{2y}\hat{j} + A_{2z}\hat{k}\\ \vdots &= \vdots\\ \vec{A}_n &= A_{nx}\hat{i} + A_{ny}\hat{j} + A_{nz}\hat{k}\end{aligned}$$

เราจะได้ขนาดเวกเตอร์ลัพธ์ตามแกน x, y และ z มีค่าเป็นดังนี้

$$R_x = (A_{1x} + A_{2x} + \cdots + A_{nx}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ix}$$

$$R_y = (A_{1y} + A_{2y} + \cdots + A_{ny}) = \sum_{i=1}^{n} A_{iy}$$

$$R_z = (A_{1z} + A_{2z} + \cdots + A_{nz}) = \sum_{i=1}^{n} A_{iz}$$

และขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์และทิศของเวกเตอร์หาได้ดังนี้คือ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right)$$

2.1.2 การคูณของสองเวกเตอร์

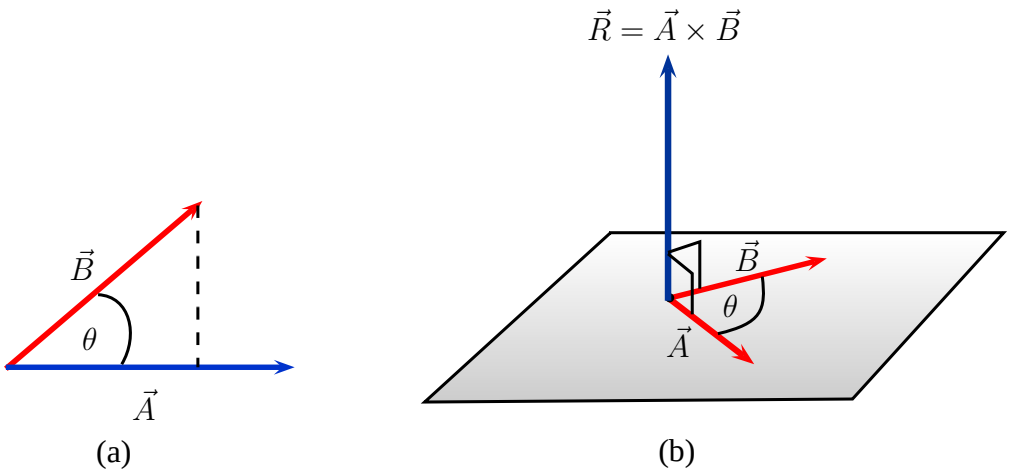
การคูณปริมาณเวกเตอร์มีอยู่สองประเภทคือการคูณของสองเวกเตอร์แล้วได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณสเกลาร์ เรียกว่าการคูณแบบสเกลาร์ (scalar product) กับการคูณของสองเวกเตอร์แล้วได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณเวกเตอร์ เรียกว่าการคูณแบบเวกเตอร์ (vector product)

- **การคูณแบบสเกลาร์** มีนิยามดังนี้คือ กำหนดให้ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ ซึ่งทำมุมกันเป็นมุม θ ดังรูป 2.11(a) การคูณแบบสเกลาร์ของสองเวกเตอร์คือ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \tag{2.5}$$

- **การคูณแบบเวกเตอร์** กำหนดให้ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ ซึ่งทำมุมกันเป็นมุม θ ในระนาบเดียวกัน ดังรูป 2.11(b) การคูณของสองเวกเตอร์ทำให้ได้เวกเตอร์ $\vec{R}$ ในทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์ทั้งสองและมีทิศพุ่งขึ้น (การหาทิศของการคูณแบบเวกเตอร์จะใช้กฎมือขวา โดยให้นิ้วหัวแม่มือแทนทิศของเวกเตอร์ $\vec{R}$ ส่วนนิ้วทั้งสี่จะวนรอบโดยเริ่มจากเวกเตอร์ $\vec{A}$ และวนไปหาเวกเตอร์ $\vec{B}$) ส่วนขนาดของเวกเตอร์ $\vec{R}$ หาได้จาก

$$\left|\vec{R}\right| = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB\sin\theta \tag{2.6}$$



รูปที่ 2.11: การคูณของสองเวกเตอร์ คือ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ (a) แบบผลคูณสเกลาร์ (b) แบบผลคูณเวกเตอร์

2.2 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติ

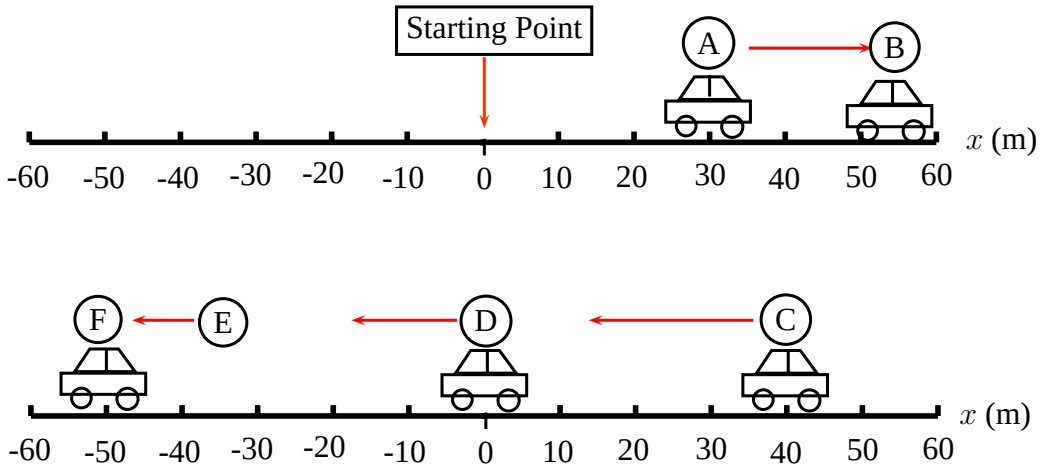
2.2.1 การกระจัด (Displacement)

การกระจัด (Displacement) คือปริมาณที่วัดการเปลี่ยนตำแหน่งการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้าให้วัตถุอันหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงจากตำแหน่งเริ่มต้นเป็น x_i เมื่อเวลาผ่านไปวัตถุมาอยู่

ที่ตำแหน่ง x_f ดังนั้นวัตถุมีการกระจัดเป็น

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{2.7}$$

การกระจัด เป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งมีต้องระบุทั้งขนาดและทิศทาง ส่วนระยะทาง (distance) จะวัดขนาดอย่างเดียวยกตัวอย่างเช่น พิจารณาในรูปที่ 2.12 รถยนต์กำลังเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงจากตำแหน่ง A ไปยังตำแหน่ง B C, D, E และ F ตามลำดับ การกระจัดของรถยนต์จากตำแหน่ง A ไปตำแหน่ง B คือ $\Delta x = x_B - x_A = 20$ m ส่วนการกระจัดจากตำแหน่ง A ไปตำแหน่ง D คือ $\Delta x = x_D - x_A = -30$ m แต่ถ้าวัดระยะทางจากตำแหน่งA ไปยังตำแหน่ง D คือ $s = s_{AB} + s_{BC} + s_{CD} = 20 + 10 + 40 = 70$ m จะเห็นว่าการกระจัดมีค่าเป็นบวกหรือลบได้ซึ่งเครื่องหมายจะเป็นการระบุทิศทางเทียบกับจุดเริ่มต้น ส่วนระยะทางจะมีค่าเป็นบวกเสมอ



รูปที่ 2.12: รถยนต์กำลังเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

2.2.2 ความเร็ว (Velocity)

อัตราส่วนระหว่างปริมาณการกระจัดกับช่วงเวลาที่ใช้ เรียกว่า ความเร็วเฉลี่ย (average velocity, $\bar{v}_x$) นั่นคือ

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \tag{2.8}$$

ส่วนอัตราส่วนระหว่างระยะทาง (s) กับช่วงเวลา เรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ย (average speed) ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์นั่นคือ

$$\text{อัตราเร็วเฉลี่ย} = \frac{\text{ระยะทางทั้งหมด}}{\text{เวลาทั้งหมด}}$$

ในกรณีที่พิจารณาในช่วงเวลาสั้น ๆ (Δt มีค่าเข้าใกล้ศูนย์มาก ๆ แต่ไม่เท่ากับศูนย์) ความเร็วเฉลี่ยจะเรียกว่าความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง (instantaneous velocity, v_x) นั่นคือ

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.9}$$

และอัตราเร็วเฉลี่ยจะเรียกว่าอัตราเร็วขณะใดขณะหนึ่ง (instantaneous speed) ซึ่งมีขนาดเท่ากับขนาดของความเร็วขณะใดขณะหนึ่งนั่นเอง หน่วยการวัดความเร็วหรืออัตราเร็ว คือ เมตรต่อวินาที (m/s)

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่ 2.12 ทำการบันทึกการกระจัดเทียบกับจุดอ้างอิง (O) และเวลาของการเคลื่อนที่ของรถยนต์ได้ผลดังแสดงในตาราง 2.1 และผลที่ได้นำมาเขียนกราฟดังรูป 2.13 จงหาการกระจัด ความเร็วเฉลี่ย และอัตราเร็วเฉลี่ยระหว่างจุด A กับจุด F

ตารางที่ 2.1: ตำแหน่งของรถยนต์ที่เวลาต่าง ๆ

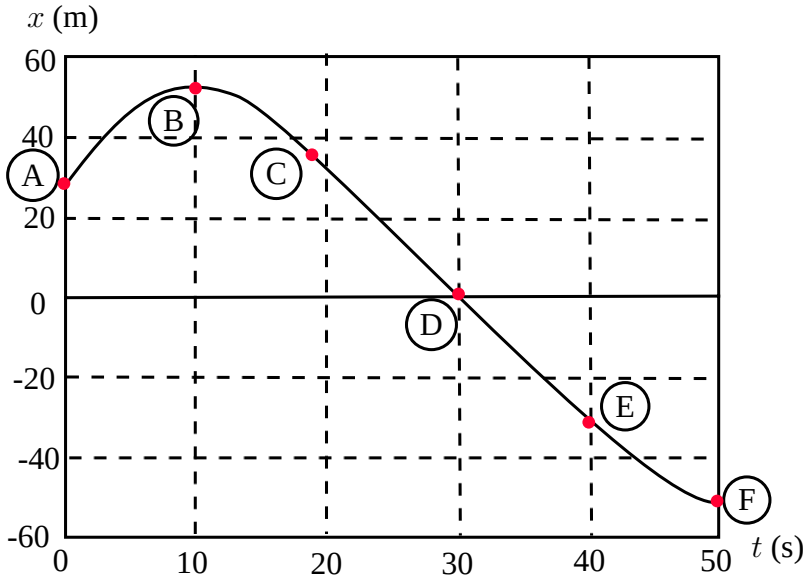
ตำแหน่ง	เวลา (s)	x (m)
A	0	30
B	10	52
C	20	38
D	30	0
E	40	-37
F	50	-53

วิธีทำ จากข้อมูลในตารางจะเห็นว่าที่ตำแหน่ง A และตำแหน่ง F มีค่าการกระจัดเทียบกับจุดอ้างอิง O คือ $x_A = 30$ และ $x_B = -53$ ดังนั้นจากนิยามของการกระจัดจะได้

$$\Delta x = x_F - x_A = -53 - 30 = -83 \quad \text{m}$$

และความเร็วเฉลี่ยระหว่างสองจุดนี้คือ

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_F - x_A}{t_F - t_A} \\ &= \frac{-53 - 30}{50 - 0} = \frac{-83}{50} = -1.7 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$



รูปที่ 2.13: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 1

ส่วนอัตราเร็วเฉลี่ยหาได้จากอัตราส่วนของระยะทางทั้งหมดที่รถยนต์เคลื่อนที่ไปได้ตั้งแต่จุด A ถึงจุด F กับช่วงเวลาที่ใช้ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \text{อัตราเร็วเฉลี่ย} &= \frac{\text{ระยะทางทั้งหมด}}{\text{เวลาทั้งหมด}} \\ &= \frac{22+52+53}{50} = 2.5 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่ตามแกน x ตำแหน่งของอนุภาคมีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาตามความสัมพันธ์ $x = -4t + t^2$ เมื่อ x มีหน่วยเป็นเมตร (m) และ t วัดในหน่วยของวินาที (s) จงหา

(ก) การกระจัดของอนุภาคในช่วงเวลา t=0 ถึง t = 1 วินาที และในช่วง t = 1 ถึง t = 3 วินาที

(ข) ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลาดังกล่าว

<u>วิธีทำ</u>

(ก) จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งกับเวลาทำให้ว่า $t_i = 0, x_i = -4(0)+2(0)^2 = 0$ และ $t_f = 1, x_f = -4(1) + 2(1)^2 = -2$ ดังนั้นการกระจัดในช่วงเวลา t=0 ถึง t=1 คือ

$$\Delta x = x_f - x_i = -2 - 0 = -2 \quad \text{m}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับการกระจัดในช่วง t=1 ถึง t=3 จะได้

$$\Delta x = x_f - x_i = [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = 8 \quad \text{m}$$

(ข) ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา t=0 ถึง t = 1 คือ

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \text{m/s}$$

และความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา t=1 ถึง t = 3 คือ

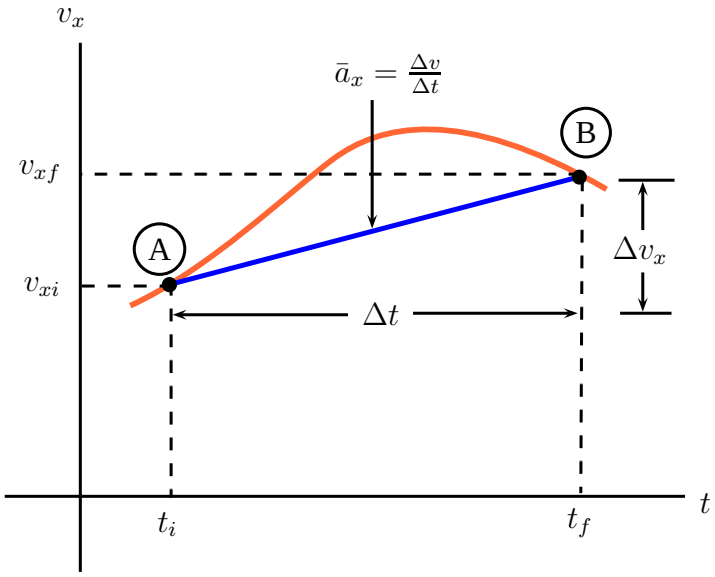
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{m/s}$$

2.2.3 ความเร่ง (Acceleration)

นิยามของความเร่งเฉลี่ยของวัตถุคือการเปลี่ยนแปลงความเร็ว (Δv_x) หารด้วยช่วงเวลา (Δt) ที่เกิดการเปลี่ยนแปลงความเร็วนั้น นั่นคือ

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \tag{2.10}$$

พิจารณาจากรูป 2.14 ซึ่งเป็นกราฟระหว่างความเร็วกับเวลา จะเห็นว่าจากนิยามของความ



รูปที่ 2.14: กราฟของความเร็วและเวลาในการเคลื่อนที่ของอนุภาคอันหนึ่ง

เร่งเฉลี่ยระหว่างการเปลี่ยนแปลงความเร็วจากจุด A ไปยังจุด B ก็คือความชันของกราฟ

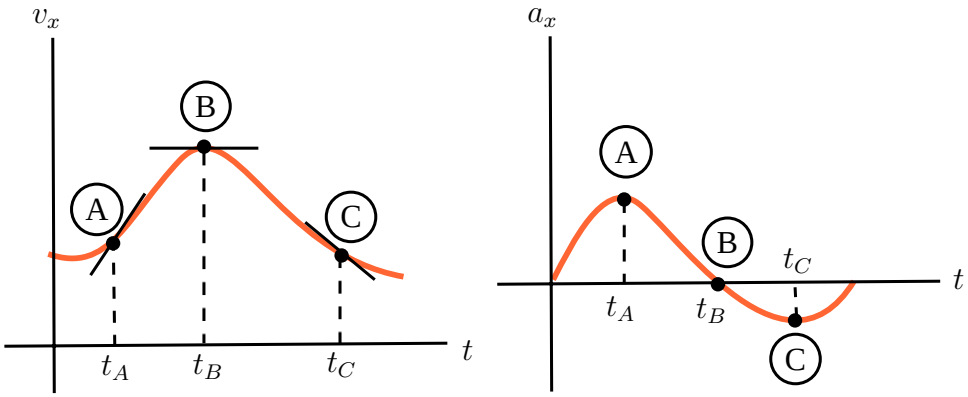
เส้นตรงที่ลากเชื่อมต่อระหว่างสองจุดนั้นถ้าเราพิจารณาว่าจุดสองจุดอยู่ใกล้กันมาก ๆ นั้นคือ ช่วงเวลา $\Delta t \to 0$ แล้วเราจะได้นิยามของความเร่งขณะใดขณะหนึ่งเป็นดังนี้

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \tag{2.11}$$

เนื่องจากว่า $v_x = dx/dt$ ดังนั้น ความเร่งยังสามารถเขียนได้อีกแบบดังนี้

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.12}$$

ซึ่งจะเห็นว่าสมการ 2.12 ความเร่งมีค่าเท่ากับอนุพันธ์อันดับสองของ x เทียบกับ t ในรูป 2.15 จะแสดงความเกี่ยวพันระหว่างกราฟของความเร็ว-เวลา และกราฟของความเร่ง-เวลา จะพบว่าความเร่งที่จุดใด ๆจะเท่ากับค่าความชัน (slope) ของกราฟความเร็ว-เวลาที่จุดนั้น



รูปที่ 2.15: ความสัมพันธ์ระหว่างกราฟของความเร็ว-เวลาและความเร่ง-เวลาที่ตำแหน่งต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 3 อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่ตามแกน x ด้วยความเร็วที่แปรตามเวลาดังสมการ $v_x = 40 - 5t^2$ จงหาความเร่งเฉลี่ยในช่วงเวลา t=0 ถึง t=2 และความเร่งที่เวลา t =2 วินาที

วิธีทำ จากนิยามของความเร่งเฉลี่ยตามสมการ 2.10 ทำให้ได้

$$v_{xi} = 40 - 5(0)^2 = 40 \quad \text{m/s}$$
$$v_{xf} = 40 - 5(2)^2 = 20 \quad \text{m/s}$$
$$\bar{a}_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{20 - 40}{2 - 0} = -10 \quad \text{m/s}^2$$

และความเร่งที่เวลา t =2 คือ ความเร่งขณะใดขณะหนึ่งนั่นเอง ดังนั้น

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(40 - 5t^2) = -10t$$
$$a_x(t = 2) = -10(2) = -20 \quad \text{m/s}^2$$

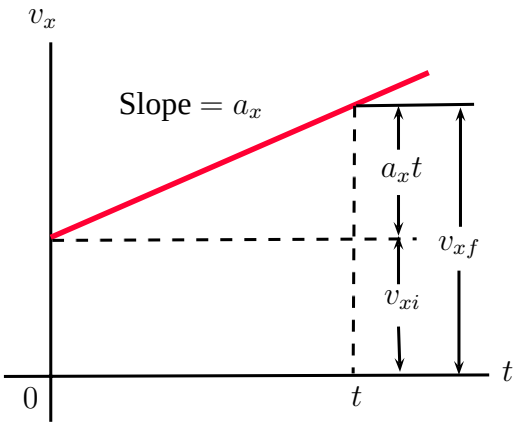
2.2.4 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

ในกรณีของการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวนี้ ความเร่งเฉลี่ยกับความเร่งขณะใดขณะหนึ่งจะเท่ากันดังนั้นจากสมการ 2.10 เราเขียน $\bar{a}_x$ แทนด้วย a_x และกำหนดให้ $t_i = 0$ และ $t_f = t$ ทำให้ได้

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t}$$
$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \tag{2.13}$$

จากสมการ 2.13 จะเห็นว่าเราสามารถหาค่าความเร็วของวัตถุที่เวลาใด ๆก็ได้ถ้าหากว่ารู้ค่าความเร็วเริ่มต้นและรู้ความเร่ง การเปลี่ยนแปลงความเร็วจะเพิ่มขึ้นอย่างเชิงเส้นตามเวลาเพราะความเร่งของการเคลื่อนที่มีค่าคงตัวดังรูป 2.16 ทำให้ได้ว่า ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาใด ๆจะเท่ากับค่าเฉลี่ยของความเร็วของสองจุดนั้น ๆ

$$\bar{v}_x = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \tag{2.14}$$



รูปที่ 2.16: กราฟของความเร็ว-เวลาของการเคลื่อนที่ภายใต้ความเร่งคงตัว

จากนิยามของความเร็วเฉลี่ยในสมการ 2.8 และใช้ความสัมพันธ์ในสมการ 2.14 ทำให้ได้สมการของการกระจัดในอีกรูปแบบหนึ่งดังนี้

$$x_f - x_i = \bar{v}_x t = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} t \tag{2.15}$$

และโดยการแทนค่า v_{xf} จากสมการ 2.13 ลงในสมการ 2.15 จะได้อีกรูปแบบหนึ่งของความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็ว และความเร่งดังนี้

$$x_f - x_i = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{2.16}$$

และนอกจากนี้ยังสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วสุดท้ายกับความเร่งและการกระจัดโดยที่ไม่มีตัวแปรของเวลาเข้ามาปรากฏในสมการดังนี้

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x}$$
$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \tag{2.17}$$

ภายใต้การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวนี้ทำให้เราได้สมการที่จะใช้ในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาสำหรับการเคลื่อนที่ของวัตถุใด ๆได้ดังสรุปในตาราง 2.2 การเลือกใช้สมการใดนั้นในการคำนวณจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหาว่าต้องการหาค่าปริมาณใดและมีตัวแปรไหนที่เราทราบค่าแล้ว

ตารางที่ 2.2: สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงภายใต้ความเร่งคงตัว

สมการ	ข้อมูลที่ได้จากสมการ
$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	ความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา
$x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของความเร็วและเวลา
$x_f - x_i = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลา
$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	ความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัด

ตัวอย่างที่ 4 รถบรรทุกซึ่งจอดหยุดนิ่งบนถนนตรงถูกขับออกไปด้วยความเร่ง 2 m/s^2 จนมีอัตราเร็ว 20 m/s หลังจากนั้นรถบรรทุกเคลื่อนที่ต่อด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา 20 วินาที และหลังจากนั้นรถถูกเบรกให้หยุดภายในเวลา 5 วินาทีจงหาระยะทางทั้งหมดที่รถบรรทุกเคลื่อนที่ไปได้

วิธีทำ ในโจทย์คำถามนี้เราพิจารณาการเคลื่อนที่ออกเป็น 3 ช่วงดังนี้ คือ

ช่วงที่ 1 รถบรรทุกเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว ขนาดการกระจัดหาได้ดังนี้

$$\Delta x_1 = x_f - x_i = \bar{v}_x t = \frac{(v_{xi} + v_{xf})}{2}t \tag{1}$$

จากสมการ (1) เราต้องทราบค่าของเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ในช่วงนี้ซึ่งหาได้จากความสัมพันธ์

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xf} - 0}{t}$$
$$t = \frac{v_{xf}}{a_x} = \frac{20\text{m/s}}{2\text{m/s}^2} = 10\text{s}$$

จากนั้นแทนค่า t ลงในสมการ (1) เราจะได้ขนาดของการกระจัดในช่วงที่ 1 ดังนี้

$$\Delta x_1 = \frac{(20\text{m/s} - 0)(10\text{s})}{2} = 100\text{m} \tag{2}$$

<u>ช่วงที่ 2</u> รถบรรทุกเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ ขนาดของการกระจัดหาได้ดังนี้

$$\Delta x_2 = \bar{v}_x t = v_{xf} t = (20\text{m/s})(20\text{s}) = 400\text{m} \tag{3}$$

<u>ช่วงที่ 3</u> รถบรรทุกเคลื่อนที่ด้วยความหน่วง (ความเร่งมีค่าเป็นลบ) ขนาดของการกระจัดในช่วงนี้คือ

$$\Delta x_3 = \bar{v}_x t = \frac{(v_{xi} + v_{xf})}{2} t = \frac{20\text{m/s} + 0}{2}(5\text{s}) = 50\text{m} \tag{4}$$

ดังนั้นระยะทางทั้งหมดที่รถบรรทุกเคลื่อนที่ได้คือ

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 100 + 400 + 50 = 550\text{m}$$

2.2.5 การตกอย่างอิสระของวัตถุ

เมื่อปล่อยให้วัตถุตกลงสู่พื้นโลก (ตำแหน่งที่ปล่อยอยู่ใกล้ ๆกับผิวโลกและไม่คิดแรงต้านจากอากาศ) วัตถุทุกอย่างจะเคลื่อนที่หล่นลงไปด้วยความเร่งเดียวกันภายใต้สนามโน้มถ่วงของโลก Galileo Galilei ซึ่งเป็นนักวิทยาศาสตร์ชาวอิตาลี (1564-1642) ที่ได้ทำการทดลองยืนยันคำกล่าวนี้เป็นคนแรกและหา ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational acceleration, g) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 9.80 m/s^2 ความเร่งโน้มถ่วงของโลกจะมีทิศดึงวัตถุเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลกเสมอ การตกของวัตถุอย่างอิสระก็เป็นการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติด้วยความเร่งคงตัวเหมือนกับหัวข้อที่ผ่านมาดังนั้นสมการของการเคลื่อนที่ตามที่สรุปในตารางที่

2.2 ก็จะปรับเล็กน้อยให้สอดคล้องกับทิศทางการเคลื่อนที่ กล่าวคือ x จะแทนด้วย y และให้$a_y = -g = -9.8$ นั่นคือเราจะได้ว่าสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ตกอย่างอิสระในแนวแกน y คือ

$$v_{yf} = v_{yi} - gt \tag{2.18}$$

$$y_f - y_i = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.19}$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i) \tag{2.20}$$

ตัวอย่างที่ 5 ชายคนหนึ่งโยนก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น20 m/s จากขอบตึก ถ้าตึกนี้สูง 50 m และก้อนหินตกลงมาเฉียดขอบตึกและตกกระทบพื้นด้านล่างดังรูป 2.17 กำหนดให้เวลาเริ่มต้นที่ตำแหน่ง A คือ $t_A = 0$ และ $y_A = 0$ จงหา

(ก) เวลาที่ก้อนหินขึ้นไปถึงจุดสูงสุด (จุด B)

(ข) ความสูงที่จุด B

(ค) เวลาที่ก้อนหินตกกลับลงมาอยู่ที่ระดับเดียวกับจุดเริ่มต้นโยน (จุด C)

(ง) ความเร็วของก้อนหินขณะอยู่ที่จุด C

(จ) ความเร็วและตำแหน่งที่เวลา t = 5 s

วิธีทำ

(ก) ที่จุดสูงสุด (จุด B) ก้อนหินมีความเร็วเป็นศูนย์ ดังนั้นจากสมการการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งสำหรับความเร็วของวัตถุที่ตำแหน่งใด ๆคือ $v_{yf} = v_{yi} - gt$ นั่นคือเราหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ขึ้นไปถึงจุดสูงสุดได้ดังนี้

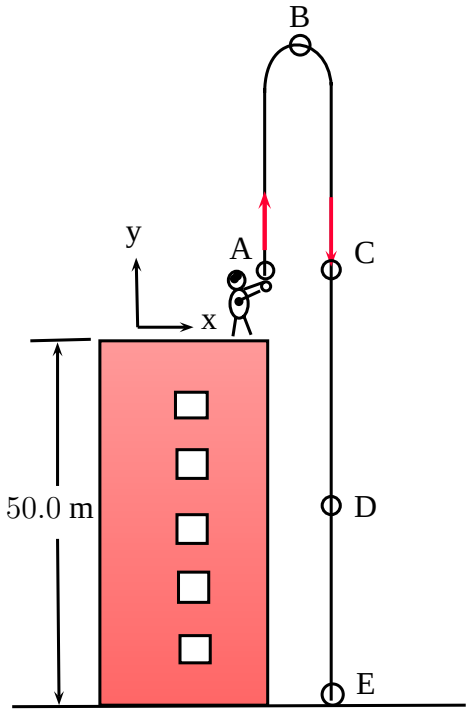
$$t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{-g} = \frac{0 - 20 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2}$$

$$t = \frac{20}{9.8} = 2.04 \quad \text{s}$$

(ข) ระยะสูงสุดที่ก้อนหินเคลื่อนที่ขึ้นไปหาจากความสัมพันธ์ $y_f - y_i = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$ เมื่อ $y_i = y_A = 0$ และ $y_f = y_B$ ทำให้ได้ว่า

$$y_B = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = (20 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2$$

$$y_B = 20.4 \quad \text{m}$$



รูปที่ 2.17: โยนวัตถุขึ้นไปในแนวดิ่งภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก

(ค) เวลาที่ก้อนหินใช้ในการเคลื่อนที่กลับมาอยู่ที่ระดับเดิมนั่นคือ $y_i = y_f = 0$ ดังนั้นเราสามารถคำนวณหาค่าเวลาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y_C - y_A &= v_{yA}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= 20t - \frac{1}{2}9.8t^2 \\ t(20.0 - 4.9t) &= 0 \\ t &= 0, 4.08 \end{aligned}$$

จากการแก้สมการเราได้คำตอบที่มีสองค่าคือ t = 0 และ t = 4.08 s แต่ที่สอดคล้องกับตำแหน่งที่จุดC คือ t = 4.08 วินาที ซึ่งเป็นเวลาที่ก้อนหินใช้ในการเคลื่อนที่จากจุด A มายังจุด C นั่นเอง

(ง) ความเร็วที่ตำแหน่ง C จะมีค่าเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} v_{yC} &= v_{yA} - gt = (20 \text{ m/s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(4.08 \text{ s}) \\ v_{yC} &= -20.0 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

(จ) ความเร็วของก้อนหินที่เวลา $t = 5$ s หาได้ดังนี้

$$v_{yD} = v_{yA} - gt = (20 \text{ m/s}) - (9.8 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})$$
$$v_{yD} = -29.0 \quad \text{m/s}$$

ตำแหน่งของก้อนหินที่เวลา t= 5.0 คือ

$$y_D - y_A = v_{yA}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$y_D - 0 = (20 \text{ m/s})(5.0 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ s})^2$$
$$y_D = -22.5 \quad \text{m}$$

2.3 การเคลื่อนที่แบบ 2 มิติ

2.3.1 การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเส้นทางดังรูป 2.18 จากจุด A ไปยังจุด B ที่จุด A อนุภาคมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector) เป็น $\vec{r_i}$ และที่จุด B มีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{r_f}$ เมื่อ

$$\vec{r_i} = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} \quad \text{และ} \quad \vec{r_j} = x_j\hat{i} + y_j\hat{j}$$

ดังนั้นการกระจัด ($\Delta\vec{r}$) ของอนุภาคจากจุด A ไปยังจุด B มีค่าเป็น

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_f} - \vec{r_i} = (x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา $\Delta t = t_f - t_i$ คือ อัตราส่วนของการกระจัดต่อเวลา

$$\bar{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.21}$$

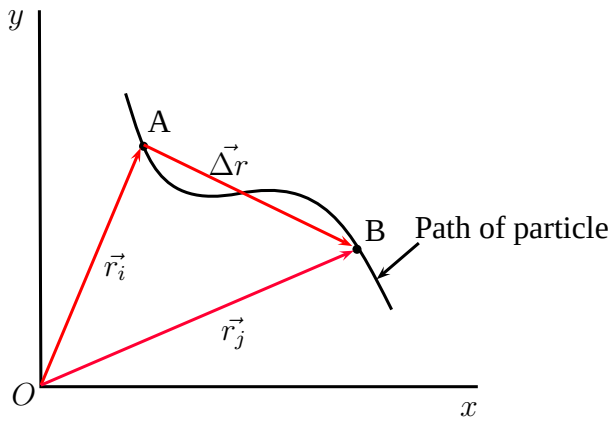
ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งคือ

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.22}$$

ความเร่งเฉลี่ยและความเร่งขณะใดขณะหนึ่งมีนิยามดังนี้คือ

$$\bar{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_f} - \vec{v_i}}{t_f - t_i} \tag{2.23}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.24}$$



รูปที่ 2.18: การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบ xy

2.3.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์

การเคลื่อนแบบโปรเจกไทล์ คือการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งในแนวแกน x และในแนวแกน y ไปพร้อม ๆกันโดยที่วัตถุมีความเร่งเฉพาะในแนวแกน y คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก $\vec{g}$ ส่วนในแนวแกน x วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวลักษณะเส้นทางของการเคลื่อนที่แบบนี้จะเป็นเส้นโค้งพาราโบลาดังแสดงในรูป 2.19 เริ่มต้นวัตถุมีความเร็ว $\vec{v_i}$ ทำมุมกับแกน x เป็นมุม θ_i ดังนั้นองค์ประกอบของความเร็วตามแกน x และแกน y คือ

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \quad \text{และ} \quad v_{yi} = v_i \sin\theta_i \tag{2.25}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x</u> เมื่อ $x_i = 0, a_x = 0$ ดังนั้นจะได้ว่าระยะทางและความเร็วของวัตถุที่เวลาใด ๆในแนวแกน x มีค่าเป็น

$$\Delta x = x_f - x_i = v_{xi}t = (v_i \cos\theta_i)t \tag{2.26}$$

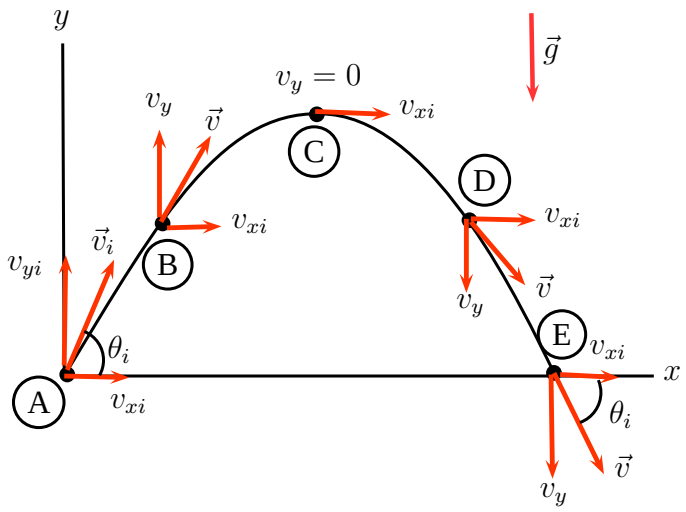
$$v_{xf} = v_{xi} = v_i \cos\theta_i = \text{ค่าคงที่} \tag{2.27}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวแกน y</u> เมื่อ $y_i = 0, a_y = -g$ ดังนั้นระยะการกระจัดและความเร็วในแนวแกน y จึงมีค่าเป็นดังนี้

$$\Delta y = y_f - y_i = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_i \sin\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.28}$$

$$v_{yf} = v_{yi} - gt = (v_i \sin\theta_i) - gt \tag{2.29}$$

<u>การคำนวณหาระยะพิสัยและระยะสูงสุดของการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์</u> ที่จุดสูงสุดของการเคลื่อนที่จะได้ว่า ความเร็วในแนวแกน y มีค่าเป็นศูนย์ $v_{vf} = 0$ ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการ



รูปที่ 2.19: การเคลื่อนของวัตถุแบบโปรเจกไทล์ในระนาบ xy

ขึ้นไปถึงจุดสูงสุดหาได้ดังนี้

$$v_{vf} = v_{yi} - gt_A \Rightarrow 0 = v_i \sin\theta_i - gt_A$$
$$t_A = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$

เมื่อแทนค่าของเวลาลงในสมการของการกระจัดในแนวแกน y ทำให้ได้ระยะสูงสุด (maximum height: h) มีค่าเป็นดังนี้

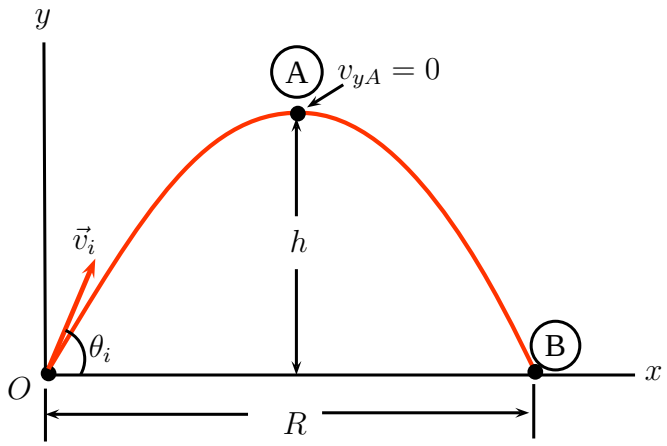
$$h = (v_i \sin\theta_i)\frac{v_i \sin\theta_i}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$
$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} \tag{2.30}$$

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวแกน x จะได้ว่าเวลาที่ใช้ตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งวัตถุตกลงมาอยู่ที่ระดับเดิมจะมีค่าเป็นสองเท่าของเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนขึ้นไปถึงจุดสูงสุดนั้นคือ $2t_A$ ดังนั้น ระยะพิสัย (horizontal range: R) หาได้ดังนี้

$$R = v_{xi}t_B = (v_i \cos\theta_i)(2t_A)$$
$$= (v_i \cos\theta_i)\frac{2v_i \sin\theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$
$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \tag{2.31}$$

จากสมการของระยะพิสัย จะพบว่าระยะทางไกลสุดจะขึ้นอยู่กับขนาดของความเร็วต้นและมุมที่ความเร็วต้นทำกับแนวระดับ ดังนั้นถ้าต้องการให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะพิสัยมากที่สุดที่

ความเร็วต้นคงที่ค่าหนึ่งนั้น มุมที่ความเร็วต้นกระทำกับแกน x จะต้องมีค่าเท่ากับ 45° หรือ $\sin 2\theta_i = 1$ นั่นคือ $2\theta_i = 90^\circ \Rightarrow \theta_i = 45^\circ$ นั่นเอง



รูปที่ 2.20: ระยะพิสัยและระยะสูงสุดของการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์

ตัวอย่างที่ 6 เครื่องบินลำหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปในแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 40 m/s และบินอยู่สูงจากระดับพื้นดิน 100 m ถ้าโยนวัตถุลงมาจากเครื่องบิน วัตถุจะตกลงมากระทบพื้นดินที่ตำแหน่งใดเทียบกับจุดที่ปล่อยลงมาดังรูป 2.21 และความเร็วของวัตถุขณะที่ตกกระทบพื้น

วิธีทำ ขณะที่ปล่อยวัตถุให้ตกลงมาความเร็วเริ่มต้นของวัตถุจะเท่ากับความเร็วของเครื่องบิน $v_{xi} = 40$ m/s $v_{yi}0$ และกำหนดให้ ณ จุดที่ปล่อย $x_i = 0, y_i = 0$ ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวราบหาได้จาก

$$x_f = v_{xi}t = 40t \tag{1}$$

หาเวลาตั้งแต่เริ่มปล่อยจนตกถึงพื้นจากสมการ

$$y_f = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -100 = 0 - \frac{1}{2}(9.8)t^2$$
$$t^2 = \frac{2(100)}{9.8} \Rightarrow t = 4.52 \quad \text{s}$$

แทนค่า t ลงในสมการ (1) ทำให้ได้ระยะการกระจัดตามแนวราบเป็นดังนี้

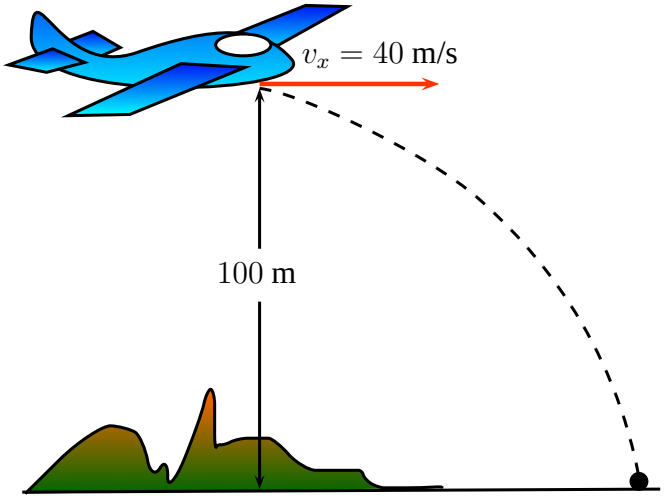
$$x_f = (40)(4.52) = 181 \quad \text{m}$$

องค์ประกอบของความเร็วของวัตถุในแนวแกน x และแกน y หาได้ดังนี้คือ

$$v_{xf} = v_{xi} = 40 \quad \text{m/s}$$
$$v_{yf} = v_{yi} - gt = 0 - (9.8)(4.52) = -44.3 \quad \text{m/s}$$

ดังนั้นขนาดความเร็วของวัตถุขณะที่ตกกระทบพื้นมีค่าเป็น

$$v = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-44.3)^2} = 59.9 \quad \text{m/s}$$



รูปที่ 2.21: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 6

ตัวอย่างที่ 7 นักสกีเคลื่อนที่พุ่งออกจากรางสกีตามแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 25 m/s ดังรูป 2.22 นักสกีจะตกกระทบพื้นที่ตำแหน่งใดเมื่อเทียบกับตำแหน่งเริ่มต้นกำหนดให้ระดับความชันเอียงทำมุมกับแนวระดับเป็นมุม 30° และระยะทางตามแนวพื้นเอียงที่วัดจากตำแหน่งเริ่มต้นจนถึงจุดที่ตกกระทบคือ d

วิธีทำ การกระจัดตามแนวแกน x และตามแนวแกน y หาได้จาก

$$\Delta x = x_f - x_i = v_{xi}t = 25t \tag{1}$$
$$\Delta y = y_f - y_i = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.8)t \tag{2}$$

เนื่องจาก $\Delta x = d\cos 35^\circ$ และ $\Delta y = -d\sin 35^\circ$ ดังนั้นเมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (1) และ (2) ทำให้

$$d\cos 35^\circ = 25t \tag{3}$$

$$-d\sin 35^\circ = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 \tag{4}$$

สมการ (4) หารด้วยสมการ (3) ทำให้ได้

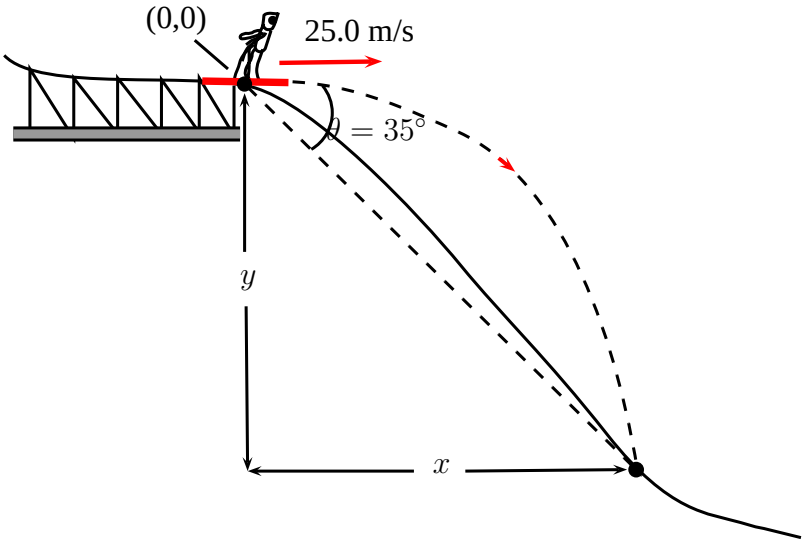
$$\tan 35^\circ = \frac{9.8}{2(25)}t \Rightarrow t = \frac{(50)(\tan 35^\circ)}{9.8} = 3.57 \quad \text{s}$$

$$d = \frac{(25)(3.57)}{\cos 35^\circ} = 109 \quad \text{m}$$

และจาก d ที่ได้แทนกลับลงในสมการ (3) และ (4) ทำให้ระยะการกระจัดทั้งในแนวแกน x และแกน y มีค่าเป็นดังนี้

$$\Delta x = (109)\cos 35^\circ = 89.3 \quad \text{m}$$

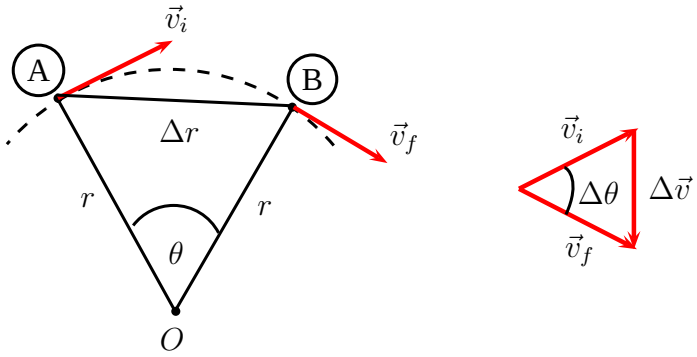
$$\Delta y = -(109)\sin 35^\circ = -62.5 \quad \text{m}$$



รูปที่ 2.22: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 7

2.3.3 การเคลื่อนที่แบบวงกลม

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมหรือเป็นเส้นทางโค้งความเร็วของวัตถุจะมีการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลาอาจจะมีการเปลี่ยนเฉพาะทิศทางอย่างเดียว ขณะที่ขนาดของความเร็วยังคงที่ (ซึ่งเรียกว่าเป็นเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงตัว) หรืออาจจะเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางไปพร้อม ๆ กันก็ได้ ผลจากการเปลี่ยนความเร็วนี้ทำให้ให้เกิดความเร่งในการเคลื่อนที่ขึ้นดังแสดงในรูป 2.23 พิจารณากรณีที่วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r ด้วยอัตราเร็วคงที่ดังนั้น ความเร่งที่เกิดขึ้นจึงมีเฉพาะในแนวเข้าสู่จุดศูนย์กลางของวงกลม หรือเรียกว่าความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง $(\vec{a_r})$



รูปที่ 2.23: แสดงการเปลี่ยนทิศของความเร็วเมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

$$\vec{a_r} = \frac{\vec{v_f} - \vec{v_i}}{t_f - t_i} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \tag{2.32}$$

จากรูป 2.23 โดยพิจารณาจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย ทำให้ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \Delta v = \frac{v\Delta r}{r}$$

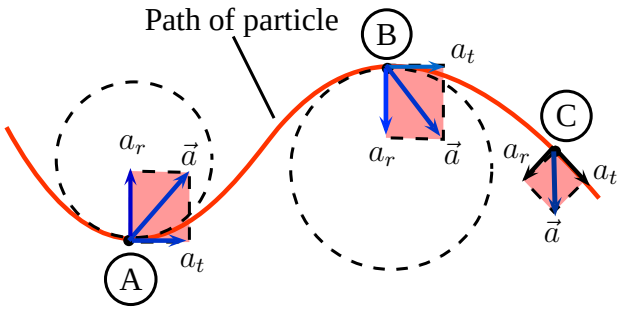
จากนิยามของความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางทำให้ได้ขนาดของความเร่งนี้มีค่าเป็น

$$a_r = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}.\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \tag{2.33}$$

สำหรับกรณีที่วัตถุเคลื่อนเป็นเส้นทางโค้งซึ่งความเร็วมีการเปลี่ยนค่าทั้งขนาดและทิศทางอยู่ตลอดเวลาดังรูป2.24 ความเร่งของวัตถุจึงมีทั้งสององค์ประกอบคือมีความเร่งในแนวเดียวกันกับการเคลื่อนที่ $(\vec{a_t})$ กับความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง $(\vec{a_r})$ นั่นคือ

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_r} \tag{2.34}$$

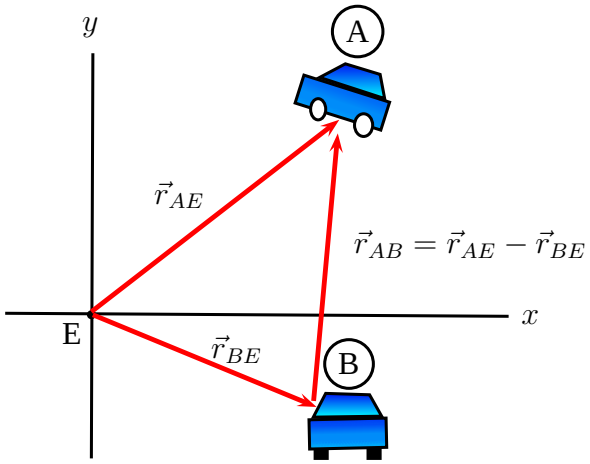
โดยที่ขนาดความเร่งในแนวเส้นสัมผัสหาได้จาก $a_t = d|v|/dt$ และขนาดความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง $a_r = v^2/r$



รูปที่ 2.24: แสดงการเปลี่ยนแปลงความเร็วทั้งขนาดและทิศทางเมื่อเคลื่อนที่เป็นเส้นทางโค้ง

2.3.4 ความเร็วสัมพัทธ์

ความเร็วสัมพัทธ์ (relative velocity) คือการวัดความเร็วของสองผู้สังเกตุที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่แตกต่างกัน กล่าวคือผู้สังเกตุหนึ่งกำลังเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับอีกผู้สังเกตุ ดังนั้นความเร็วของวัตถุที่วัดได้นั้นจึงขึ้นอยู่กับความเร็วของผู้สังเกตุนั้นเทียบกับวัตถุ เช่น บนถนนทางด่วนมีผู้สังเกตุคนหนึ่งที่ยืนหยุดนิ่งอยู่ข้างถนนทำการวัดความเร็วรถยนต์คันหนึ่งได้ 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ส่วนผู้สังเกตุอีกคนนั่งอยู่บนรถบรรทุกที่กำลังวิ่งไปในทิศทางเดียวกันด้วยความเร็ว 50 กิโลเมตรต่อชั่วโมงผู้สังเกตุที่อยู่บนรถบรรทุกจะวัดความเร็วของรถยนต์ได้เป็น 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมงเท่านั้น



รูปที่ 2.25: ตำแหน่งของรถยนต์ A เทียบกับตำแหน่งรถยนต์ B

ในการวัดความเร็วจะขึ้นอยู่กับกรอบอ้างอิง (reference frame) ของผู้สังเกต ซึ่งกรอบอ้างอิง

ก็คือระบบพิกัดนั่นเอง สำหรับในกรณีสองมิติการคำนวณหาความเร็วสัมพัทธ์อาจจะดูสับสน ดังนั้นจึงต้องมีแนวทางที่เป็นระบบในการวิเคราะห์ดังแสดงในรูป 2.25 กำหนดให้ E เป็นผู้สังเกตุ สมมติว่าหยุดนิ่งเทียบกับพื้นดิน และรถยนต์สองคันระบุด้วย A และ B โดยที่

$$\vec{r}_{AE} = \text{เวกเตอร์บอกตำแหน่งของรถยนต์ A เทียบกับ E}$$
$$\vec{r}_{BE} = \text{เวกเตอร์บอกตำแหน่งของรถยนต์ B เทียบกับ E}$$
$$\vec{r}_{AB} = \text{เวกเตอร์บอกตำแหน่งของรถยนต์ A เทียบกับ B}$$

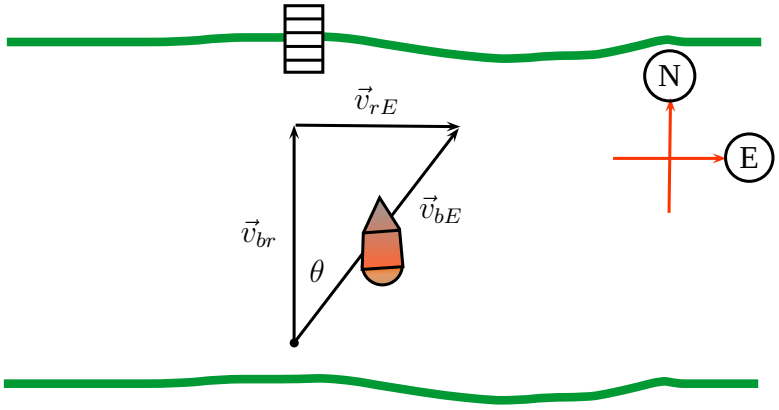
ดังนั้นการกระจัดของรถยนต์ A เทียบกับรถยนต์ B คือ

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{AE} - \vec{r}_{BE} \tag{2.35}$$

และความเร็วสัมพัทธ์ของรถยนต์ A เทียบกับ B หาได้จาก

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AE} - \vec{v}_{BE} \tag{2.36}$$

ตัวอย่างที่ 8 เรือลำหนึ่งหันหัวเรือไปทางทิศเหนือเพื่อข้ามแม่น้ำไปยังฝั่งตรงข้ามด้วยความเร็ว 10 km/h เทียบกับน้ำดังรูป 2.26 กระแสน้ำไหลไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 5 km/h เทียบกับพื้นดิน จงหาความเร็วของเรือเมื่อเทียบกับผู้สังเกตุที่อยู่ที่ฝั่งด้านตรงข้าม



รูปที่ 2.26: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 7

วิธีทำ กำหนดให้ $\vec{v}_{BR}$ = ความเร็วของเรือเทียบกับน้ำ $\vec{v}_{BE}$ คือ ความเร็วของเรือเทียบกับ

พื้นดิน และ $\vec{v}_{RE}$ คือ ความเร็วของกระแสน้ำเทียบกับพื้นดิน ดังนั้น

$$\vec{v}_{BR} = \vec{v}_{BE} - \vec{v}_{RE}$$

ความเร็วของเรือเทียบกับผู้สังเกตุที่อยู่บนฝั่งตรงข้ามหาได้ดังนี้คือ

$$\vec{v}_{BE} = \vec{v}_{BR} + \vec{v}_{RE}$$

ขนาดของความเร็วคือ

$$v_{BE} = \sqrt{(v_{BR}^2) + (v_{RE}^2)} = \sqrt{(5^2) + (10)^2} = 11.2 \quad \text{km/h}$$

ทิศทางหาได้จาก

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{BR}}{v_{RE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 26.6^\circ$$

นั่นคือเรือจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วขนาด 11.2 km/h ในทิศทำมุม 26.6 องศา ตะวันออกเฉียงเหนือเมื่อเทียบกับพื้นดิน

2.4 แบบฝึกหัด

1. เวกเตอร์สองอันทำมุม 110 องศา เวกเตอร์อันแรกยาว 20 หน่วย ทำมุม 40 องศากับเวกเตอร์ลัพธ์ จงหาขนาดของเวกเตอร์ที่สอง และขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์
2. กำหนดให้ $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ และ $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ จงหา $\vec{A} + \vec{B}$ และ $\vec{A} - \vec{B}$
3. กำหนดให้ $\vec{A} + \vec{B} = 11\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ และ $\vec{A} - \vec{B} = 5\hat{i} + 11\hat{j} + 9\hat{k}$ จงหา $\vec{A}$ และ $\vec{B}$
4. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$
5. แรงสามแรงที่กระทำต่ออนุภาคหนึ่งมีค่าดังนี้ $\vec{F}_1 = 20\hat{i} - 36\hat{j} + 73\hat{k}$, $\vec{F}_2 = -17\hat{i} + 21\hat{j} - 46\hat{k}$ และ $\vec{F}_3 = -12\hat{k}$ จงหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์
6. จงหาค่าของ a ที่ทำให้เวกเตอร์ $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ และ $\vec{B} = 3\hat{i} + a\hat{j} - 2\hat{k}$ ตั้งฉากกัน
7. ถ้ากำหนดให้ $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ และ $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ จงหา
   (ก) ขนาดของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$
   (ข) $\vec{A} \cdot \vec{B}$
   (ค) $\vec{A} \times \vec{B}$

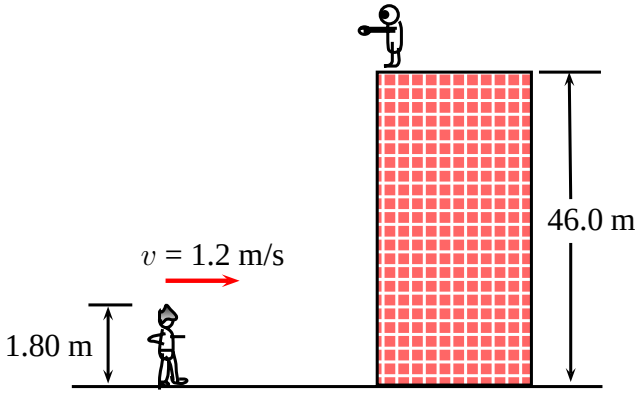
8. รถบรรทุกเริ่มเคลื่อนที่จากสภาวะหยุดนิ่งด้วยความเร่ง 5 m/s^2 จงหาอัตราเร็วและระยะทางการเคลื่อนที่หลังจาก 4 วินาทีผ่านพ้นไป

9. กล่องใบหนึ่งไถลลงตามพื้นเอียงด้วยความเร่ง เริ่มต้นจากหยุดนิ่งและมีความเร็วเป็น 2.7 m/s ในเวลา 3 วินาที จงหา ความเร่งและระยะทางการเคลื่อนที่ใน 6 วินาทีแรก

10. รถไฟใต้ดินขบวนหนึ่งเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งและเร่งด้วยอัตรา 1.60 m/s^2 เป็นเวลานาน 14 วินาที แล้วแล่นต่อด้วยอัตราเร็วคงตัวเป็นเวลา 70 วินาที และแล่นช้าลงด้วยอัตรา 3.50 m/s^2 จนกระทั่งหยุดที่สถานีถัดไป จงหาระยะทางทั้งหมดที่แล่นได้

11. ถ้าตัวหมัดกระโดดขึ้นตรง ๆได้สูง 0.44 m อัตราเร็วตอนต้นที่มันกระโดดจากพื้นเป็นเท่าใด และตัวหมัดลอยอยู่ในอากาศได้นานเท่าใด

12. ทิ้งก้อนอิฐก้อนหนึ่งลงมา (อัตราเร็วต้นเป็นศูนย์) จากหลังคาตึก ก้อนอิฐกระทบพื้นในเวลา 2.50 วินาที ถ้าไม่คิดแรงต้านของอากาศ จงหา
    (ก) ตึกสูงเท่าใด
    (ข) ความเร็วของก้อนอิฐเป็นเท่าใดก่อนกระทบพื้น

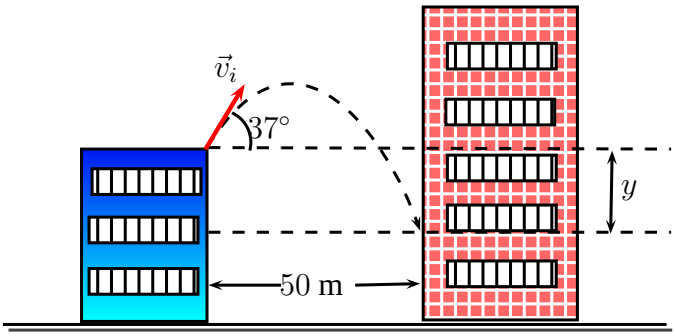


รูปที่ 2.27: สำหรับโจทย์ข้อที่ 14

13. รถยนต์คันหนึ่งและรถบรรทุกคันหนึ่งเริ่มแล่นจากจุดหยุดนิ่งที่เวลาเดียวกันโดยรถยนต์อยู่หลังรถบรรทุกเป็นระยะขนาดหนึ่ง รถบรรทุกมีความเร่งคงตัว 2.10 m/s^2 และรถยนต์มีความเร่ง 3.40 m/s^2 รถยนต์แล่นทันรถบรรทุกเมื่อรถบรรทุกเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 40.0 m
    (ก) รถยนต์ใช้เวลานานเท่าใดในการไล่ทันรถบรรทุก
    (ข) ตอนตั้งต้นรถยนต์อยู่ห่างจากรถบรรทุกเท่าใด
    (ค) รถแต่ละคันมีอัตราเร็วเท่าใดขณะอยู่เคียงกัน

14. นักศึกษาคนหนึ่งอยู่บนหลังคาตึกฟิสิกส์ซึ่งสูง 46.0 m จากพื้น ดังรูป 2.27 อาจารย์สอนฟิสิกส์ท่านหนึ่งสูง 1.80 m กำลังเดินอยู่ข้างตึกด้วยอัตราเร็วคงตัว 1.20 m/s ถ้านักศึกษาคนนี้ต้องการทิ้งไข่ลงบนหัวของอาจารย์ฟิสิกส์คนนี้ นักศึกษาควรจะปล่อยไข่ตอนที่อาจารย์อยู่ที่ไหน ให้สมมติว่าไข่ตกอย่างเสรี

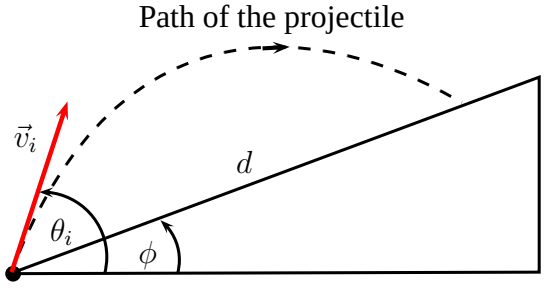
15. ขว้างลูกบอลจากยอดตึกแรกไปยังตึกที่สองด้วยความเร็วต้น 20 m/s ในแนวทำมุม 37 องศากับแนวราบดังรูป 2.28 จงหา
    (ก) ลูกบอลตกกระทบผนังตึกที่สองที่ตำแหน่งสูงหรือต่ำกว่าระดับเดิมเท่าไร
    (ข) ความเร็วที่ลูกบอลกระทบผนัง
    (ค) เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่เป็นเท่าไร



รูปที่ 2.28: สำหรับโจทย์ข้อที่ 15

16. จากรูป 2.29 จงพิสูจน์ให้เห็นว่า การเคลื่อนแบบโปรเจคไตน์ตามพื้นเอียง มีระยะ d เป็นไปตามสมการข้างล่างนี้

$$d = \frac{2v_i^2 \cos\theta_i \sin(\theta_i - \phi)}{g\cos^2\phi}$$



รูปที่ 2.29: สำหรับโจทย์ข้อที่ 16

บทที่ 3

แรงและกฎการเคลื่อนที่

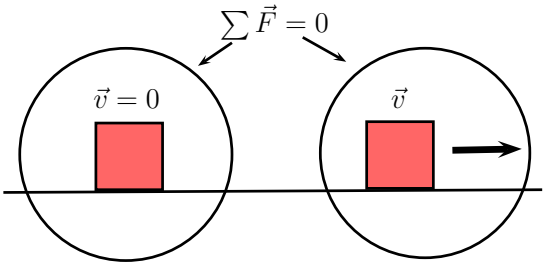
3.1 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

3.1.1 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน

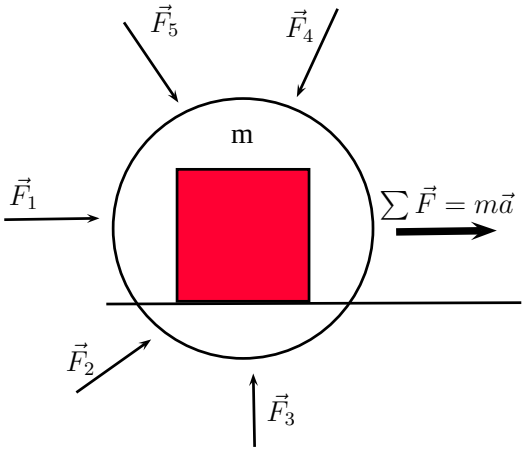
กฎข้อที่ 1 ของนิวตัน กล่าวว่าเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุวัตถุที่หยุดนิ่งก็จะหยุดนิ่งต่อไปและวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ก็จะเคลื่อนที่ต่อไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่นั่นคือวัตถุจะรักษาสภาพการเคลื่อนที่ตามเดิมตราบใดที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำหรือแรงลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ในสภาวะการณ์แบบนี้กล่าวได้ว่าวัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล และเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = 0 \tag{3.1}$$

แนวโน้มของวัตถุในการต้านสภาพการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงภายนอกมากระทำเรียกว่าความเฉื่อย (Inertia) และมวลเป็นสมบัติของวัตถุที่บ่งบอกว่าวัตถุนั้นมีความเฉื่อยมากน้อยแค่ไหนซึ่งเป็นสมบัติที่ไม่ขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมและวิธีการวัด สำหรับการวัดในระบบมาตราฐานสากล (SI unit) มวลมีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg) ดังนั้นวัตถุใดที่มีมวลมากจะมีความเฉื่อยมาก นั่นหมายความว่าจะต้องใช้แรงมากเพื่อที่จะทำให้วัตถุมีการเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่ และจากกฎข้อที่1 ถ้าแรงลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์กระทำต่อวัตถุวัตถุจะไม่มีความเร่งหรือความเร่งเป็นศูนย์ ($\vec{a} = 0$) ในการบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุจะต้องมีกรอบอ้างอิง ที่เรียกว่ากรอบเฉื่อย (Inertia frame) ซึ่งเป็นกรอบอ้างอิงที่ไม่มีความเร่ง ดังนั้น กฎข้อที่ 1 ของนิวตันจึงเรียกอีกอย่างว่าเป็นกฎแห่งความเฉื่อย



รูปที่ 3.1: วัตถุหยุดนิ่งอยู่กับที่ ($\vec{v} = 0$) หรือ เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วคงตัว ($\vec{v} =$ ค่าคงที่)



รูปที่ 3.2: แรงลัพธ์ที่เกิดจากการรวมแบบเวกเตอร์ของแรงย่อย $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$ มีค่าไม่เป็นศูนย์กระทำต่อวัตถุทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยความเร่ง $\vec{a}$

3.1.2 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

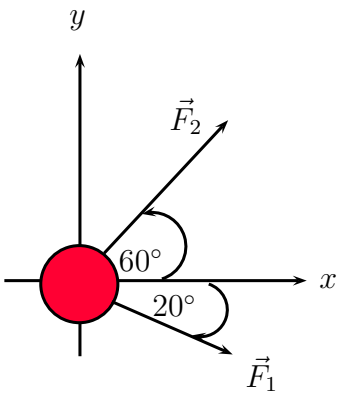
กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน กล่าวว่า เมื่อมีแรงลัพธ์ที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำกระทำวัตถุวัตถุจะเคลื่อนที่ไป ด้วยความเร่งโดยที่ความเร่งนั้นจะแปรผันตรงกับแรงลัพธ์ที่มากระทำและแปรผันผกผันกับมวลวัตถุดังสมการที่ 3.2 ความเร่งของวัตถุจะมีทิศทางเดียวกับทิศของแรงลัพธ์ดังรูปที่ 3.2

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{3.2}$$

เมื่อ $\vec{a}$ คือ ความเร่ง และ m คือ มวลวัตถุและจากสมการที่ 3.2 อาจจะเขียนในรูปแบบของแรงองค์ประกอบตามแกน x, y และ z ได้ดังนี้

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z \tag{3.3}$$

ในระบบ SI แรงมีหน่วยเป็น นิวตัน (N) โดยที่1 N = 1 kg.m/s^2



รูปที่ 3.3: อนุภาคมวล m ถูกแรงสองแรงกระทำให้เคลื่อนที่ในระนาบ xy

ตัวอย่างที่ 1 อนุภาคอันหนึ่งมีมวล 0.3 kg ถูกแรงสองแรงกระทำดังรูป 3.3 แรง $\vec{F}_1$ มีขนาด 5.0 N และแรง $\vec{F}_2$ มีขนาด 8.0 N จงหาขนาดและทิศทางของความเร่งของอนุภาคนี้

วิธีทำ แรงลัพธ์ที่กระทำในแนวแกน x คือ

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{1x} + F_{2x} = F_1\cos(-20^\circ) + F_2\cos 60^\circ \\ &= (5.0)(0.940) + (8.0)(0.500) = 8.7 \quad \text{N}\end{aligned}$$

แรงลัพธ์ในแนวแกน y คือ

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} = F_1\sin(-20^\circ) + F_2\sin 60^\circ \\ &= (5.0)(-0.342) + (8.0)(0.866) = 5.2 \quad \text{N}\end{aligned}$$

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันในรูปแบบของแรงลัพธ์องค์ประกอบตามแกน x และ y ทำให้ได้ความเร่งองค์ประกอบตามแกนดังกล่าวเป็นดังนี้

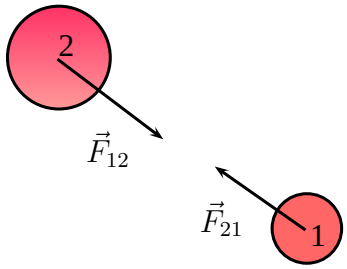
$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{8.7}{0.30} = 29 \quad \text{m/s}^2$$
$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{5.2}{0.30} = 17 \quad \text{m/s}^2$$

ดังนั้น ขนาดของความเร่งจึงมีค่าเป็น

$$a = \sqrt{(29)^2 + (17)^2} = 34 \quad \text{m/s}^2$$

และมีทิศเทียบกับแกน $+x$ คือ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 30^\circ$$



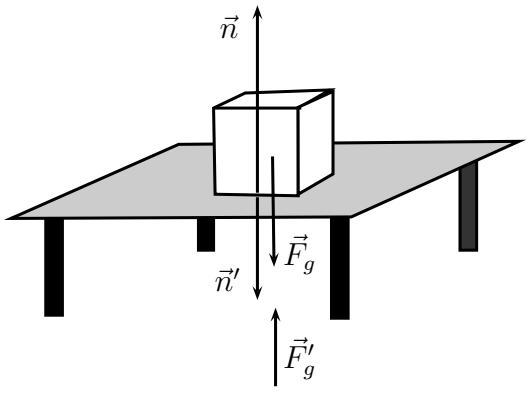
รูปที่ 3.4: วัตถุ 1 และวัตถุ 2 ออกแรงดึงดูดซึ่งกันและกันด้วยขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้าม

3.1.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน

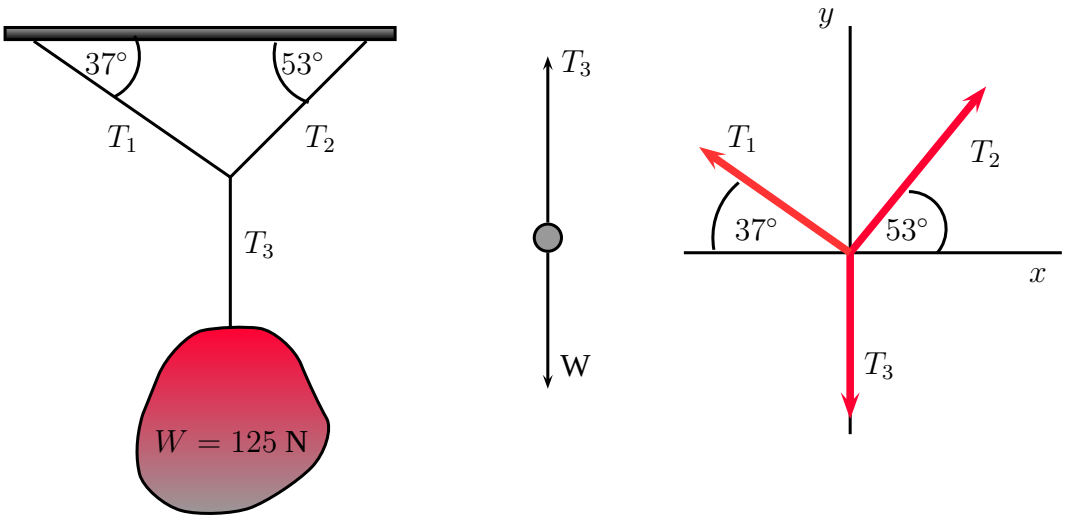
กฎข้อที่ 3 ของนิวตัน กล่าวว่า ถ้าวัตถุสองอันมีอันตรกิริยาต่อกัน แรงที่วัตถุ 1 กระทำต่อวัตถุ 2 ($\vec{F}_{12}$) มีขนาดเท่ากับแรงที่วัตถุ 2 กระทำต่อวัตถุ 1 ($\vec{F}_{21}$) แต่มีทิศตรงกันข้าม นั่นคือ

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{3.4}$$

เมื่อ $\vec{F}_{12}$ เป็นแรงกิริยา (Action force) และ $\vec{F}_{21}$ เป็นแรงปฏิกิริยา (Reaction force) แรงสองแรงนี้เป็นแรงคู่กิริยาซึ่งกระทำที่วัตถุคนละอันดังรูปที่ 3.4 พิจารณากล่องใบหนึ่งวางนิ่งอยู่บนโต๊ะดังรูปที่ 3.5 เราสามารถระบุแรงคู่กิริยาได้ดังนี้คือ แรงที่กล่องกดลงบนพื้นโต๊ะ ($\vec{n}'$) จะมีแรงปฏิกิริยาเป็น แรงที่พื้นโต๊ะดันกล่อง ($\vec{n}$) ในขณะที่แรงกิริยาที่โลกดึงดูดกล่องเข้าหา ($\vec{F}_g$) จะมีแรงปฏิกิริยาเป็นแรงที่กล่องดึงดูดโลกเข้าหา ($\vec{F}_g'$) แต่จะเห็นว่า แรง $\vec{n}$ กับแรง $\vec{F}_g$ ไม่ใช่แรงคู่กิริยา เพราะว่าแรงทั้งสองกระทำที่วัตถุอันเดียวกัน นั่นคือ$\vec{F}_g = -\vec{F}_g'$ และ $\vec{n} = \vec{n}'$



รูปที่ 3.5: แสดงแรงคู่กิริยาของกล่องลูกบาศก์ที่วางอยู่บนโต๊ะ



(a) (b) (c)

รูปที่ 3.6: (a) วัตถุหนัก 125 N แขวนอยู่นิ่งด้วยเส้นเชือกสามเส้น (b) และ (c) แสดงแผนภาพวัตถุอิสระที่แรงกระทำต่อก้อนวัตถุและจุดเชื่อมต่อของเส้นเชือกทั้งสามตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2 วัตถุก้อนหนึ่งหนัก 120 N แขวนอยู่นิ่งด้วยเส้นเชือกดังรูป 3.6 จงหาขนาดแรงตึงในเส้นเชือกทั้งสามเส้นนี้

วิธีทำ เมื่อวัตถุหยุดนิ่งแสดงว่าแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือวัตถุอยู่ในสมดุล ดังนั้นจากกฎข้อที่ 1 ของนิวตัน จะได้ว่า $\sum \vec{F} = 0$ หรือ

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

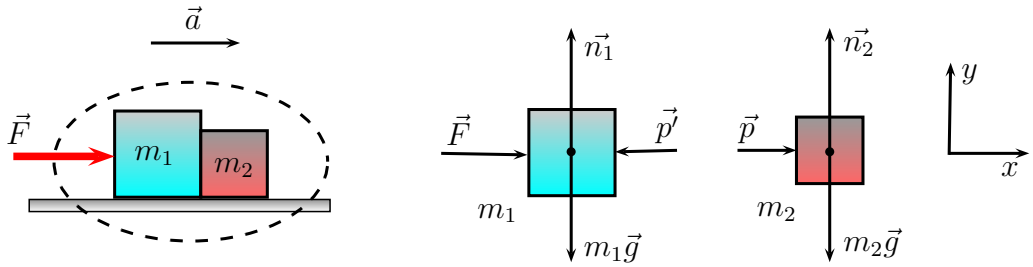
พิจารณาในรูป (b) จะได้ว่า

$$\sum F_y = T_3 = W = 125 \quad \text{N}$$

และในทำนองเดียวกัน จากรูป (c) จะได้

$$\sum F_x = -T_1 \cos 37^\circ + T_2 \cos 50^\circ = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = T_1 \sin 37^\circ + T_2 \sin 53^\circ - T_3 = 0 \tag{2}$$



(a) (b) (c)

รูปที่ 3.7: (a) วัตถุมวล m_1 และ m_2 ถูกผลักด้วยแรงที่คงที่ให้เคลื่อนไปตามแนวราบ (b) และ (c) แสดงแผนภาพของแรงกระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ

จากสมการ (1) หาค่า T_2 ในเทอม T_1 จากนั้นนำไปแทนลงในสมการ (2) เพื่อหา T_1 และ T_2 ดังนี้

$$T_2 = T_1\left(\frac{\cos 37^\circ}{\cos 53^\circ}\right) = 1.33\,T_1$$

$$T_1 \sin 37^\circ + 1.33\,T_1 \sin 53^\circ - 125 = 0$$

$$T_1 = 75.1 \quad \text{N}, \quad \text{และ} \quad T_2 = 99.9 \quad \text{N}$$

ตัวอย่างที่ 3 มวล m_1 และ m_2 วางติดกันอยู่บนพื้นราบที่ไม่มีความเสียดทาน ถ้าออกแรงขนาดคงที่ $\vec{F}$ ผลักวัตถุออกไปตามแนวระดับดังรูป 3.7 จงหาขนาดความเร่งของวัตถุทั้งสองและแรงกระทำระหว่างระหว่างวัตถุ

วิธีทำ พิจารณาในรูป (a) ความเร่งของวัตถุทั้งสองเท่ากันเนื่องจากวัตถุทั้งสองเคลื่อนไปพร้อมกันดังนั้น จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้ว่า

$$\sum F_x(system) = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

ขนาดของแรงที่กระทำระหว่างวัตถุทั้งสองหาได้โดยการเขียนแผนภาพของแรงลงบนวัตถุแต่ละอันดังรูป (b) และ (c) ซึ่งจะเห็นว่าแรง $\vec{p}$ กับ $\vec{p'}$ เป็นแรงภายในระบบ โดยพิจารณาจากรูป (c) เราจะได้ว่า

$$\sum F_x = p = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F$$

และโดยกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน สองแรงนี้เป็นแรงคู่กิริยาซึ่งมีขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้าม นั่นคือ

$$p = p' = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F$$

ตัวอย่างที่ 4 วัตถุสองอันมีมวล m_1 และ m_2 แขนด้วยเส้นเชือกและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืดดังรูป 3.8 จงหาขนาดของความเร่งของวัตถุทั้งสองและขนาดแรงตึงในเส้นเชือก

วิธีทำ จากรูป (a) วัตถุทั้งสองจะมีขนาดความเร่งเท่ากัน โดยใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตันกับการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_1 และมวล m_2 ได้ดังนี้ (ดูรูป (b) ประกอบ)

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y \tag{1}$$

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_y \tag{2}$$

นำสมการ (1) บวกกับสมการ (2) จะได้

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a_y + m_2 a_y$$

$$a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g \tag{3}$$

แทนค่าความเร่งจากสมการ (3) ลงในสมการ (1) หรือสมการ (2) ทำให้ได้ค่าแรงตึงในเส้นเชือก

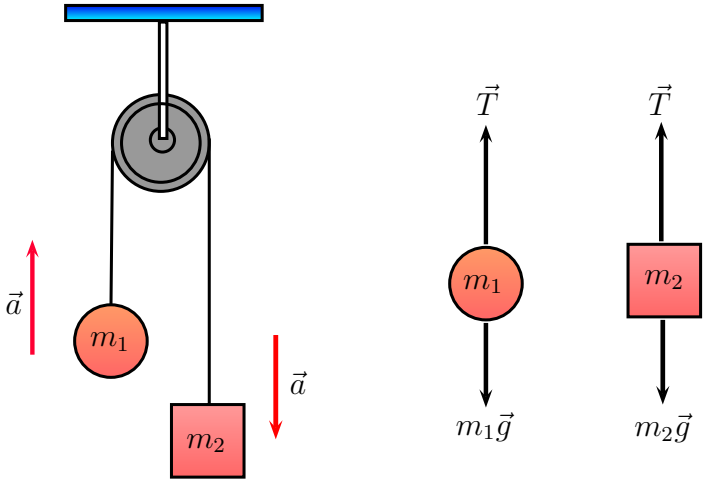
$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

ตัวอย่างที่ 5 วัตถุสองอันมีมวล m_1 และ m_2 ผูกติดกันด้วยเส้นเชือกมวลเบาและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืดปล่อยให้วัตถุมวล m_2 ไถลลงตามพื้นเอียงดังรูป 3.8 สมมติพื้นเอียงไม่มีความฝืด จงหาขนาดของความเร่งของวัตถุทั้งสองและขนาดแรงตึงในเส้นเชือก

วิธีทำ พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_1 จะได้ว่า

$$\sum F_x = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a \tag{2}$$



รูปที่ 3.8: (a) วัตถุมวล m_1 และ m_2 ผูกติดกันด้วยเชือกมวลเบาและคล้องผ่านรอกในแนวดิ่ง (b) แสดงแผนภาพของแรงกระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_2 และใส่แกนพิกัดให้เหมาะสม (ในที่นี้เลือกให้แกน x' ขนานกับพื้นเอียง) ทำให้ได้

$$\sum F_{x'} = m_2 g \sin\theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a \tag{3}$$

$$\sum F_{y'} = n - m_2 g \cos\theta = 0 \tag{4}$$

จากสมการ (2) แก้สมการเพื่อหาค่า T และนำค่าที่ได้ลงไปแทนในสมการ (3) เราจะได้ขนาดของความเร่งดังนี้

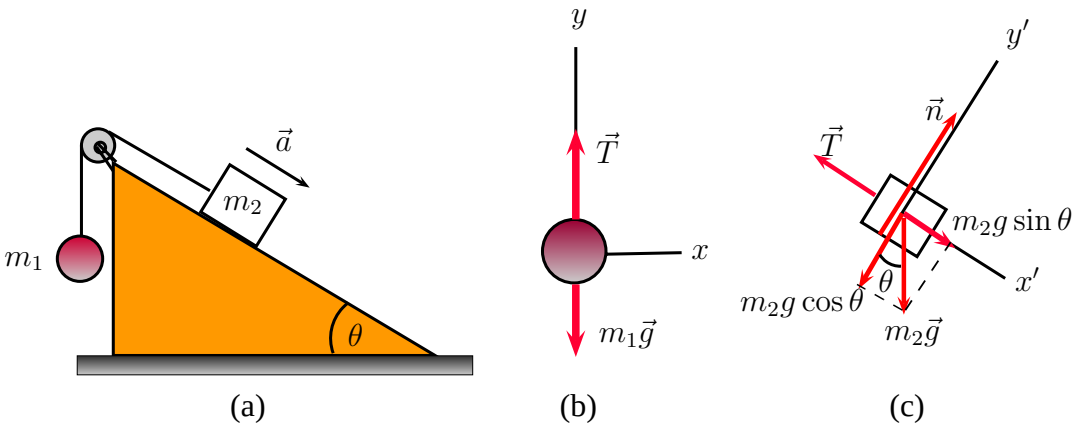
$$a = \frac{m_2 g \sin\theta - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

จากนั้นนำค่าความเร่งที่ได้แทนกลับลงในสมการ (2) จะได้ค่าแรงตึงในเส้นเชือก

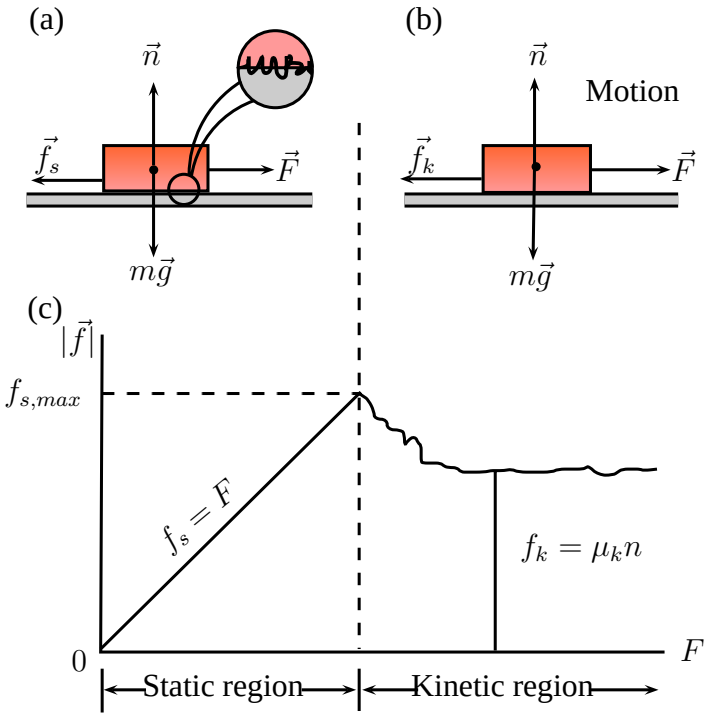
$$T = \frac{m_1 m_2 g(\sin\theta + 1)}{m_1 + m_2}$$

3.2 แรงเสียดทาน (Forces of Friction)

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่บนพื้นผิวหรือเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่มีความหนืด เช่น อากาศ น้ำ เป็นต้น จะมีความต้านทานการเคลื่อนที่เกิดขึ้นเนื่องจากวัตถุมีอันตรกิริยากับสิ่งที่อยู่รอบ ๆวัตถุ แรง



รูปที่ 3.9: (a) ระบบวัตถุมวล m_1 และ m_2 ที่ผูกติดกันด้วยเชือกมวลเบาและคล้องผ่านรอกซึ่งติดอยู่ที่ปลายด้านบนของพื้นเอียงและ (b) และ (c) แสดงแรงที่กระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ



รูปที่ 3.10: แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสอง (a) แรงเสียดทานสถิต (b) แรงเสียดทานจลน์ และกราฟแสดงผลการทดลองระหว่างแรงเสียดทานกับแรงจากภายนอก

ต้านที่เกิดขึ้นนี้ เรียกว่า แรงเสียดทาน (frictional force) ในกรณีของวัตถุที่เคลื่อนที่บนพื้นผิวใด ๆแรงเสียดทานนี้จะขึ้นอยู่กับผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสอง และมีทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่เสมอ สำหรับการเคลื่อนที่ใด แรงเสียดทานมี 2 ชนิด คือ แรงเสียดทานสถิต (static frictional force, $\vec{f}_s$) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อวัตถุหยุดนิ่ง และ แรงเสียดทานจลน์ (kinetic frictional force, $\vec{f}_k$) เป็นแรงที่เกิดขึ้นขณะที่วัตถุมีการเคลื่อนที่ ดังรูปที่ 3.10 และผลจากทดลองแสดงให้เห็นว่าแรงเสียดทานสถิตที่เกิดขึ้นจะแปรผันตรงกับการเพิ่มขึ้นของแรงภายนอก (Applied force, F) และเพิ่มขึ้นจนถึงค่าสูงสุดของแรงเสียดทานสถิต ($\vec{f}_{s,max}$) ซึ่ง ณ จุดนี้เองวัตถุเริ่มจะขยับที่จะเคลื่อนที่ และหลังจากจุดนี้ขนาดของแรงเสียดทานจะลดลงและคงที่ในช่วงนี้วัตถุจะเคลื่อนที่อยู่ภายใต้แรงเสียดทานจลน์ (ดูรูป 3.10(c) ประกอบ) และในการทดลองยังพบว่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุดและแรงเสียดทานจลน์จะแปรผันตรงกับขนาดของแรงตั้งฉาก (Normal force, $\vec{n}$) นั่นคือแรงเสียดทานสถิตสูงสุดมีค่าเท่ากับ

$$\vec{f}_{s,max} = \mu_s \vec{n} \tag{3.5}$$

และแรงเสียดทานจลน์มีค่าเท่ากับ

$$\vec{f}_k = \mu_k \vec{n} \tag{3.6}$$

เมื่อ μ_s และ μ_k คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตและค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ ตามลำดับ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสองนี้จะขึ้นอยู่กับธรรมชาติของผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสอง

ตัวอย่างที่ 6 วัตถุมวล m วางหยุดนิ่งอยู่ที่ปลายด้านบนพื้นเอียงดังรูป 3.11 พื้นเอียงมีความเสียดทาน จงหาว่ามุมเอียงจะมีค่าเป็นเท่าไรจึงจะทำให้วัตถุนี้เริ่มที่จะเคลื่อนที่
วิธีทำ ในขณะที่วัตถุหยุดนิ่ง จากกฎของนิวตันข้อที่ 1 จะได้ว่า

$$\sum F_x = mg\sin\theta - f_s = ma_x = 0 \tag{1}$$

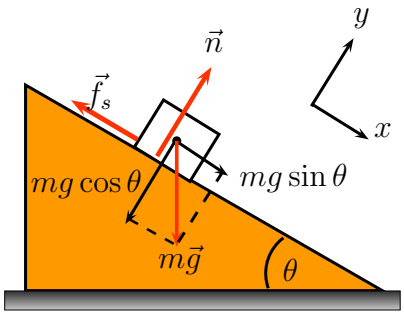
$$\sum F_y = n - mg\cos\theta = ma_y = 0 \tag{2}$$

จากสมการ (2) จะได้ $mg = \frac{n}{\cos\theta}$ และนำไปแทนลงในสมการ (1) ทำให้ได้

$$f_s = mg\sin\theta = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right)\sin\theta = n\tan\theta \tag{3}$$

เมื่อวัตถุเริ่มจะเคลื่อนที่แสดงว่าขนาดของแรงเสียดทานสถิตมีค่าสูงสุด นั่นคือ

$$f_s = f_{s,max} = \mu_s n$$



รูปที่ 3.11: วัตถุมวล m เริ่มจะเคลื่อนที่ตามพื้นเอียงที่มีความเสียดทาน

จากสมการที่ (3) ทำให้ได้มุมเอียงที่จะทำให้วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ (θ_c) ดังนี้

$$\begin{aligned} f_{s,max} &= \mu_s n = n\tan\theta_c \\ \mu_s &= \tan\theta_c \\ \theta_c &= \tan^{-1}(\mu_s) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 มวล m_1 วางอยู่บนพื้นที่มีความเสียดทาน นำมาผูกด้วยเชือกและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืด ปลายอีกด้านของเชือกผูกติดกับวัตถุมวล m_2 เมื่อออกแรงดึงวัตถุ m_1 ขนาด F นิวตันทำมุม θ กับแนวระดับดังรูปที่ 3.12 จงหาขนาดความเร่งของวัตถุทั้งสอง สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานจลน์ระหว่างผิววัตถุ m_1 กับพื้นมีค่าเท่ากับ μ_k

วิธีทำ พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_1 ในแนวแกน x และแกน y จะได้ว่า

$$\sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_1 a_x = m_1 a \tag{1}$$

$$\sum F_y = n + F\sin\theta - m_1 g = 0 \tag{2}$$

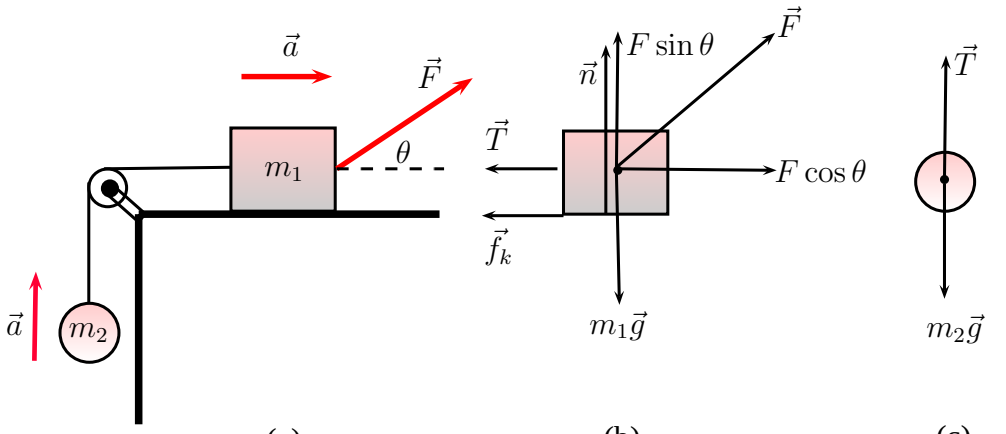
ในทำนองเดียวกันสำหรับการเคลื่อนที่ของมวล m_2 จะได้ว่า

$$\sum F_x = m_2 a_x = 0 \tag{3}$$

$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = m_2 a \tag{4}$$

จากสมการ (4) ทำให้ได้ $T = m_2(a+g)$ และจากแรงเสียดทานจลน์ $f_k = \mu_k n$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ (1) ทำให้ได้

$$\begin{aligned} F\cos\theta - \mu_k n - m_2(a+g) &= m_1 a \\ F\cos\theta - \mu_k(m_1 g - F\sin\theta) - m_2(a+g) &= m_1 a \end{aligned} \tag{5}$$



รูปที่ 3.12: (a) ออกแรงดึงมวล m_1 ให้เคลื่อนที่บนพื้นที่มีความเสียดทานและ มวล m_1 ผูกต่อกับมวล m_2 ด้วยเส้นเชือกมวลเบา (b) และ (c) แสดงแผนภาพของแรงที่กระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ

โดยการแก้สมการ (5) เพื่อหาค่าความเร่งของวัตถุทั้งสองทำให้ได้เป็นดังนี้

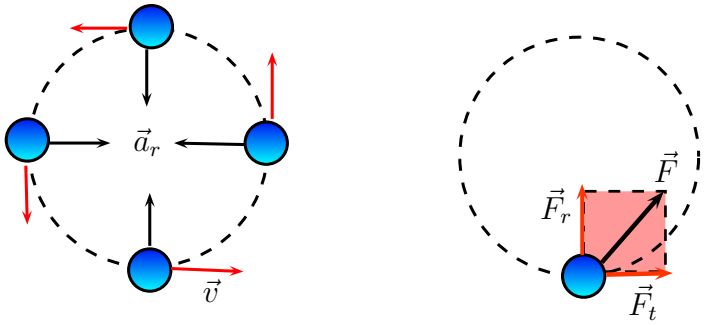
$$a = \frac{F\left(\cos\theta + \mu_k \sin\theta\right) - g\left(m_2 + \mu_k m_1\right)}{m_1 + m_2}$$

3.3 แรงและการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

3.3.1 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ จะเกิดความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม เนื่องจากวัตถุมีการเปลี่ยนทิศทางของความเร็วตลอดการเคลื่อนที่ เราเรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration, a_r) ดังรูป 3.13 (a) และจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 2 จะได้ขนาดของแรงลัพธ์ในแนวรัศมีเท่ากับผลคูณของมวลกับความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางนี้ นั่นคือ

$$\sum F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r} \tag{3.7}$$



(a) (b)

รูปที่ 3.13: การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ (a) และด้วยอัตราเร็วที่ไม่คงที่ (b)

3.3.2 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วไม่คงที่

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วไม่คงที่ คือมีการเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางของความเร็ว ทำให้เกิดความเร่งสองส่วนคือ ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสกับการเคลื่อนที่ (tangential acceleration, a_t) และความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง ดังนั้นแรงลัพธ์ที่เกิดขึ้นจึงเป็นผลรวมแบบเวกเตอร์ของแรงย่อยทั้งสองแนวดังรูป 3.13(b)

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_t = m(\vec{a}_r + \vec{a}_t) \tag{3.8}$$

ตัวอย่างที่ 8 วัตถุมวล m ถูกแขวนด้วยเชือกยาว L ถ้าวัตถุนี้ถูกทำให้เคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวระดับด้วยอัตราเร็วคงที่ v และเส้นเชือกทำมุมกับแนวดิ่งเป็นมุม θ ดังรูป 3.14 จงหาค่าอัตราเร็วของวัตถุนี้

วิธีทำ พิจารณาองค์ประกอบของแรงในแนวดิ่ง จะได้ว่า

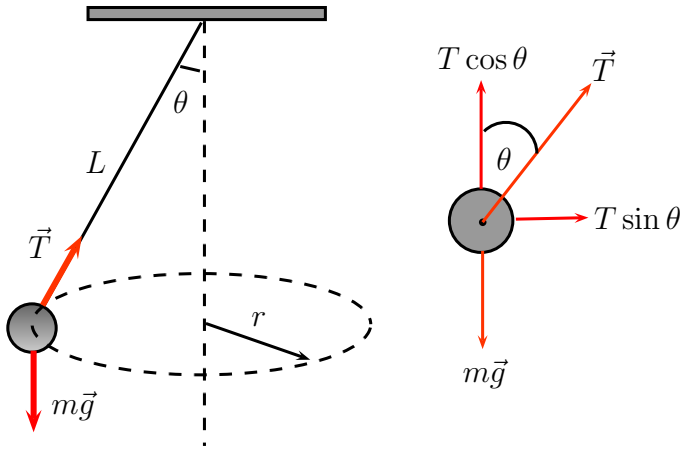
$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$
$$T\cos\theta = mg \tag{1}$$

และพิจารณาองค์ประกอบของแรงในแนวราบ จะได้ว่า

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma_r = m\frac{v^2}{r} \tag{2}$$

นำสมการ (2) หารด้วยสมการ (1) ทำให้ได้

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$
$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$



รูปที่ 3.14: การแกว่งแบบกรวยของลูกตุ้มนาฬิกาและแผนภาพของแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล m

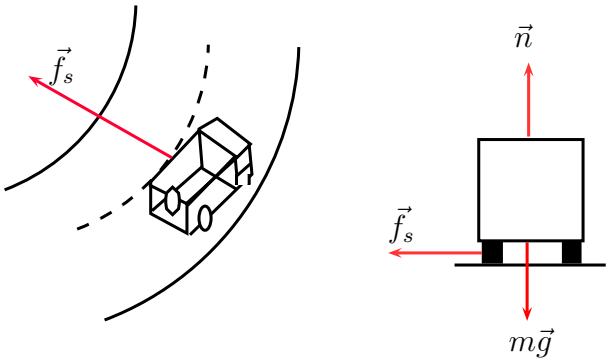
และจากความสัมพันธ์ $r = L\sin\theta$ ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุจึงมีค่าเท่ากับ

$$v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$

ตัวอย่างที่ 9 รถยนต์มวล 1500 กิโลกรัม กำลังวิ่งบนทางโค้งในแนวราบซึ่งมีรัศมีความโค้งเป็น35 เมตร ดังรูป 3.15 ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างยางรถกับพื้นถนนคือ 0.5 จงหาอัตราเร็วสูงสุดของรถยนต์ ที่ยังคงวิ่งบนทางโค้งได้อย่างปลอดภัยโดยไม่ไถลออกนอกเส้นทาง

วิธีทำ โดยการเขียนแผนภาพของแรงที่กระทำต่อรถยนต์ดังรูป (b) จะเห็นว่าแรงเสียดทานสถิตที่เกิดขึ้นนี้จะมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางความโค้ง และแรงนี้ทำให้รถยนต์เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางความโค้ง และจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ทำให้ว่า

$$f_s = ma_r = m\frac{v^2}{r}$$
$$n = mg$$



(a) (b)

รูปที่ 3.15: (a) แรงเสียดทานสถิตในทิศทางพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางความโค้งเพื่อบังคับให้รถเคลื่อนที่บนทางโค้งราบและ (b) แผนภาพวัตถุอิสระของรถยนต์

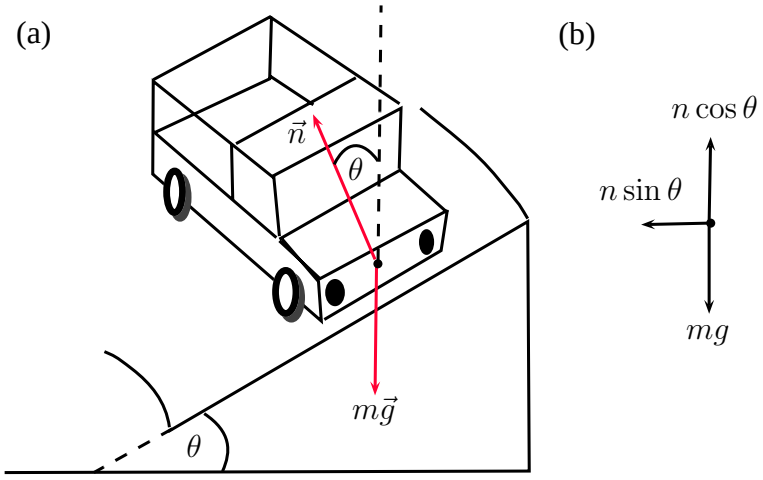
และอัตราเร็วสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อแรงเสียดทานสถิตมีค่าสูงสุด นั่นคือ

$$f_{s,max} = \mu_s n = m\frac{v_{max}^2}{r}$$
$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mu_s mgr}{m}} = \sqrt{\mu_s gr}$$
$$v_{max} = \sqrt{(0.5)(9.8\ \text{m/s}^2)(35\ \text{m})}$$
$$v_{max} = 13.1\text{m/s}$$

ตัวอย่างที่ 10 วิศวกรออกแบบถนนโค้งให้มีความเอียงโดยให้ขอบถนนด้านนอกสูงกว่าขอบด้านใน เมื่อรถยนต์แล่นเลี้ยวโค้งด้วยขนาดความเร็วพอดีตามที่วิศกรออกแบบไว้ และถ้าไม่คิดความเสียดทานระหว่างยางรถยนต์กับถนน ดังรูป 3.16 กำหนดให้อัตราเร็วในการเคลื่อนที่บนทางโค้งนี้เท่ากับ 13.4 m/s และรัศมีความโค้งเท่ากับ 50 m ถนนควรจะมีความเอียงด้วยมุมเท่าไร?

วิธีทำ เมื่อพิจารณาจากแผนภาพวัตถุอิสระ จะเห็นว่าองค์ประกอบของแรงปฏิกิริยาที่พื้นถนนกระทำต่อรถยนต์ $\vec{n}$ ในแนวราบทำให้เกิดความเร่งความสู่ศูนย์กลาง นั้นคือ

$$\sum F_r = ma_r$$
$$n\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \quad (1)$$
$$\sum F_y = 0$$
$$n\cos\theta = mg \quad (2)$$



รูปที่ 3.16: รถยนต์กำลังวิ่งบนถนนโค้งที่มีความเอียงเป็นมุม θ (a) และแผนภาพวัตถุอิสระของรถยนต์ (b)

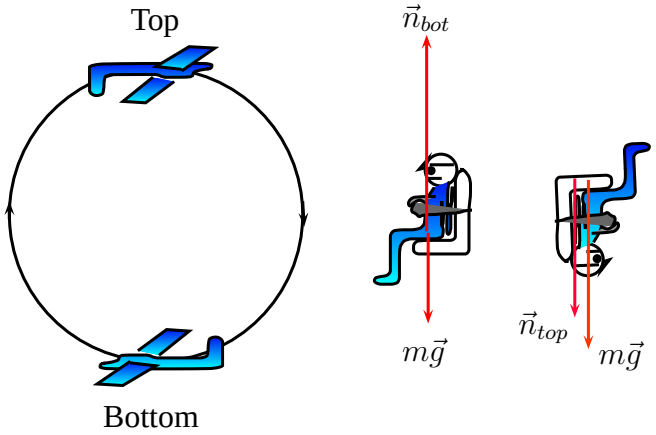
สมการ (1) หารด้วยสมการ (2) จะได้

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(13.4)^2}{(50)(9.8)}\right] = 20.1^\circ$$

ตัวอย่างที่ 11 นักบินมวล m กำลังขับเครื่องบินไอพ่นเป็นวงกลมในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงที่ 225 m/s รัศมีวงโคจร 2.70 km ดังรูปที่ 3.17 จงหาแรงที่เบาะนั่งกระทำต่อนักบินคนขับที่ตำแหน่ง
(ก) ด้านล่างสุดของวงกลม
(ข) ด้านบนสุดของวงกลม

วิธีทำ พิจารณาที่ตำแหน่งด้านล่างสุดของวงกลมจะได้แรงที่เบาะนั่งกระทำต่อนักบินเป็นดังนี้

$$\sum F_r = n_{bot} - mg = m\frac{v^2}{r}$$
$$n_{bot} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$
$$n_{bot} = mg\left[1 + \frac{(225)^2}{(2.7\times10^3)(9.8)}\right]$$
$$n_{bot} = 2.91mg$$



รูปที่ 3.17: นักบินขับเครื่องบินให้เคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงตัว (a) และแผนภาพวัตถุอิสระของนักบินที่ตำแหน่งล่างลุดของวงกลม (b) และที่ตำแหน่งบนสุดของวงกลม (c)

ในทำนองเดียวกันที่ตำแหน่งด้านบนสุดของวงกลมจะได้

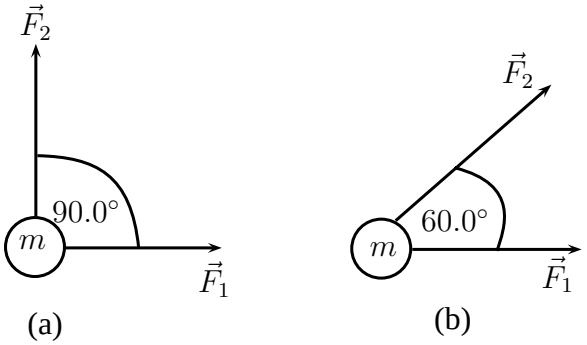
$$\sum F_r = n_{top} + mg = m\frac{v^2}{r}$$
$$n_{top} = m\frac{v^2}{r} - mg = mg\left(\frac{v^2}{rg} - 1\right)$$
$$n_{top} = mg\left[\frac{(225)^2}{(2.7\times 10^3)(9.8)} - 1\right]$$
$$n_{top} = 0.91mg$$

ผลที่ได้เราจะเห็นว่าแรงที่เบาะนั่งกระทำต่อนักบินที่ตำแหน่งด้านล่างจะมากกว่าด้านบนสุดของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวดิ่ง และในตำแหน่งอื่น ๆก็สามารถวิเคราะห์หาได้ในลักษณะเดียวกันนี้

3.4 แบบฝึกหัด

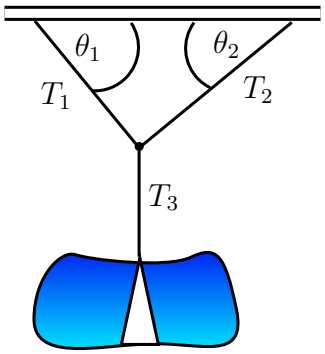
1. แรงสองแรงคือ F_1 = 20 N และ F_2 = 15 N กระทำต่อมวลขนาด 5 kg จงหาขนาดและทิศทางความเร่งในรูป 3.18 (a) และ (b)

2. ถุงปูนซีเมนต์น้ำหนัก 325 N แขวนด้วยเส้นเชือกดังแสดงในรูป 3.19 โดยเชือกสองเส้นทำมุมกับแนวระดับคือ θ_1 = 60 องศา และ θ_2 = 25 องศา เมื่อระบบอยู่ในสมดุล



รูปที่ 3.18: โจทย์ปัญหาข้อ 1

จงหาขนาดแรงตึงในเส้นเชือก T_1, T_2 และ T_3



รูปที่ 3.19: สำหรับโจทย์ปัญหาข้อ 2

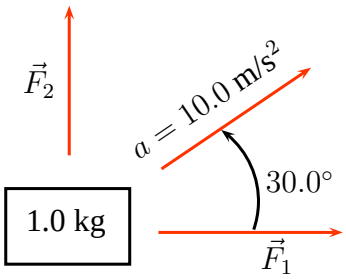
3. มวล 1 kg มีความเร่งขนาด 10 m/s^2 ในทิศทำมุม 30 องศากับแนวแรง F_1 ดังรูป 3.20 ถ้าแรง F_2 = 5.0 N จงหาขนาดของ F_1

4. ระบบที่แสดงในรูปที่ 3.21 (a), (b) และ (c) อยู่ในสภาวะสมดุล ถ้าเสกลบนสปริงถูกปรับให้อ่านค่าในหน่วยของนิวตัน จงหาว่า ค่าที่อ่านได้บนสปริงในทั้งสามระบบมีค่าเท่าใด

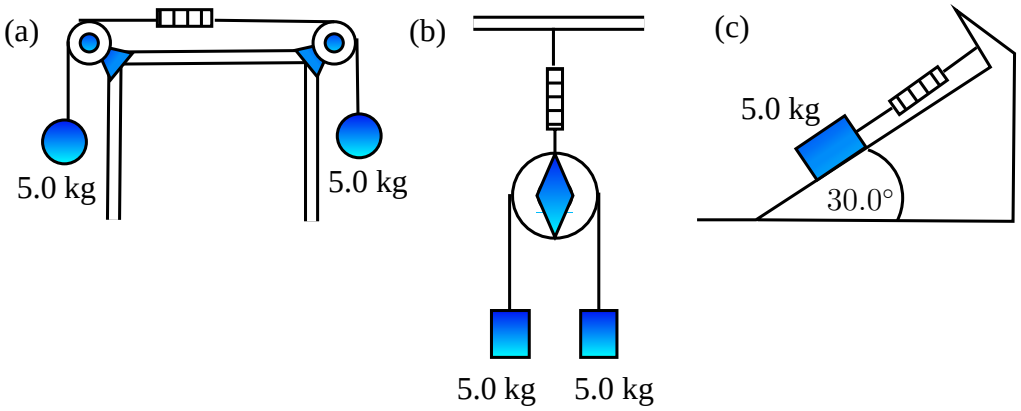
5. กล่องมวล m = 2.0 kg ถูกปล่อยจากหยุดนิ่งที่ตำแหน่งความสูงจากพื้นโต๊ะ h = 0.50 m และปล่อยให้ไถลลงมาจากหยุดนิ่งตามพื้นเอียงซึ่งมีมุมเอียง θ = 30 องศา ดังรูปที่ 3.22 พื้นเอียงไม่มีความเสียดทานที่ถูกตรึงกับพื้นโต๊ะโดยที่พื้นโต๊ะสูงจากพื้นดิน H = 2.00 m จงหาค่าต่อไปนี้

   (ก) ความเร่งของกล่องขณะที่ไถลลงมาตามพื้นเอียง

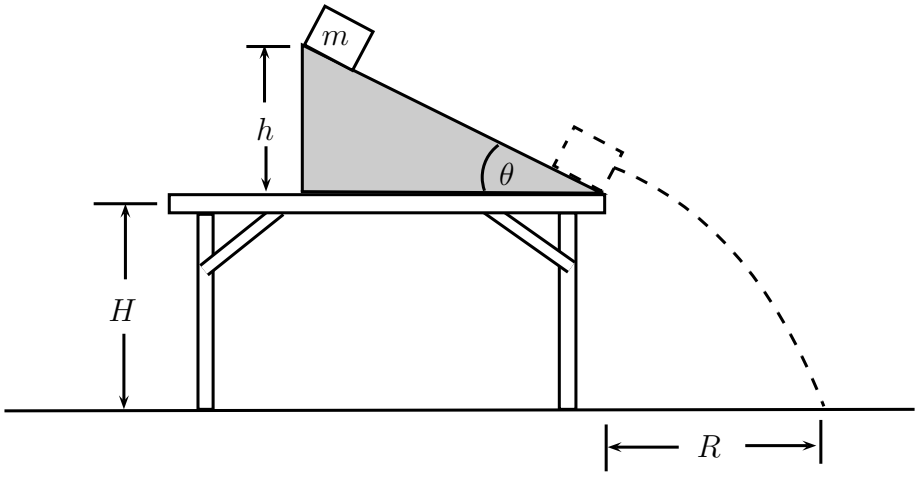
   (ข) ความเร็วของกล่องขณะที่หลุดออกจากขอบด้านล่างสุดของพื้นเอียง



รูปที่ 3.20: สำหรับโจทย์ปัญหาข้อ 2



รูปที่ 3.21: โจทย์ปัญหาข้อ 4



รูปที่ 3.22: โจทย์ปัญหาข้อ 5

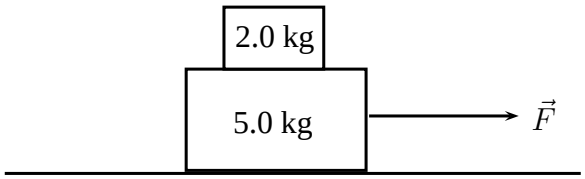
(ค) เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ตั้งแต่เริ่มต้นจนตกถึงพื้นดิน

(ง) ตำแหน่งที่ตกพื้นของกล่องใบนี้อยู่ห่างจากขาโต๊ะเท่าใด (R)

6. มวลขนาด 2.0 kg วางอยู่บนมวลขนาด 5 kg สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างผิววัตถุมวล 5 kg กับพื้นคือ 0.2 เมื่อออกแรงดึงวัตถุมวล 5 kg ไปทางขวามือดังรูป 3.23

(ก) จงหาขนาดของแรงที่จำเป็นต้องใช้เพื่อผลักให้วัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร่ง 3.0 m/s^2

(ข) จงหาค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิตที่น้อยที่สุดระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสองซึ่งจะทำให้วัตถุมวล 2 kg ไม่ไถลไปภายใต้ความเร่งขนาด 3.0 m/s^2

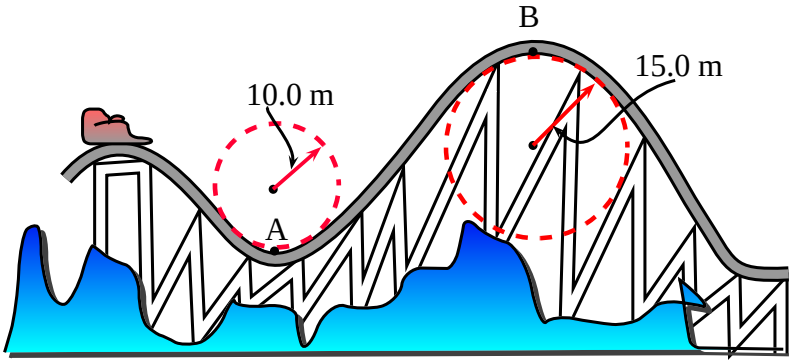


รูปที่ 3.23: โจทย์ปัญหาข้อ 6

7. รถรางมีมวล 500 kg เมื่อบรรทุกผู้โดยสารจนเต็มและกำลังเคลื่อนที่บนรางโค้ง ดังแสดงในรูป 3.24

(ก) ถ้ารถรางมีอัตราเร็ว 20 m/s ที่จุด A แรงที่รางกระทำต่อรถเป็นเท่าไร

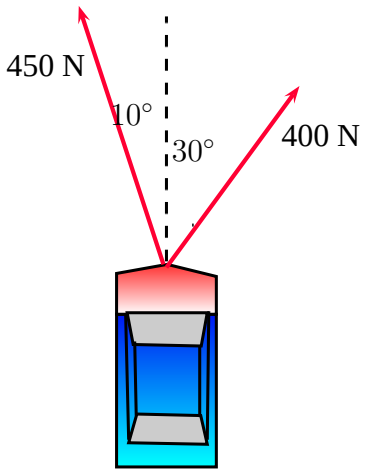
(ข) อัตราเร็วสูงสุดขณะที่รถรางอยู่ที่จุด B และยังคงเคลื่อนที่อยู่บนรางได้โดยที่ไม่หลุดออกนอกเส้นทาง



รูปที่ 3.24: โจทย์ปัญหาข้อ 7

8. ระยะห่างระหว่างเสาโทรศัพท์เท่ากับ 50.0 m เมื่อมีนกตัวหนึ่งบินมาเกาะที่สายโทรศัพท์ตรงกึ่งกลางระหว่างเสาทั้งสองทำให้สายหย่อนลงไปเป็นระยะ 0.2 m ให้เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของนกขนาดของแรงตึงในสายโทรศัพท์ที่นกกระทำมีค่าเป็นเท่าไหร่ (ไม่คิดน้ำหนักของสายโทรศัพท์)

9. จากรูป 3.25 แรงสองแรงที่กระทำกับรถยนต์คันหนึ่งเพื่อจะให้เคลื่อนที่ไป จงหาขนาดของแรงลัพธ์และถ้ารถยนต์มวล 3000 kg ความเร่งของรถยนต์มีขนาดเป็นเท่าไหร่ (ไม่คิดแรงเสียดทาน)



รูปที่ 3.25: โจทย์ปัญหาข้อ 9

10. วัตถุมวล 2.0 kg เริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งไถลลงตามพื้นเอียงที่มีความยาวตามพื้นเอียง 80 cm ในเวลา 0.5 วินาที แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุไปตามพื้นเอียงมีค่าเป็นเท่าไหร่

บทที่ 4

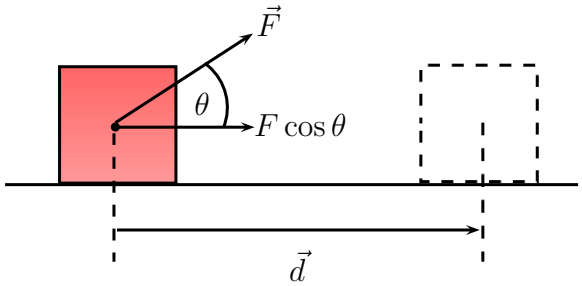
งานและพลังงาน

4.1 งานที่ทำโดยแรงคงที่

เมื่อวัตถุอันหนึ่งถูกแรงภายนอก $\vec{F}$ ซึ่งมีขนาดและทิศทางคงที่กระทำแล้วทำให้วัตถุนั้นมีการเคลื่อนที่ได้ระยะการกระจัด $\vec{d}$ ดังรูป 4.1 งาน (Work, W) ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงนี้มีนิยามเป็นดังนี้คือ

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta \tag{4.1}$$

จากนิยามของงานในสมการ 4.1 พบว่า งาน ในทางฟิสิกส์ หมายถึง ผลคูณระหว่างขนาดองค์ประกอบของแรงในทิศทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปกับขนาดของการกระจัดนั้น ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ มีหน่วยเป็น นิวตัน.เมตร (N.m) หรือ จูล (Joule, J) และจากนิยามของงานจะเห็นว่างานมีค่าเป็นได้ทั้งค่าบวก (+) ค่าลบ (-) และ ศูนย์ (0) ขึ้นอยู่กับทิศของแรงที่กระทำต่อวัตถุเทียบกับทิศการกระจัด เช่น ถ้าแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุมีทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่งานของแรงนี้มีค่าเป็นศูนย์ (เพราะว่า มุม $\theta = 90°$)



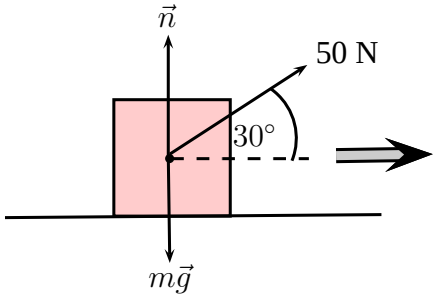
รูปที่ 4.1: แรงขนาดคงที่กระทำกับวัตถุในทิศทำมุม θ กับแนวราบ

ตัวอย่างที่ 1 ชายคนหนึ่งออกแรงดึงวัตถุมวล m ด้วยขนาด 50 นิวตันในทิศทำมุม 30 องศากับแนวราบดังรูป 4.2 วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบได้ระยะ 3.0 เมตร จงคำนวณหางานที่ชายคนนี้ทำกับวัตถุนี้

วิธีทำ จากนิยามของงานเราจะได้ว่า งานของแรงที่ชายคนนี้กระทำต่อวัตถุคือ

$$W = F\cos\theta d = (50\text{ N})(\cos 30.0^\circ)(3.0\text{ m})$$
$$W = 130\text{ J}$$

นอกจากนี้จะเห็นว่าสิ่งหนึ่งที่เราได้เรียนรู้จากโจทย์ปัญหานี้คือว่า แรงโน้มถ่วงของโลก $m\vec{g}$ และแรงที่พื้นดันวัตถุ $\vec{n}$ ไม่ทำให้เกิดงาน หรืองานมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากว่า มีทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่



รูปที่ 4.2: แรงขนาด 50 นิวตันกระทำกับวัตถุในทิศทำมุม 30 องศากับแนวราบ

ตัวอย่างที่ 2 อนุภาคก้อนหนึ่งกำลังเคลื่อนที่อยู่ในระนาบ xy โดยมีเวกเตอร์ของการกระจัดเป็น $\vec{d} = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$ ซึ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำ $\vec{F} = 5.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$ จงคำนวณ
(ก) ขนาดของการกระจัดและขนาดของแรง
(ข) งานที่ทำโดยแรงนี้
(ค) มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{F}$ กับ $\vec{d}$

วิธีทำ
(ก) ขนาดของการกระจัดและแรงคือ

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = 3.6\text{ m}$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = 5.4\text{ N}$$

(ข) โดยใช้นิยามของงาน $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} W &= (5.0\hat{i} + 2.0\hat{j}) \cdot (2.0\hat{i} + 3.0\hat{j}) \\ &= (5.0\hat{i})(2.0\hat{i}) + (5.0\hat{i})(3.0\hat{j}) + (2.0\hat{j})(2.0\hat{i}) + (2.0\hat{j})(3.0\hat{j}) \\ &= 10 + 0 + 0 + 6 = 16 \text{ J} \end{aligned}$$

(ค) มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองหาได้จากนิยามการของการคูณแบบสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{d} &= Fd\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{Fd} = \frac{16}{(5.4)(3.6)} = 0.82 \\ \theta &= \cos^{-1}(0.82) = 34.9^\circ \end{aligned}$$

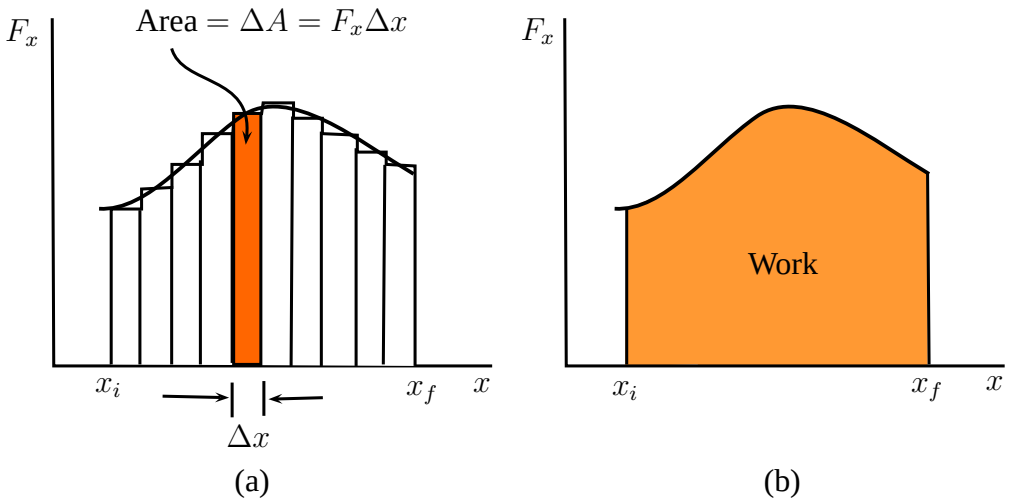
4.2 งานที่ทำโดยแรงไม่คงที่

ในการหางานของแรงที่มีค่าไม่คงที่เราจะเริ่มจากการพิจารณาในช่วงเวลาสั้น ๆ หมายความว่าในช่วงเวลาการเปลี่ยนแปลงการกระจัดเล็ก ๆ ถือว่าแรงที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากจนถือได้ว่ามีค่าคงที่ ลองพิจารณาในรูป 4.3(a) ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของแรงกับระยะทางในแนวแกน x การหางานในช่วง x_i ถึง x_f ทำได้โดยการแบ่งช่วงดังกล่าวออกเป็นส่วนเล็ก ๆขนาดเท่ากัน Δx ดังนั้นงานของแรงที่เกิดขึ้นในช่วงเล็ก ๆ นี้เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟนั่นคือ $\Delta W = F_x \Delta x$ เมื่อทำการรวมงานของแต่ละช่วงทั้งหมดเราจะได้งานของแรงที่กระทำต่อวัตถุในช่วง x_i ถึง x_f เป็นดังนี้

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x \tag{4.2}$$

ในกรณีที่แรงมีการเปลี่ยนค่าอย่างต่อเนื่อง เราอาจจะพิจารณาในรูป 4.3(b) ได้ว่างานที่ได้ในช่วงระยะทางจาก x_i ถึง x_f ก็คือการอินทิเกรตพื้นที่ใต้กราฟดังกล่าวนั้นคือ

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \tag{4.3}$$



รูปที่ 4.3: แสดงวิธีการคำนวณหางานของแรงที่ไม่คงที่ (a) ทำการแบ่งพื้นที่ใต้กราฟออกเป็นส่วนเล็ก ๆ และ(b) งานของแรงที่เปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง

4.2.1 งานที่ทำโดยแรงดึงกลับของสปริง

แรงดึงกลับของสปริงเป็นตัวอย่างหนึ่งของแรงที่ไม่คงที่และเป็นไปตามกฎของฮุกค์ (Hooke's law) ซึ่งมีขนาดเป็น

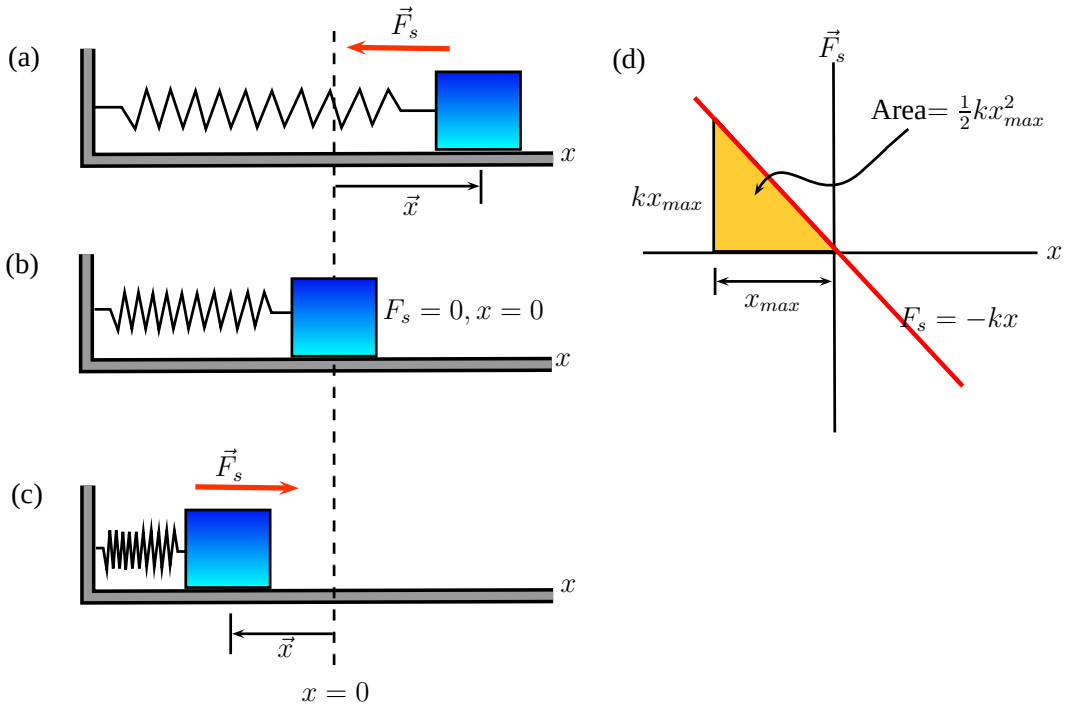
$$F_s = -kx \tag{4.4}$$

เมื่อ k คือ ค่าคงที่ของสปริง มีหน่วยเป็น N/m ซึ่งเป็นค่าที่วัดความยืดหยุ่นของสปริง เครื่องหมายลบที่ปรากฏในสมการ ?? แสดงให้เห็นว่า ทิศของแรงที่กระทำต่อวัตถุโดยสปริงจะมีทิศตรงข้ามกับการกระจัด ซึ่งจะดึงวัตถุเข้าสู่จุดสมดุลเสมอคือที่ $x = 0$ ดังรูป 4.4 สมมุติวัตถุถูกผลักออกไปทางซ้ายเป็นระยะ x_{max} จากตำแหน่งสมดุลและหลังจากนั้นปล่อยให้เคลื่อนที่ภายใต้แรงดึงกลับของสปริง งานที่ทำโดยสปริง (W_s) เนื่องจากวัตถุเคลื่อนที่จาก $x_i = -x_{max}$ ถึง $x_f = 0$ คือ

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \tag{4.5}$$

ในทำนองเดียวกันงานที่ทำโดยสปริงเนื่องจากวัตถุเคลื่อนจาก $x_i = 0$ ถึง $x_f = x_{max}$ จะได้$W_s = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$ ดังนั้นงานสุทธิของแรงดึงกลับของสปริงในการเคลื่อนวัตถุจากตำแหน่ง $x_i = -x_{max}$ ถึง $x_f = x_{max}$ มีค่าเป็นศูนย์ ในรูป 4.4(d) แสดงกราฟระหว่างแรง F_s กับ x งานที่คำนวณได้จากสมการ 4.5 คือพื้นใต้กราฟส่วนที่แรเงานั่นเอง ในกรณีทั่วไปที่วัตถุมีการกระจัดจาก $x = x_i$ ถึง $x = x_f$ เราจะได้งานที่ทำโดยแรงสปริงเป็นดังนี้

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \tag{4.6}$$



รูปที่ 4.4: แรงดึงกลับของสปริง (a) วัตถุกระจัดไปทาง $+x$ (b) วัตถุอยู่ที่ตำแหน่งสมดุล $x = 0$ (c) วัตถุกระจัดไปทาง $-x$ และ (d) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรง F_x กับ x

4.3 พลังงานจลน์และทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์

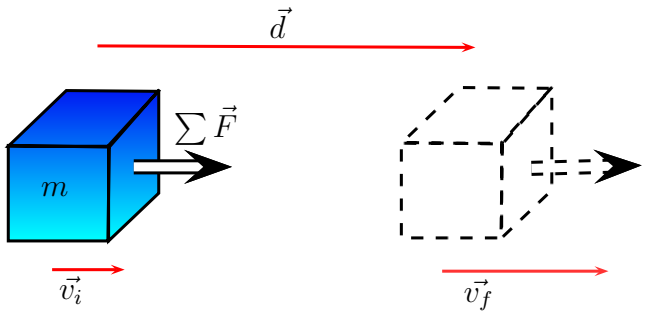
เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปภายใต้แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุนั้น งานที่เกิดจากแรงลัพธ์นี้จะสัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ ในรูปที่ 4.5 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m ภายใต้การกระทำของแรงลัพธ์ $\sum \vec{F}$ ขนาดคงที่ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง $\vec{a}$ จากนิยามของงานและจากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันทำให้เราได้

$$\sum W = \left(\sum F\right) d = (ma)d$$

$$d = \frac{1}{2}(v_i + v_f)t \quad \text{และ} \quad a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

$$\sum W = m\left(\frac{v_f - v_i}{t}\right)\frac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

$$\sum W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$



รูปที่ 4.5: แรงลัพธ์กระทำต่อวัตถุให้เคลื่อนที่ไปในแนวระดับด้วยความเร่ง

ปริมาณ $\frac{1}{2}mv^2$ คือ พลังงานที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ เรียกว่า "พลังงานจลน์ (Kinetic energy, K)" นั่นคือ

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.7}$$

ดังนั้นเราจะเห็นว่างานที่เกิดขึ้นเนื่องจากมีแรงลัพธ์มากระทำต่อวัตถุนั้นจะเท่ากับขนาดการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ซึ่งเรียกว่า ทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ (Work-kinetic energy theorem)

$$\sum W = K_f - K_i = \Delta K \tag{4.8}$$

สิ่งที่ต้องคำนึงเมื่อใช้ทฤษฎีนี้คือว่าจะต้องรวมแรงทุกแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น และงานสุทธิที่ได้มีค่าเป็นบวกเมื่ออัตราเร็วเพิ่มขึ้นและงานเป็นลบเมื่ออัตราเร็วลดลง

4.4 งานเนื่องจากแรงเสียดทาน

พิจารณาสถานะการณ์ที่วัตถุไถลบนพื้นในแนวระดับซึ่งมีความเสียดทาน แรงเสียดทานที่พื้นผิวทำให้มีการสูญเสียพลังงานจลน์และการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ดังกล่าวก็คืองานที่เกิดขึ้นของแรงเสียดทานจลน์นั่นเอง

$$\Delta K = -f_k d \tag{4.9}$$

เมื่อมีแรงเสียดทานและแรงอื่น ๆกระทำกับวัตถุ โดยทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ทำให้เราสามารถเขียนสมการในอีกรูปแบบได้ดังนี้

$$K_i + \sum W_{other} - f_k d = K_f \tag{4.10}$$

โดยที่ $\sum W_{other}$ คือ งานเนื่องจากแรงอื่น ๆที่ไม่ใช่งานของแรงเสียดทาน

ตัวอย่างที่ 3 วัตถุมวล 6 กิโลกรัม วางนิ่งอยู่บนพื้นราบถูกผลักให้เคลื่อนที่ออกไปในแนวระดับด้วยแรงขนาด 12 นิวตัน จงหาความเร็วของวัตถุนี้หลังจากเคลื่อนที่ไปได้ระยะ 3 เมตร
(ก) เมื่อพื้นไม่มีความเสียดทาน
(ข) เมื่อพื้นมีความเสียดทานโดยที่สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ คือ 0.15

วิธีทำ
(ก) จากรูป 4.6(ก) โดยใช้สมการ 4.8 จะได้ว่า แรง $\vec{F}$ เท่านั้นที่ทำให้เกิดงาน

$$W = Fd = (12\ \text{N})(3\ \text{m}) = 36\ \text{J}$$
$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2}v_f^2 - 0$$
$$v_f^2 = \frac{2W}{m} = \frac{2(36)}{6} = 12\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_f = 3.5 \quad \text{m/s}$$

(ข) เมื่อพื้นมีความเสียดทานเราจะต้องหาพลังงานจลน์ที่สูญหายไปเนื่องจากแรงเสียดทาน ($\Delta K_{friction}$) และขนาดของแรงเสียดทานคือ

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = (0.15)(6.0\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)$$
$$f_k = 8.82 \quad \text{N}$$

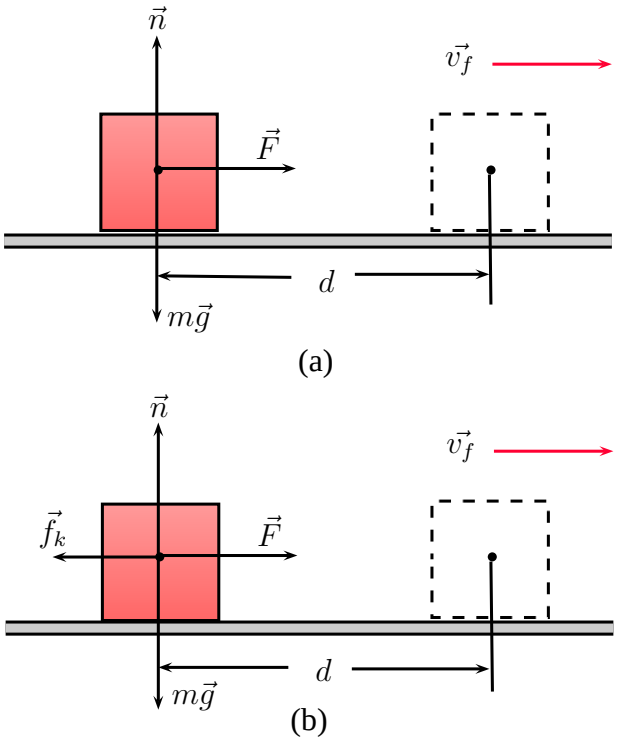
พลังงานจลน์ที่เปลี่ยนไปเนื่องจากแรงเสียดทาน คือ

$$\Delta K_{friction} = -f_k d = -(8.82\ \text{N})(3.0\ \text{m}) = -26.5\ \text{J}$$

ดังนั้นอัตราเร็วสุดท้ายของวัตถุคำนวณหาได้โดยใช้สมการ 4.10 คือ

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \sum W_{other} - f_k d = \frac{1}{2}mv_f^2$$
$$0 + 36\ \text{J} - 26.5\ \text{J} = \frac{1}{2}mv_f^2$$
$$v_f^2 = 2(9.5\ \text{J})/(6.0\ \text{kg}) = 3.18\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_f = 1.8 \quad \text{m/s}$$

ตัวอย่างที่ 4 กล่องลูกบาศก์มวล 1.6 กิโลกรัมยึดติดกับสปริงในแนวราบซึ่งสปริงมีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 1.0×10^3 N/m สปริงถูกอัดเป็นระยะ 2.0 เซนติเมตร จากนั้นปล่อยให้เคลื่อนที่



รูปที่ 4.6: วัตถุถูกผลักให้เคลื่อนที่ในระนาบบนพื้น (a) ไม่มีความเสียดทานที่พื้น และ (b) มีความเสียดทานที่พื้น

(ก) จงคำนวณอัตราเร็วของกล่องไม้ขณะที่ผ่านจุดสมดุล ($x = 0$) ถ้าพื้นไม่มีความเสียดทาน
(ข) จงคำนวณอัตราเร็วของกล่องไม้ขณะที่ผ่านจุดสมดุล ($x = 0$) ถ้าพื้นมีแรงเสียดทานขนาด 4.0 N

วิธีทำ
(ก) ในสถานะการณ์นี้ จุดเริ่มต้นกล่องหยุดนิ่ง $v_i = 0$ ที่ตำแหน่ง $x_i = -2.0$ cm และเราต้องการหาค่า v_f ที่ตำแหน่ง $x_f = 0$ โดยใช้สมการ 4.5 เราได้งานของแรงดึงกลับสปริงที่ตำแหน่ง $x_{max} = x_i = -2.0$ คือ

$$W_s = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ N/m})(-2.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2$$
$$W_s = 0.20 \quad \text{J}$$

และใช้ทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ 0.20 \text{ J} &= \frac{1}{2}(1.6 \text{ kg})v_f^2 - 0 \\ v_f^2 &= \frac{0.40 \text{ J}}{1.6 \text{ kg}} = 0.25 \quad \text{m}^2/\text{s}^2 \\ v_f &= 0.50 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

(ข) เมื่อมีแรงเสียดทาน พลังงานจลน์ที่สูญหายไปเท่ากับงานของเรียดทาน นั่นคือ

$$\Delta K = -f_k d = -(4.0 \text{ N})(2.0 \times 10^{-2} \text{ m}) = -0.080 \text{ J}$$

จากข้อ (ก) พลังงานจลน์สุดท้ายขณะที่ไม่มีความเสียดทาน 0.20 J ดังนั้น พลังงานจลน์สุดท้ายเมื่อมีความเสียดทานคือ

$$\begin{aligned} K_f = 0.20 \text{ J} - 0.080 \text{ J} = 0.12 \text{ J} &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\ \frac{1}{2}(1.6 \text{ kg})v_f^2 &= 0.12 \text{ J} \\ v_f^2 &= \frac{0.24}{1.6} = 0.15 \quad \text{m}^2/\text{s}^2 \\ v_f &= 0.39 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

4.5 กำลัง

กำลัง (Power) เป็นปริมาณที่วัดอัตราส่วนของงานที่ทำต่อเวลา ถ้างานที่ทำโดยแรงภายนอก W ในช่วงเวลา Δt จะได้ กำลังเฉลี่ย (Average power) มีนิยามเป็น

$$\bar{P} \equiv \frac{W}{\Delta t} \tag{4.11}$$

งานที่ทำต่อวัตถุนั้นมีส่วนทำให้พลังงานของวัตถุเพิ่มขึ้น ดังนั้นเราอาจจะกล่าวได้ว่า กำลัง ก็คือ อัตราการเคลื่อนย้ายพลังงานและเมื่อพิจารณางานที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้น ๆ กำลังที่ได้นี้เรียกว่า กำลังขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous power) ซึ่งมีนิยามดังนี้

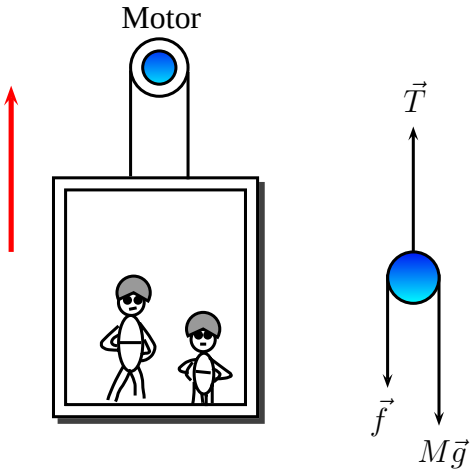
$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \tag{4.12}$$

เมื่อ dW คือปริมาณที่เพิ่มขั้นในช่วงเวลา dt เนื่องจากแรงภายนอก $\vec{F}$ กระทำกับวัตถุให้เคลื่อนที่ไปได้ระยะการกระจัดเป็น $d\vec{s}$ เนื่องจาก $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ดังนั้น

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{4.13}$$

เมื่อ $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ คือ ความเร็วของวัตถุ กำลังมีหน่วยเป็น จูลต่อวินาที (J/s) หรือ วัตต์ (W)

ตัวอย่างที่ 5 ลิฟต์มวล 1000 กิโลกรัม บรรทุกผู้โดยสารซึ่งมีมวลทั้งหมด 800 กิโลกรัม ถ้าแรงต้านในการเคลื่อนที่ขึ้นไปมีค่าคงที่เท่ากับ 4000 นิวตัน ดังรูป 4.7 จงคำนวณ
(ก) กำลังที่น้อยที่สุดที่มอเตอร์จำเป็นต้องใช้ในการดึงลิฟต์ให้เคลื่อนที่ขึ้นด้วยอัตราเร็วคงที่ 3 เมตร/วินาที
(ข) กำลังที่มอเตอร์ใช้ในการดึงลิฟต์ให้เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่งเป็น 1 เมตร/วินาที^{2} ขณะที่ลิฟต์มีความเร็ว v เมตร/วินาที



รูปที่ 4.7: ลิฟต์บรรทุกผู้โดยสารกำลังเคลื่อนที่ขึ้น

วิธีทำ
(ก) โดยการเขียนแผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อลิฟต์ จะได้ว่า เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน จะได้ดังนี้

$$\sum F_y = T - f - Mg = 0$$
$$T = Mg + f = (1000 + 800)(9.8) + 4000$$
$$T = 2.16 \times 10^4 \quad \text{N}$$

ดังนั้น กำลังที่มอเตอร์จำเป็นต้องใช้เพื่อดึงลิฟต์ให้เคลื่อนที่ขึ้นด้วยอัตราเร็วคงที่คือ

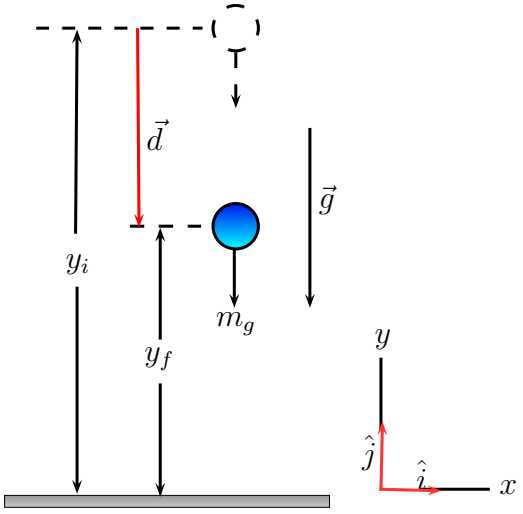
$$P = \vec{T}.\vec{v} = Tv = (2.16 \times 10^4)(3.0)$$
$$P = 6.48 \times 10^4 \qquad \text{W}$$

(ข) เมื่อลิฟต์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้

$$\sum F_y = T - f - Mg = Ma$$
$$T = M(a+g) + f = (1.80 \times 10^3)(1.0 + 9.8) + 4.0 \times 10^3$$
$$T = 2.34 \times 10^4 \quad \text{N}$$

ดังนั้น กำลังที่มอเตอร์จำเป็นต้องใช้เพื่อดึงลิฟต์ให้เคลื่อนที่ขึ้นเมื่อลิฟต์มีความเร็วเป็น v คือ

$$P = \vec{T}.\vec{v} = Tv = (2.34 \times 10^4)v$$



รูปที่ 4.8: การตกอย่างอิสระของวัตถุในแนวดิ่งภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก

4.6 พลังงานศักย์

พลังงานศักย์ (potential energy, U) คือ พลังงานที่เกี่ยวข้องกับระบบ (system) ของวัตถุ ซึ่งระบบในที่นี้ อาจจะประกอบด้วยวัตถุสองวัตถุหรือมากกว่านี้มีแรงกระทำต่อกันและกัน และเมื่อวัตถุในระบบมีการเปลี่ยนแปลง พลังงานศักย์ของระบบก็จะเปลี่ยนแปลงด้วยเช่นกัน พลังงานศักย์อาจจะกล่าวได้ว่าเป็นพลังงานที่มีอยู่ในระบบซึ่งเกี่ยวข้องกับตำแหน่งของวัตถุเป็นหลัก เช่น พลังงานศักย์โน้มถ่วง พลังงานศักย์ยืดหยุ่น เป็นต้น

4.6.1 พลังงานศักย์โน้มถ่วง

พลังงานศักย์โน้มถ่วง (gravitational potential energy, U_g) คือ พลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงดึงดูดของโลกกระทำต่อวัตถุที่ระยะความสูงใด ๆ y เทียบกับพื้นโลก ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$U_g = mgy \tag{4.14}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของวัตถุมวล m ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก ดังแสดงในรูป 4.8 เริ่มต้นวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง y_i และเมื่อเวลาผ่านไปวัตถุตกลงมาอยู่ที่ตำแหน่ง y_f ถ้ากำหนดให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x และแกน y คือ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ จะได้การกระจัดของวัตถุคือ $\vec{d}$ ดังนั้นงานที่ทำต่อวัตถุภายใต้แรงดึงดูดของโลกจึงมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} W_g &= (m\vec{g}) \cdot \vec{d} = (-mg\hat{j}) \cdot (y_f - y_i)\hat{j} = mgy_i - mgy_f \\ W_g &= U_i - U_f = -(U_f - U_i) = -\Delta U_g \end{aligned} \tag{4.15}$$

จากผลลัพธ์ที่ได้นี้เราจะเห็นว่างานที่ทำต่อวัตถุใด ๆโดยแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าเท่ากับค่าลบของการเปลี่ยนพลังงานศักย์โน้มถ่วงของระบบ และนอกจากนี้ยังพบว่า ผลต่างของพลังงานศักย์ขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น สิ่งนี้ชี้ให้เห็นว่าเราสามารถเลือกจุดเริ่มต้นของระบบพิกัด ณ ตำแหน่งใด ๆก็ได้ตามความสะดวกในการวิเคราะห์ปัญหานั้น ๆ

4.6.2 พลังงานศักย์ยืดหยุ่น

ในระบบที่แรงกระทำต่อวัตถุนั้นเป็นแรงดึงกลับ หมายความว่า แรงนี้มีลักษณะดึงวัตถุเข้าหาตำแหน่งสมดุลเสมอ เช่น แรงดึงกลับของสปริง $F_s = -kx$ เราจะเห็นว่างานของแรงดึงกลับนี้มีค่าเป็น

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \tag{4.16}$$

จากสมการ 4.16 จะเห็นว่า งานที่กระทำต่อวัตถุเนื่องจากแรงดึงกลับนี้จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นกับตำแหน่งสุดท้าย ซึ่งก็เท่ากับการเปลี่ยนค่าพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของระบบนี้โดยที่เรานิยามพลังงานศักย์ยืดหยุ่น (elastic potential energy, U_s) คือ

$$U_s \equiv \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.17}$$

4.7 การอนุรักษ์ของพลังงานเชิงกล

วัตถุอันหนึ่งขณะที่อยู่ที่ระดับความสูง h จากพื้นโลกจะมีพลังงานศักย์โน้มถ่วงเท่ากับ mgh และถ้าปล่อยให้วัตถุหล่นลงมาอย่างอิสระโดยไม่คิดแรงต้านอากาศ ขณะที่วัตถุตกลงมาอัตรา

เร็วและพลังงานจลน์ของวัตถุจะเพิ่มขึ้น หรืออาจจะกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า พลังงานศักย์ของระบบที่ลดลงจะเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ นั่นคือ ผลรวมของพลังงานศักย์กับพลังงานจลน์ ณ ตำแหน่งใด ๆมีค่าคงที่ซึ่งข้อสรุปนี้เราเรียกว่า *หลักการของการอนุรักษ์พลังงานเชิงกล* ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$E = K + U$$

$$E_i = E_f \tag{4.18}$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f \tag{4.19}$$

4.8 งานที่ทำโดยแรงที่ไม่อนุรักษ์

เราเริ่มด้วยนิยามเกี่ยวกับแรงอนุรักษ์ (conservative forces) และแรงไม่อนุรักษ์ (nonconservative forces) ก่อนว่าสองคำนี้มีความหมายอย่างไร

แรงอนุรักษ์ คือ แรงที่ทำให้งานสุทธิของระบบในการเคลื่อนที่ครบรอบ (ตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายคือตำแหน่งเดียวกัน) มีค่าเท่ากับศูนย์ เช่น แรงโน้มถ่วงของโลก แรงดึงกลับของสปริง

แรงไม่อนุรักษ์ คือ แรงที่ทำให้งานสุทธิของระบบในการเคลื่อนที่ครบรอบมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ เนื่องจากระหว่างการเคลื่อนที่มีการสูญเสียพลังงานไปในรูปอื่น ๆ เช่น แรงเสียดทาน

พิจารณากรณีที่วัตถุถูกแรงจากภายนอกกระทำ เช่น ยกวัตถุวัตถุขึ้นในแนวดิ่งด้วยแรง F_{app} เราจะเห็นว่า งานสุทธิที่ได้คือผลรวมของงานจากแรงภายนอก W_{app} กับงานของแรงโน้มถ่วง W_g และงานสุทธิที่ได้จะเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนพลังงานจลน์ ΔK ตามทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ดังนี้

$$W_{app} + W_g = \Delta K$$

แต่เนื่องจากงานของแรงโน้มถ่วงมีค่าเท่ากับค่าลบของการเปลี่ยนพลังงานศักย์ $W_g = -\Delta U$ ดังนั้นทำให้เราได้

$$W_{app} = \Delta K + \Delta U \tag{4.20}$$

อีกตัวอย่างหนึ่งของแรงไม่อนุรักษ์ คือแรงเสียดทาน เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ภายใต้แรงเสียดทาน พลังงานจลน์ของวัตถุมีค่าลดลงเนื่องจากการสูญเสียพลังงานไประหว่างการเคลื่อนที่ การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ในสถานะการณ์นี้มีค่าเป็น

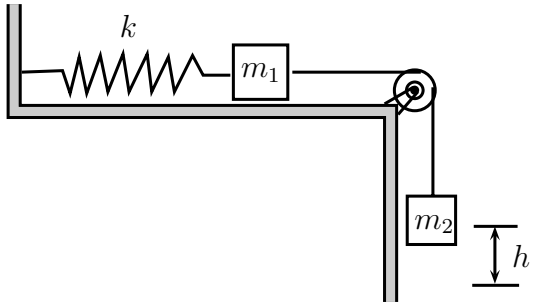
$$\Delta K_{friction} = -f_k d \tag{4.21}$$

ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ตามพื้นเอียงที่มีความเสียดทาน พลังงานเชิงกลของระบบจะเปลี่ยนแปลงดังนี้

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = -f_k d \tag{4.22}$$

เมื่อ $E_i + \Delta E = E_f$ จะเห็นว่าในกรณีดังกล่าว พลังงานเชิงกลของระบบไม่คงที่ เนื่องจากมีแรงไม่อนุรักษ์มากระทำต่อวัตถุนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6 วัตถุมวล m_1 และมวล m_2 ผูกติดกันด้วยเชือกเบาและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืดวัตถุมวล m_1 ยึดติดกับสปริงและวางอยู่บนพื้นราบ ดังรูป 4.9 เริ่มต้นระบบถูกปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่งและเมื่อวัตถุ m_2 เริ่มเคลื่อนที่ลงเป็นระยะ h ทำให้สปริงยืดออกจนกระทั่งระบบกับมาอยู่ในสภาวะหยุดนิ่งอีกครั้งจงหาสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างผิววัตถุ m_1 กับพื้นราบนี้



รูปที่ 4.9: แสดงระบบการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_1 และ m_2

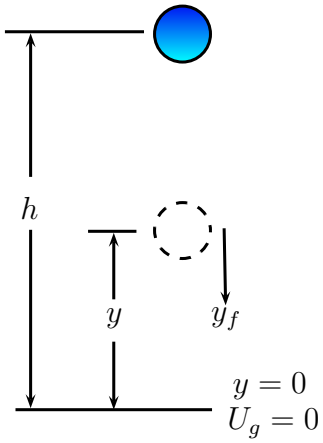
วิธีทำ การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ $\Delta K = K_f - K_i = 0$ ส่วนการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ประกอบด้วย การเปลี่ยนพลังงานศักย์โน้มถ่วง และ การเปลี่ยนพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริง นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \Delta U_g + \Delta U_s \\
\Delta U_g &= U_{g,f} - U_{g,i} = 0 - m_2 g h \\
\Delta U_s &= u_{s,f} - U_{s,i} = \frac{1}{2} k h^2 - 0
\end{aligned}$$

เนื่องจากมวล m_1 มีแรงเสียดทานกระทำซึ่งเป็นแรงไม่อนุรักษ์ ทำให้ว่า การเปลี่ยนแปลงพลังงานเชิงกลมีค่าเท่ากับงานที่ทำโดยแรงเสียดทาน ดังนี้

$$\Delta E = -f_k h = -\mu_k m_1 g h$$
$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = -m_2 g h + \frac{1}{2} k h^2 = -\mu_k m_1 g h$$
$$\mu_k = \frac{m_2 g - \frac{1}{2} k h}{m_1 g} \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 7 ลูกบอลมวล m ถูกปล่อยจากระดับความสูง h จากพื้นดิน ถ้าไม่คิดแรงต้านของอากาศจงคำนวณหาความเร็วของลูกบอลเมื่อตกลงมาอยู่ที่ระดับความสูง y จากพื้นดิน ดังรูป 4.10

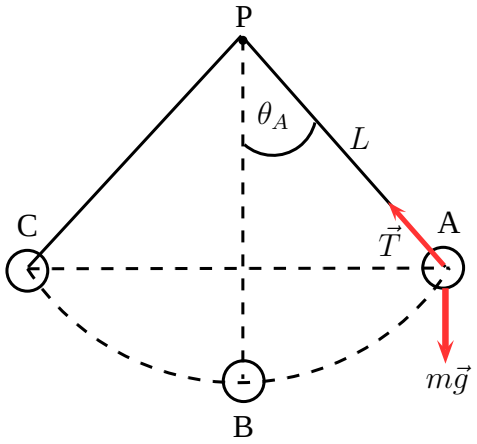


รูปที่ 4.10: วัตถุทรงกลมถูกปล่อยให้เคลื่อนในแนวดิ่ง

วิธีทำ โดยอาศัยหลักการอนุรักษ์พลังงานเชิงกล จะได้ว่าพลังงานรวมตอนเริ่มต้น E_i ต้องเท่ากับพลังงานรวมตอนสุดท้าย E_f นั่นคือ

$$E_i = E_f$$
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$0 + mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 + mgy$$
$$v_f^2 = 2g(h - y)$$
$$v_f = \sqrt{2g(h-y)} \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 8 ลูกตุ้มนาฬิกามวล m ผูกด้วยเชือกยาว L ถูกปล่อยจากตำแหน่ง A โดยที่เส้นเชือกทำมุมกับแนวดิ่งเป็นมุม θ_A ดังรูป 4.11 ถ้าไม่คิดความเสียดทานที่จุด P จงคำนวณหาค่าความเร็วของลูกตุ้มนาฬิกาและแรงตึงในเส้นเชือกที่ตำแหน่งต่ำสุด (จุด B)



รูปที่ 4.11: การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา

วิธีทำ เลือกจุด P เป็นตำแหน่งอ้างอิง ทำให้ได้$y_A = -L\cos\theta_A$ และ $y_B = -L$ ดังนั้นพลังงานศักย์ที่จุด A และจุด B จึงมีค่าเป็นดังนี้

$$U_A = -mgy_A = -mgL\cos\theta_A$$
$$U_B = -mgy_B = -mgL$$

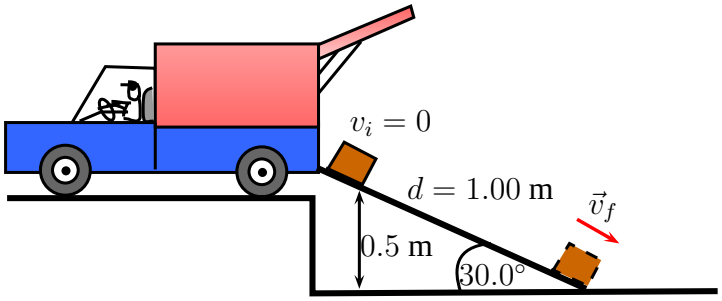
จากหลักการอนุรักษ์พลังงานเชิงกล ทำให้ได้

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$
$$0 - mgL\cos\theta_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgL$$
$$v_B = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_A)} \qquad \text{ตอบ}$$

พิจารณาที่ตำแหน่ง B เพื่อหาแรงตึงในเส้นเชือก โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้

$$\sum F_r = T_B - mg = ma_r = m\frac{v^2}{r}$$
$$T_B - mg = m\frac{v_B^2}{L}$$
$$T_B = mg(3 - 2\cos\theta_A) \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 9 กล่องสี่เหลี่ยมมวล 3 กิโลกรัม ไถลลงมาตามไม้กระดานที่ปลายด้านหนึ่งวางที่ท้ายรถยนต์และปลายอีกด้านวางที่พื้นราบดังรูป 4.12 ไม้กระดานมีความยาว 1 เมตร และเอียงทำมุม30° กับพื้นราบ ถ้าแรงเสียดทานระหว่างวัตถุกับไม้กระดานมีค่าคงที่ 5 นิวตัน จงหาอัตราเร็วของกล่องใบนี้ที่ตำแหน่งล่างสุด



รูปที่ 4.12: กล่องไถลลงตามพื้นเอียงที่มีความเสียดทาน

วิธีทำ พลังงานเชิงกลที่ตำแหน่งเริ่มต้นคือ

$$E_i = K_i + U_i = 0 + mgy_i$$
$$E_i = (3)(9.8)(0.5) = 14.7 \text{ J}$$

พลังงานเชิงกลที่ตำแหน่งสุดท้าย

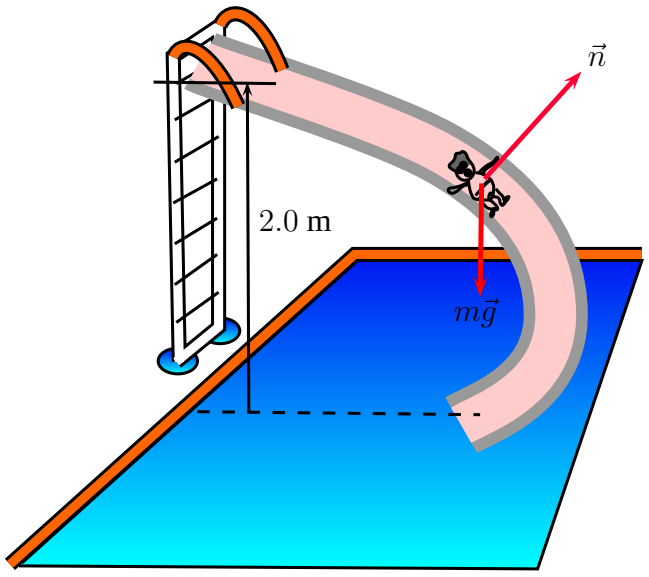
$$E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$
$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

เนื่องจากมีแรงเสียดทานกระทำขณะเคลื่อนที่ทำให้พลังงานเชิงกลไม่คงที่ ดังนั้นผลต่างของพลังงานเชิงกลระหว่างสองตำแหน่งดังกล่าวจึงมีค่าเท่ากับงานที่เกิดจากแรงเสียดทานกระทำ

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\Delta E = E_f - E_i &= -f_k d \\
\frac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i &= -f_k d \\
\frac{1}{2}mv_f^2 - 14.7 &= -(5)(1) \\
\frac{1}{2}mv_f^2 &= 14.7 - 5 = 9.7 \\
v_f^2 &= \frac{(2)(9.7)}{3} = 6.47 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\
v_f &= 2.54 \text{ m/s} \qquad \underline{\text{ตอบ}}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 เด็กชายมวล $m = 20$ kg ไถลตามรางโค้งซึ่งมีระดับความสูงจากพื้น 2 เมตร ดังรูป 4.13 เด็กชายเริ่มต้นจากตำแหน่งบนสุดของรางและไถลลงมาจนถึงด้านล่างสุดของรางมีความเร็ว $v_f = 3.0$ m/s จงคำนวณหาพลังงานที่สูญเสียไประหว่างการเคลื่อนที่นี้



รูปที่ 4.13: เด็กชายไถลลงตามรางที่มีความเสียดทาน

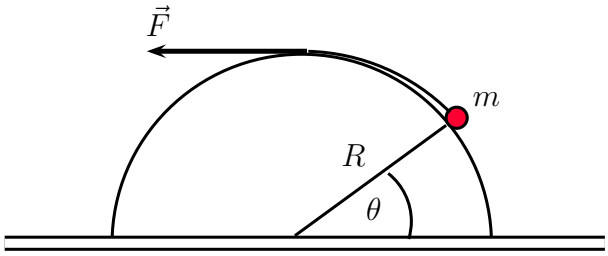
วิธีทำ เนื่องจากมีความเสียดทานเกิดขึ้นระหว่างการเคลื่อนที่ พลังงานกลบางส่วนจะสูญเสีย

ไปและมีขนาดเท่ากับงานของแรงเสียดทาน ดังนั้นพลังงานที่สูญเสียไปหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E_i + \Delta E &= E_f \\ \Delta E &= E_f - E_i = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) \\ \Delta E &= (\frac{1}{2}mv_f^2 + 0) - (0 + mgh) \\ \Delta E &= \frac{1}{2}(20)(3)^2 - (20)(9.8)(2) = -302 \text{ J} \end{aligned}$$

ตอบ พลังงานที่สูญเสียระหว่างการเคลื่อนมีค่าเท่ากับ 302 จูล

4.9 แบบฝึกหัด

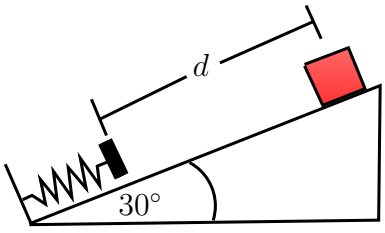


รูปที่ 4.14: โจทย์ปัญหาข้อ 1

1. มวล m ถูกดึงขึ้นไปถึงด้านบนของวัตถุรูปครึ่งทรงกระบอกที่ผิวไม่มีความเสียดทาน รัศมีของทรงกระบอกคือ R ดังรูป 4.14 จงหา
   (ก) ถ้ามวล m เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่แสดงให้เห็นว่า $F = mg\cos\theta$ (Hint: ถ้ามวลเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่องค์ประกอบความเร่งในแนวเส้นสัมผัสกับผิวทรงกระบอกจะมีค่าเป็นศูนย์)
   (ข) โดยทำการอินทิเกรตเพื่อหางาน $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}$ ในการเคลื่อนมวล m จากตำแหน่งด้านล่างขึ้นไปจนถึงตำแหน่งบนสุด

2. รถยนต์คันหนึ่งมวล 1200 กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ตามเนินเขาเอียง 30 องศา ขณะที่รถมีอัตราเร็ว 10 เมตร/วินาทีคนขับรถก็เหยียบเบรกห้ามล้อ ถ้าจะให้รถหยุดเมื่อเคลื่อนไปได้ 100 เมตร จะต้องมีแรงคงตัว F (ขนานกับถนน) ขนาดเท่ากับเท่าไรกระทำกับรถ

3. วัตถุมวล $m = 3.0$ kg เริ่มต้นจากหยุดนิ่งและเคลื่อนที่ลงมาตามพื้นเอียงที่ไม่มีความเสียดทานได้ระยะ d ก่อนที่จะสัมผัสกับสปริงดังรูป 4.15 หลังจากนั้นวัตถุมวล m



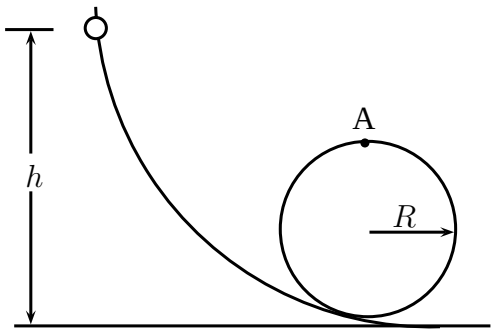
รูปที่ 4.15: โจทย์ปัญหาข้อ 3

ก็เคลื่อนที่ต่อไปได้ระยะอีกเป็น x ก่อนที่จะหยุดนิ่ง สปริงมีค่าคงที่ของแรงเป็น$k = 400$ N/m จงหาระยะ d เป็นเท่าไร

4. กล่องมวล 70 kg ถูกดึงจากจุดหยุดนิ่งให้เคลื่อนที่บนพื้นราบด้วยแรง 230 N หากในช่วงระยะ 11 m แรกพื้นไม่มีความเสียดทานแต่อีก 10 m ถัดไปพื้นมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานเท่ากับ 0.25 จงคำนวณหาอัตราเร็วของกล่องเมื่อเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 21 m

5. กล่องมวล 5 kg เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v_0 = 6$ m/s บนพื้นราบที่ไม่มีความเสียดทานและตรงเข้าชนสปริงที่มีค่าคงตัว$k = 500$ N/m หากกำหนดให้สปริงมีมวลน้อยมากจงหา

   - ระยะที่สปริงถูกกดมากที่สุดและ
   - หากสปริงถูกกดได้ไม่เกิน 0.20 m จงหาค่าความเร็ว v_0 ที่มากที่สุด

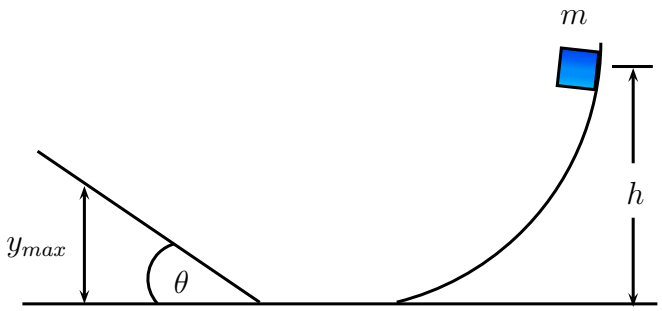


รูปที่ 4.16: โจทย์ปัญหาข้อ 4

6. ลูกปัดมวล $m = 5$ กรัม ไถลไปตามรางที่ไม่มีความเสียดทานดังรูป 4.16 ถ้าลูกปัดเริ่มปล่อยจากระดับความสูงจากพื้น $h = 3.5R$ เมื่อ R คือรัศมีความโค้งของวงกลม จงหาอัตราเร็วของลูกปัดที่ตำแหน่ง A ซึ่งเป็นตำแหน่งบนสุดของวงกลมและแรงที่รางกระทำต่อลูกปัด ณ ตำแหน่งดังกล่าวเป็นเท่าไร

7. สปริงเบา 2 ตัวถูกนำมาแขวนต่อกันในแนวดิ่งโดยปลายล่างของสปริงตัวที่ 1 ใช้แขวนวัตถุมวล m กำหนดให้สปริงตัวที่ 1 และตัวที่ 2 มีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ k_1 และ k_2 ตามลำดับ

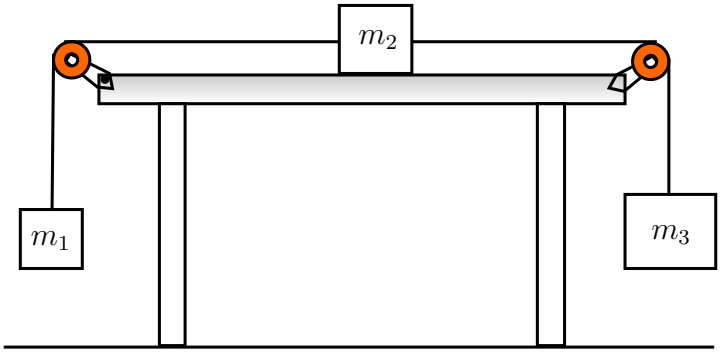
   - จงคำนวณระยะทั้งหมดที่สปริงทั้งสองยืดออก
   - ค่าคงตัวยังผลของสปริงเมื่อพิจารณาสปริงทั้งสองเป็นระบบเดียวกัน



รูปที่ 4.17: โจทย์ปัญหาข้อ 5

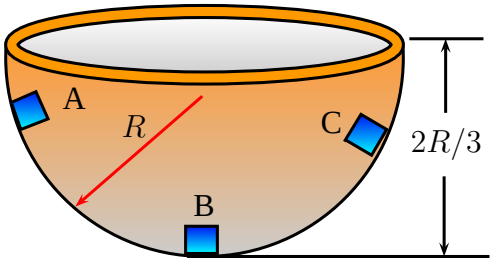
8. กล่องไม้ไถลตามรางโค้งที่ไม่มีความเสียดทานและเคลื่อนที่ต่อไปตามพื้นเอียงดังรูป 4.17 ถ้าสัมประสิทธิ์ระหว่างกล่องไม้กับพื้นเอียงคือ μ_k ให้พิสูจน์ให้เห็นว่าความสูงมากที่สุดที่กล่องไม้เคลื่อนที่ไปได้ตามพื้นเอียงคือ $y_{max} = \frac{h}{1+\mu_k \cot\theta}$

9. วัตถุสามอันมีมวล $m_1 = 5.0$ kg , $m_2 = 10$ kg และ $m_3 = 15$ kg ผูกติดกันด้วยเชือกและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความเสียดทาน ดังรูป 4.18 ถ้าหากพื้นในระนาบไม่มีความเสียดทานและระบบถูกปล่อยจากหยุดนิ่ง โดยใช้แนวคิดของพลังงานจงหาอัตราเร็วของวัตถุมวล m_3 หลังจากที่วัตถุมวลดังกล่าวเคลื่อนที่ลงได้ระยะ 4 เมตร



รูปที่ 4.18: สำหรับโจทย์ข้อที่ 9

10. อนุภาคมวล 200 กรัม ถูกปล่อยจากตำแหน่งอยู่นิ่ง A บนด้านข้างด้านในของภาชนะครึ่งทรงกลมรัศมี $R = 30$ cm ดังรูป 4.19 จงคำนวณหา (1) พลังงานศักย์โน้มถ่วงที่จุด A เทียบกับจุด B (2) พลังงานจลน์ที่จุด B (3) อัตราเร็วที่จุด B (4) พลังงานศักยืที่จุด C เทียบกับจุด B (5) พลังงานจลน์ที่จุด C



รูปที่ 4.19: สำหรับโจทย์ข้อที่ 10

บทที่ 5

โมเมนตัมเชิงเส้นและการชน

5.1 โมเมนตัมเชิงเส้น

นิยามของโมเมนตัมเชิงเส้น (linear momentum, $\vec{p}$) ของวัตถุมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ มีค่าเป็นดังนี้

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{5.1}$$

โมเมนตัมเชิงเส้นเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีองค์ประกอบตามแนวแกน x, y และ z ดังนี้คือ

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z \tag{5.2}$$

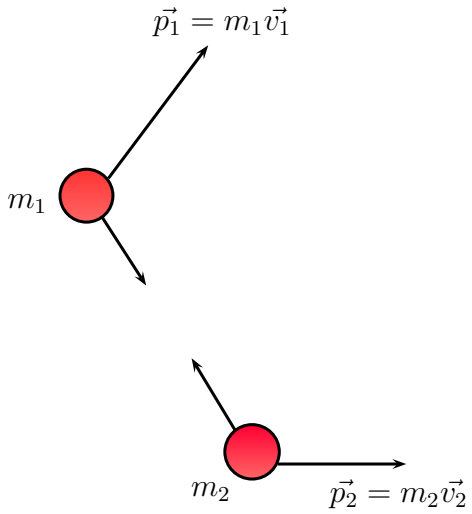
เมื่อวัตถุเคลื่อนที่โดยมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วทำให้โมเมนตัมของวัตถุเปลี่ยนแปลงซึ่งเป็นผลมาจากการที่วัตถุมีแรงลัพธ์ที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำต่อวัตถุ (กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน) นั่นคือ

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{5.3}$$

จากสมการที่ 5.3 จะเห็นว่า แรงมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้น

5.2 การคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น

พิจารณาการชนของระบบ 2 อนุภาคดังรูปที่ 5.1 เมื่อระบบไม่มีแรงภายนอกมากระทำในระหว่างการเคลื่อนที่วัตถุมวล m_1 และมวล m_2 ต่างออกแรงดึงดูดต่อกันดังนั้นทำให้ได้แรงที่วัตถุมวล m_2 กระทำต่อวัตถุมวล m_1 คือ $\vec{F_{21}}$ ในทำนองเดียวกันแรงที่มวล m_1 กระทำต่อมวล m_2 คือ $\vec{F_{12}}$ นั่นคือจะได้ว่า



รูปที่ 5.1: การชนกันของระบบสองอนุภาค

$$\vec{F_{21}} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} \text{และ} \vec{F_{12}} = \frac{d\vec{p_2}}{dt}$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตันแรงสองแรงนี้เป็นแรงคู่กิริยา นั่นคือ

$$\begin{aligned} \vec{F_{12}} &= -\vec{F_{21}} \\ \vec{F_{21}} + \vec{F_{12}} &= 0 \\ \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{p_1} + \vec{p_2}) = 0 \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

เมื่อ $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$ คือ โมเมนตัมเชิงเส้นรวมของระบบ และจากสมการ 5.4 แสดงให้เห็นว่าผลรวมของโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบมีค่าคงที่ถ้าไม่มีแรงลัพธ์ภายนอกมากระทำต่อระบบ นี่คือหลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น (conservation of linear momentum) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\vec{p_{1i}} + \vec{p_{2i}} = \vec{p_{1f}} + \vec{p_{2f}} \tag{5.5}$$

เมื่อ $\vec{p_{1i}}$ และ $\vec{p_{2i}}$ คือ โมเมนตัมเชิงเส้นตอนเริ่มต้นของวัตถุทั้งสอง และ$\vec{p_{1f}}$ และ $\vec{p_{2f}}$ คือ โมเมนตัมเชิงเส้นตอนสุดท้าย สำหรับในกรณีทั่ว ๆไปเราสามารถเขียนสรุปหลักการคงตัวของโมเมนตัมของระบบที่ประกอบด้วยหลาย ๆอนุภาคได้โดยแยกตามองค์ประกอบในแต่ละแกน ดังนี้คือ

$$\sum_{system} p_{ix} = \sum_{system} p_{fx} \quad \sum_{system} p_{iy} = \sum_{system} p_{fy} \quad \sum_{system} p_{iz} = \sum_{system} p_{fz} \tag{5.6}$$

5.3 การดลและโมเมนตัม

พิจารณาแรงหนึ่งแรงกระทำต่ออนุภาคในช่วงเวลาหนึ่งและแรงดังกล่าวอาจจะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ หรือ $d\vec{p} = \vec{F}dt$ เมื่อทำการอินทิเกรตสมการดังกล่าวเราจะทราบการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมตลอดช่วงเวลาที่ถูกแรงกระทำเรียกปริมาณนี้ว่า การดล (Impulse) ซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \tag{5.7}$$

จากสมการ 5.7 เนื่องจากแรงไม่คงที่ ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงนิยามแรงเฉลี่ยมีค่าเป็น

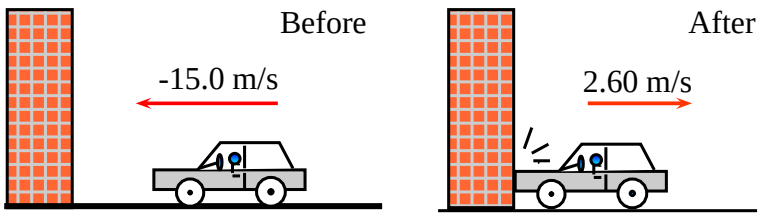
$$\bar{\vec{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \tag{5.8}$$

ทำให้ได้ขนาดของการดลในเทอมของแรงเฉลี่ยเป็นดังนี้

$$I = \bar{F}\Delta t \tag{5.9}$$

ในสถานะการณ์ทางกายภาพหลาย ๆอย่างเราจะใช้การประมาณการดลที่ซึ่งสมมติว่าแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้นกระทำในช่วงเวลาสั้น ๆแต่ขนาดมากกว่าแรงอื่นที่มีอยู่ขณะนั้นมาก

ตัวอย่างที่ 1 ในการทดสอบการชนของรถยนต์คันหนึ่ง รถยนต์มีมวล 1500 kg พุ่งชนกำแพงด้วยความเร็วต้น 15 m/s หลังจากชนรถยนต์กระเด็นออกมาด้วยความปลาย 2.6 m/s ดังรูป 5.2 ถ้าช่วงเวลาของการชนครั้งนี้คือ 0.15 วินาทีจงหาขนาดของการดลและแรงดลนี้



รูปที่ 5.2: การทดสอบการชนของรถยนต์คันหนึ่ง

วิธีทำ จากนิยามการดลของวัตถุในช่วงเวลาหนึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} I &= \Delta p = p_f - p_i = mv_f - mv_i \\ &= m(v_f - v_i) = 1500(2.6 - (-15)) = 2.64 \times 10^4 \quad \text{kg.m/s} \end{aligned}$$

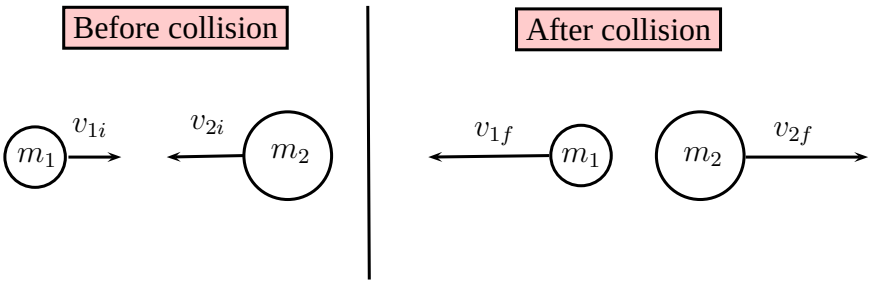
และแรงดลมีค่าเท่ากับ

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4}{0.15} = 1.76 \times 10^5 \quad \text{N}$$

ตอบ ขนาดการดลและแรงดลมีค่าเท่ากับ 2.64×10^4 kg.m/s และ 1.76×10^5 N ตามลำดับ

5.4 การชนแบบยืดหยุ่น

การชนแบบยืดหยุ่น (Elastic collision) ของวัตถุสองวัตถุใด ๆก็คือ การชนกันที่ทำให้พลังงานจลน์ และโมเมนตัมรวมของระบบก่อนและหลังการชนกันมีค่าเท่ากัน จากรูป 5.3 สมมติอนุภาคทั้งสองพุ่งเข้าชนกันและเป็นการชนแบบยืดหยุ่นด้วยจากหลักการคงตัวของโมเมนตัมและการคงตัวของพลังงานจลน์จะได้ว่า



รูปที่ 5.3: การชนกันในแบบ 1 มิติของระบบสองอนุภาค

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{5.10}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{5.11}$$

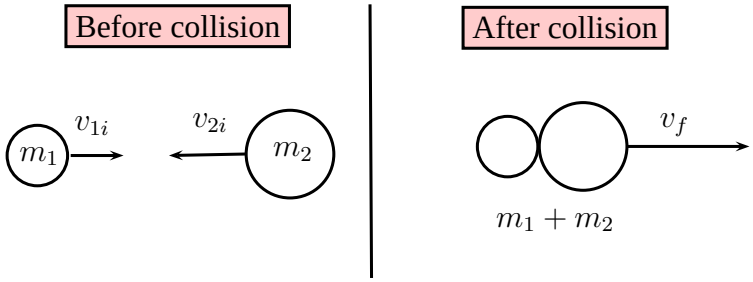
ในการคำนวณโดยใช้สมการข้างต้นจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องกำหนดเครื่องหมายให้กับความเร็วของวัตถุ โดยให้ความเร็วมีค่าเป็นบวกเมื่อเคลื่อนที่ไปทางขวามือ $(+x)$ และมีค่าเป็นลบเมื่อเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ $(-x)$ และจากสองสมการนี้ทำให้เราสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วต้นกับความเร็วปลายของวัตถุทั้งสองได้ดังนี้

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \tag{5.12}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \tag{5.13}$$

5.5 การชนแบบไม่ยืดหยุ่น

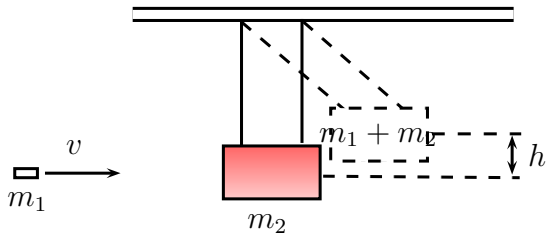
การชนของวัตถุซึ่งทำให้พลังงานจลน์รวมของระบบก่อนชนและหลังชนมีค่าไม่เท่ากัน แต่โมเมนตัมรวมยังคงที่ เรียกว่าการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic collision) ในการเฉพาะที่วัตถุชนกันแล้วมวลทั้งสองติดกันไปดังรูป 5.4 เราเรียกว่า การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Perfectly inelastic collision) และผลจากการชนดังกล่าวทำให้เราหาค่าความเร็วหลังการชนได้ดังนี้



รูปที่ 5.4: การชนกันในแบบ 1 มิติของระบบสองอนุภาคแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

$$\begin{aligned} p_{1i} + p_{2i} &= p_f \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= (m_1 + m_2) v_f \\ v_f &= \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{5.14}$$

ตัวอย่างที่ 2 ลูกปืนมวล m_1 ถูกยิงออกไปในแนวระดับพุ่งเข้าชนกับแท่งไม้มวล m_2 ที่แขวนอยู่นิ่งในแนวดิ่งด้วยเชือกมวลเบา ลูกปืนฝังเข้าไปในเนื้อไม้และแกว่งขึ้นในไปที่ระดับความสูง h จากระดับเดิมดังรูป 5.5 จงหาความเร็วของลูกปืนก่อนชนกับแท่งไม้



รูปที่ 5.5: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ เนื่องจากแท่งไม้อยู่นิ่งตอนเริ่มต้น $v_{2i} = 0$ และลูกปืนมีความเร็ว$v_{1i} = v$ หลังจากชนมวลทั้งสองติดกันไปด้วยความเร็ว v_f ดังนั้นจากหลักการคงตัวของโมเมนตัมจะได้ว่า

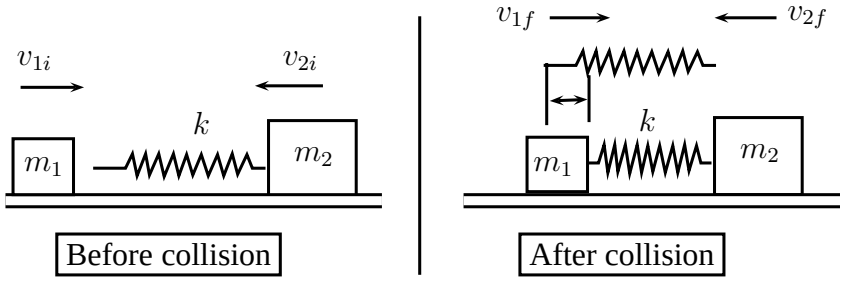
$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= (m_1 + m_2) v_f \\ m_1 v + 0 &= (m_1 + m_2) v_f \\ v_f &= \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

หลังจากชนแล้วแท่งไม้แกว่งขึ้นไปที่ระดับความสูง h จากระดับเดิม โดยใช้หลักการคงตัวของพลังเชิงกลจะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 + 0 &= 0 + (m_1 + m_2) gh \\ \frac{1}{2} v_f^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} &= gh \\ v^2 &= 2 \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^2} gh \\ v &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

ตอบ ความเร็วของลูกปืนก่อนชนมีค่าเท่ากับ $\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$

ตัวอย่างที่ 3 กล่องวัตถุมวล $m_1 = 1.6$ kg เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว 4 m/s บนพื้นราบลื่นและพุ่งเข้าชนกับสปริงที่ยึดกับมวล $m_2 = 2.1$ kg ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็ว 2.5 m/s ดังรูป 5.6 ถ้าค่าคงที่ของสปริง $k = 600$ N/m จงหา
(ก) ความเร็วของมวล m_2 ขณะที่มวล m_1 มีความเร็ว 3.0 m/s ไปทางขวาหลังจากการชน
(ข) ระยะที่สปริงถูกอัดขณะเกิดการชน



รูปที่ 5.6: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 3

<u>วิธีทำ</u> (ก) โดยใช้หลักการคงตัวของโมเมนตัมจะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_{1i} + p_{2i} &= p_{1f} + p_{2f} \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ (1.6)(4.0) + (2.1)(-2.5) &= (1.6)(3.0) + (2.1) v_{2f} \\ v_{2f} &= -1.74 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

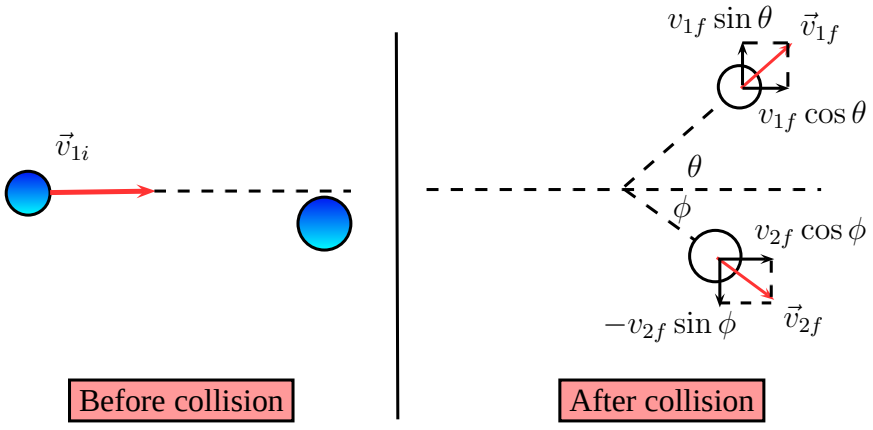
(ข) โดยใช้หลักการคงตัวของพลังงานเชิงกลจะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 + 0 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \\ x &= 0.173 \quad \text{m} \end{aligned}$$

<u>ตอบ</u> ความเร็วของวัตถุมวล m_2 คือ 1.74 m/s เคลื่อนที่ไปทาง $-x$ และระยะที่สปริงถูกอัดหลังการชนเท่ากับ 0.173 เมตร

5.6 การชนแบบ 2 มิติ

พิจารณาการชนของอนุภาคในระนาบ xy โดยที่เริ่มต้นอนุภาคมวล m_2 หยุดนิ่ง ขณะที่มวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็วพุ่งเข้าชนดังรูป 5.7 โดยใช้หลักการคงตัวของโมเมนตัมตามแกน x และ y ทำให้ได้



รูปที่ 5.7: การชนในแบบ 2 มิติของระบบ 2 อนุภาค

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \tag{5.15}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \tag{5.16}$$

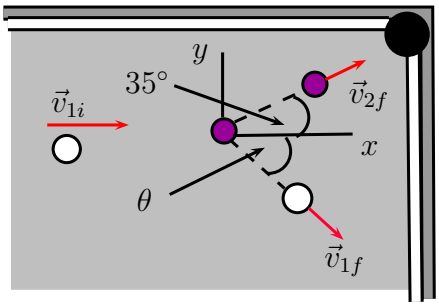
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi \tag{5.17}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi \tag{5.18}$$

ถ้าหากการชนเป็นแบบยืดหยุ่นจะได้ว่า พลังงานจลน์ก่อนและหลังการชนจะมีค่าเท่ากันนั่นคือ

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{5.19}$$

ตัวอย่างที่ 4 นักกีฬาคนหนึ่งแทงลูกบิลเลียดให้เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว v_{1i} ในทิศ +x พุ่งเข้าชนลูกบิลเลียดอีกลูกหนึ่งซึ่งหยุดนิ่ง หลังจากการชนลูกบิลเลียดทั้งสองกระเด็นทำมุมกับแนวแกน+x เป็นมุมดังแสดงในรูป 5.8 สมมติในการชนนี้เป็นแบบยืดหยุ่น จงคำนวณหาค่ามุม θ



รูปที่ 5.8: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 4

วิธีทำ จากหลักการคงตัวของโมเมนตัม ทำให้ได้

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

และพลังงานจลน์ของระบบก่อนและหลังการชนคือ

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2f}^2$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

เนื่องจาก $v_{1i}^2 = \vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{1i} = (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) \cdot (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f}$ เพราะว่ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{v}_{1f}$ กับ $\vec{v}_{2f}$ คือ $\theta + 35^\circ$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35)$$
$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35)$$

จากสมการข้างต้นทำให้เราสามารถคำนวณหาค่ามุม θ ได้ดังนี้

$$0 = 2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35)$$
$$0 = \cos(\theta + 35)$$
$$\theta + 35 = 90$$
$$\theta = 90 - 35 = 55^\circ$$

ตอบ ลูกบิลเลียดทั้งสองทำมุมกัน 55 องศา หลังจากการชน

5.7 จุดศูนย์กลางมวล

พิจารณาในกรณีระบบที่มี n อนุภาค การหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลคำนวณได้จาก

$$x_C M = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \tag{5.20}$$

$$y_C M = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \tag{5.21}$$

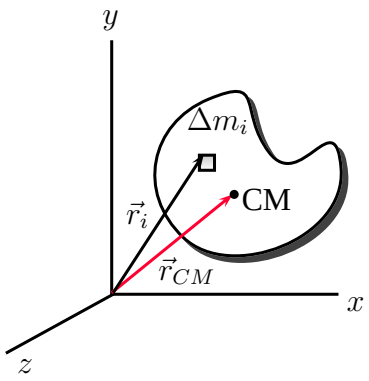
$$z_C M = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M} \tag{5.22}$$

ในกรณีของระบบอนุภาคที่กระจายอย่างต่อเนื่องดังรูป 5.9 จุดศูนย์กลางมวลจะคำนวณได้จากการหาการอินติเกรตดังนี้

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{M} \tag{5.23}$$

$$y_{CM} = \frac{\int y dm}{M} \tag{5.24}$$

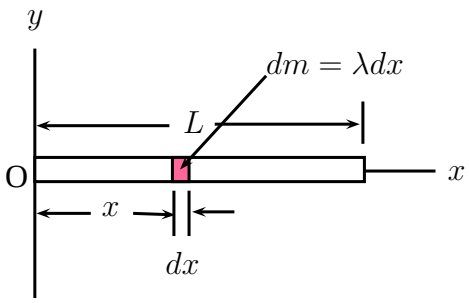
$$z_{CM} = \frac{\int z dm}{M} \tag{5.25}$$



รูปที่ 5.9: การหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคที่มีการกระจายอย่างต่อเนื่อง

เมื่อ $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาค i ที่มีมวล Δm_i และ $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{x} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล

ตัวอย่างที่ 5 จากรูป 5.10 จงคำนวณหาจุดศูนย์กลางมวลของแท่งไม้ยาวสม่ำเสมอ L และมวล M



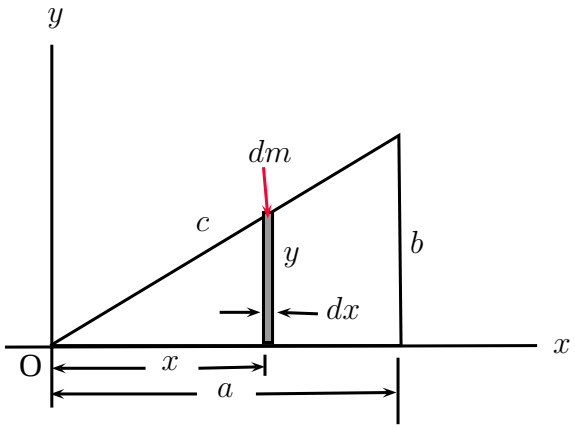
รูปที่ 5.10: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 5

วิธีทำ เนื่องจากแท่งไม้วางตามแกน x ดังนั้น $y_{CM} = 0$ และ $z_{CM} = 0$ ถ้ากำหนดให้ λ คือความหนาแน่นมวลต่อความยาวจะได้ว่า $\lambda = \frac{M}{L}$ พิจารณาความยาวส่วนเล็ก ๆ dx ซึ่งมีมวล $dm = \lambda dx$ จากนิยามของจุดศูนย์กลางมวล ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^L \lambda x\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} \\ x_{CM} &= \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

ตอบ จุดศูนย์กลางมวลของแท่งวัตถุคือ $\frac{L}{2}$

ตัวอย่างที่ 6 จงคำนวณหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมวล M ดังรูป 5.11



รูปที่ 5.11: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 6

วิธีทำ เริ่มจากพิจารณาวัตถุส่วนเล็ก ๆ ซึ่งมีขนาดเป็น dx มวล dm โดยที่

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{\frac{1}{2}ab}(y\mathrm{d}x) = \left(\frac{2M}{ab}\right) y\mathrm{d}x$$

ดังนั้นพิกัดตามแกน x ของจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^a x\left(\frac{2M}{ab}\right) y\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{ab}\int_0^a xy\mathrm{d}x \end{aligned}$$

เพื่อทำการคำนวณหาค่าอินทิเกรตจำเป็นต้องแสดงค่า y ในเทอมของตัวแปร x โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \Longrightarrow y = \frac{b}{a}x$$

แทนค่าของ y ลงในสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}\right) x\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^a \\ x_{CM} &= \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

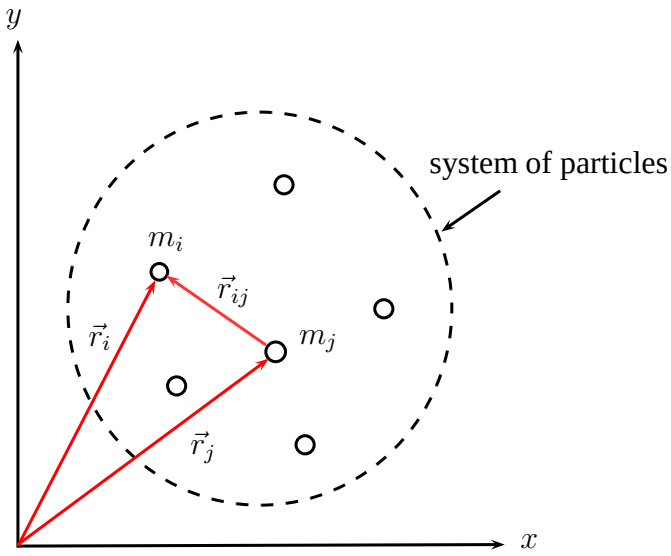
โดยการคำนวณในแบบเดียวกันเราจะได้พิกัดของจุดศูนย์กลางมวลตามแกน y ดังนี้

$$y_{CM} = \frac{1}{3}b$$

ตอบ จุดศูนย์กลางมวลของรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวคือ $x_{CM} = \frac{2}{3}a$ และ $y_{CM} = \frac{1}{3}b$

5.8 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

ระบบอนุภาค (system of particles) หมายถึง กลุ่มของอนุภาคที่มีจำนวนตั้งแต่ 2 อนุภาคขึ้นไป การศึกษาการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันสำหรับแต่ละอนุภาคนั้นค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้นเราจำเป็นต้องหาจุดที่เป็นตัวแทนของอนุภาคทั้งหมด ซึ่งเราเรียกว่า จุดศูนย์กลางมวล ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา สำหรับในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคซึ่งจะเกี่ยวพันกับจุดศูนย์กลางมวล พิจารณาอนุภาค



รูปที่ 5.12: เวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาค i และ j ในระบบอนุภาคซึ่งวัดในกรอบอ้างอิง xy

มวล m_i ซึ่งเป็นอนุภาคหนึ่งในระบบอนุภาค ดังแสดงในรูป 5.12 จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i \tag{5.26}$$

เมื่อให้ $\vec{F}_i$ คือ แรงลัพธ์เนื่องจากแรงจากอนุภาคอื่น ๆทั้งหมดกระทำต่ออนุภาคมวล m_i และ $\vec{a}_i$ คือ ความเร่งของอนุภาค m_i จากสมการ 5.26 ถ้าเราเขียนสำหรับอนุภาคทั้งหมดในระบบ

จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_{CM} \tag{5.27}$$

เมื่อ $\vec{a}_{CM}$ คือ ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล เนื่องจากแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบอนุภาคประกอบด้วยแรงจากภายนอก และแรงภายในระบบ ดังนั้น เทอมทั้งซ้าย ของสมการ 5.27 เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,int} \\ &= \vec{F}_{ext} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij}\end{aligned}$$

เมื่อ $\vec{F}_{i,ext}$ และ $\vec{F}_{i,int}$ แทน แรงภายนอกทั้งหมดและแรงภายในทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคมวล m_i ส่วน $\vec{F}_{ext}$ คือ แรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อระบบอนุภาคทั้งระบบ

สำหรับแรงภายในระบบ $\vec{F}_{i,int}$ นั้นเกิดจากอนุภาคอื่น ๆภายในระบบอนุภาคเดียวกันกระทำต่ออนุภาคมวล m_i ซึ่ง $\vec{F}_{ij}$ ก็คือแรงที่เกิดจากอนุภาคมวล m_j กระทำต่ออนุภาคมวล m_i ดังนั้น

$$\vec{F}_{i,int} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij} \tag{5.28}$$

เมื่อเรารวมแรงภายในระบบทั้งหมดเป็นคู่ ๆ ตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงกันข้าม ดังนั้น แรงลัพธ์ภายในระบบจึงมีค่าเป็นศูนย์ และสมการ 5.26 เขียนใหม่ได้เป็น

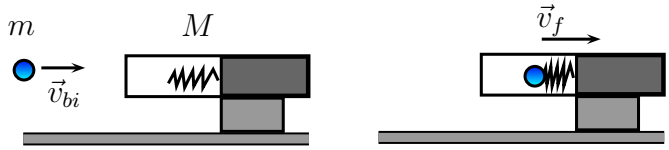
$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \tag{5.29}$$

นั่นคือ *จุดศูนย์กลางมวลของระบบจะเคลื่อนที่เสมือนกับว่ามันเป็นอนุภาคหนึ่ง ที่มีมวลทั้งหมดเท่ากับมวลทั้งหมดของระบบอนุภาคในขณะที่ถูกแรงภายนอกกระทำ* ในกรณีที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ ($\vec{F}_{ext} = 0$) และจากนิยาม $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ ดังนั้น จะได้ว่า โมเมนตัมของระบบอนุภาคจะมีค่าคงที่ เราเรียกระบบนี้ว่า ระบบโดดเดี่ยว (isolated system)

5.9 แบบฝึกหัด

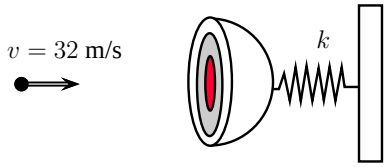
1. ลูกเบสบอลมวล 0.145 kg เคลื่อนที่ตามแนวแกน $+x$ ด้วยความเร็ว 3.4 m/s และลูกเทนนิสมวล 0.057 kg เคลื่อนที่ตามแนว $-x$ ด้วยความเร็ว 6.2 m/s จงคำนวณหา

ขนาดและทิศของโมเมนตัมรวมของระบบที่ประกอบไปด้วยลูกเบสบอลและลูกเทนนิส



รูปที่ 5.13: สำหรับโจทย์ข้อที่ 3

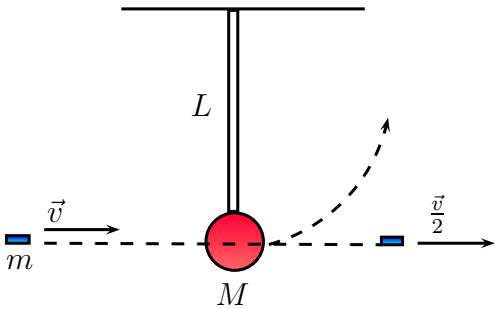
2. ลูกกอล์ฟมวล 0.045 kg ถูกตีด้วยไม้กอล์ฟจากจุดหยุดนิ่งจนมีความเร็ว 40 m/s กำหนดให้เวลาที่ไม้กอล์ฟสัมผัสลูกกอล์ฟเท่ากับ 2 ms จงคำนวณแรงเฉลี่ยที่เกิดขึ้นบนลูกกอล์ฟ



รูปที่ 5.14: สำหรับโจทย์ข้อที่ 5

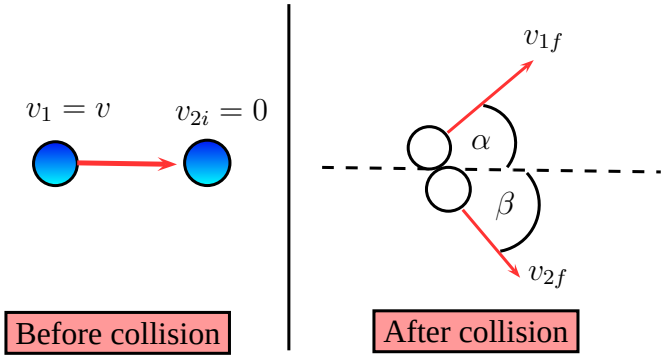
3. ลูกบอลมวล m = 50 g ถูกยิงด้วยอัตราเร็ว $v_{bi} = 25$ m/s เข้าไปภายในปืนสปริงมวล M = 250 g ซึ่งกำลังอยู่นิ่งโดยลูกบอลจะติดอยู่ในกระบอกปืนที่ตำแหน่งกดสปริงมากที่สุดดังรูป 5.13 กำหนดให้ไม่ต้องพิจารณาพลังงานความร้อนที่เกิดขึ้นจากความเสียดทานระหว่างลูกบอลกับกระบอกปืน จงคำนวณหา

   - อัตราเร็วของปืนสปริงหลังจากลูกบอลติดอยู่นิ่งภายในกระบอกปืน
   - สัดส่วนระหว่างพลังงานที่สะสมในสปริงกับพลังงานจลน์เริ่มต้นของลูกบอล



รูปที่ 5.15: สำหรับโจทย์ข้อที่ 6

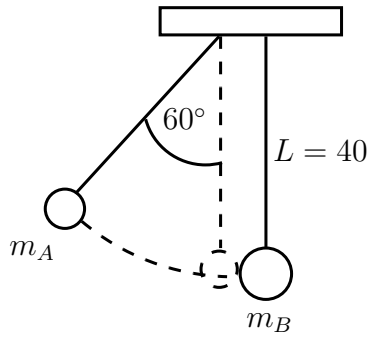
4. ปืนกระบอกหนึ่งยิงกระสุนมวล 30 g ไปชนและฝังในกล่องมวล 1.5 kg ซึ่งวางอยู่นิ่งด้านหน้าปืน หากสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างพื้นราบกับกล่องเท่ากับ 0.25 และภายหลังจากกระสุนชนกับกล่อง กล่องเคลื่อนที่ได้ระยะทาง10 m ก่อนจะหยุดนิ่ง จงคำนวณหาอัตราเร็วของกระสุน



รูปที่ 5.16: สำหรับโจทย์ข้อที่ 7

5. ลูกดอกอันหนึ่งมวล 25 g ถูกปาไปที่เป้ามวล 1.6 kg ด้วยความเร็ว 32 m/s ดังรูป 5.14 ภายหลังจากการปาเป้าสปริงที่ติดอยู่ด้านหลังของเป้าจะเคลื่อนที่ถอยไปเป็นระยะ 2.4 cm จงคำนวณหาค่าคงตัว k ของสปริง กำหนดให้เป็นสปริงเชิงเส้นตามกฎของฮุก

6. กระสุนมวล m เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v เข้าชนกับลูกตุ้มมวล M ที่แขวนด้วยแท่งวัตถุเบายาว L หลังจากชนกันกระสุนจะทะลุผ่านลูกตุ้มด้วยอัตราเร็ว $v/2$ ดังรูป 5.15 จงคำนวณหาอัตราเร็ว v ที่น้อยที่สุดซึ่งเพียงพอที่จะทำให้ลูกตุ้มแกว่งเป็นวงกลมในแนวดิ่งได้พอดี

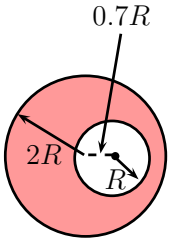


รูปที่ 5.17: สำหรับโจทย์ข้อที่ 8

7. จงพิสูจน์ว่าภายหลังจากการชนแบบยืดหยุ่นของวัตถุสองอันที่มีมวลเท่ากันโดยวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เข้าชนอีกวัตถุหนึ่งที่เป็นเป้านิ่งดังรูป 5.16 แล้วจะมีมุมระหว่างความเร็วหลังชนของวัตถุทั้งสองเท่ากับ 90° เสมอ

8. วัตถุ A และวัตถุ B มีมวล m_A = 50 g และ m_B = 70 g ถูกแขวนไว้ด้วยเชือกดังรูป 5.17วัตถุ A ถูกดึงให้เอียงทำมุม 60° กับแนวดิ่งจากนั้นปล่อยให้เคลื่อนที่ กำหนดให้เป็นการชนแบบยืดหยุ่น จงหา

   - ความเร็วของวัตถุ A ก่อนชนกับวัตถุ B
   - ความเร็วของวัตถุทั้งสองหลังชน
   - ความสูงที่วัตถุแต่ละอันสามารถเคลื่อนที่ได้หลังจากชนกัน



รูปที่ 5.18: สำหรับโจทย์ข้อที่ 10

9. โมเลกุลของน้ำประกอบด้วยออกซิเจน 1 อะตอม และไฮโดรเจน 2 อะตอมยึดกันด้วยพันธะเคมีโดยมีมุมระหว่างพันธะทั้งสอง 106° ถ้าความยาวของพันธะเท่ากับ 0.100 นาโนเมตรจงหาว่าจุดศูนย์กลางมวลของโมเลกุลนี้อยู่ที่ตำแหน่งไหน

10. แผ่นวงกลมสม่ำเสมอรัศมี $2R$ ถูกเจาะออกเป็นรูปวงกลมขนาดเล็กรัศมี R โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมขนาดเล็กที่เจาะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของแผ่นวงกลมเท่ากับ $0.70R$ ดังรูป 5.18 จงคำนวณจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวงกลมรัศมี $2R$ ที่ถูกเจาะนี้

บทที่ 6

การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

6.1 ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

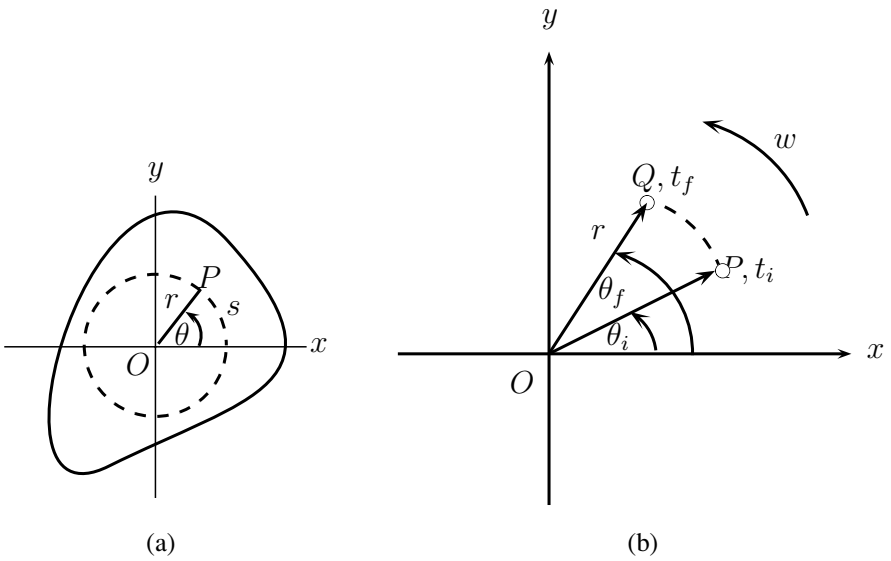
วัตถุแข็งเกร็ง (rigid body) ในที่นี้หมายถึง วัตถุที่มีรูปร่างใด ๆซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำหรืออาจจะกล่าวได้ว่าระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนวัตถุดังกล่าวมีค่าคงที่ ในการศึกษากลศาสตร์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งจะเริ่มจากการหมุนรอบแกนที่คงที่ พิจารณาการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรูปร่างใด ๆที่วางอยู่บนระนาบ xy และหมุนรอบแกน z ที่มีจุดหมุนอยู่ที่จุด O ดังรูปที่ 6.1(a) ทุก ๆส่วนของวัตถุนี้จะหมุนรอบจุด O ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเดียวกัน และมีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นวงกลมเนื่องจากระยะห่างจากจุดหมุนถึงตำแหน่งใด ๆบนวัตถุมีค่าคงที่ตลอด เช่นอนุภาคที่อยู่ที่จุด P ซึ่งอยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง r ก็จะเคลื่อนที่เป็นวงกลม ถ้าขณะเริ่มต้นอนุภาคเคลื่อนที่ จากตำแหน่งบนแกน x ไปตามส่วนโค้งจนถึงจุด P ได้ระยะทางเป็นs ดังนั้นระยะทางเชิงมุมที่ได้คือ

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{6.1}$$

ระยะทางเชิงมุมในสมการที่ 6.1 จะเห็นว่าไม่มีหน่วย แต่เพื่อความสะดวกในการวัดได้มีการกำหนดหน่วยให้เป็น เรเดียน(radian) การเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบได้ระยะทางเท่ากับ $2\pi r$ คิดเป็นมุมเท่ากับ 2π rad. หรือ 360° ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างมุมในหน่วยเรเดียน (rad.) และในหน่วยองศา (deg.) ก็คือ

$$\theta \text{ (rad.)} = \frac{\pi}{180^\circ}\theta \text{ (deg.)} \tag{6.2}$$

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งมีการหมุน อนุภาคทุกตัวที่ประกอบเป็นวัตถุแข็งเกร็งจะเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคใด ๆโดยเริ่มต้นอนุภาคอยู่ที่จุด P ที่เวลา t_i มีระยะเชิงมุม



รูปที่ 6.1: (a) วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนที่ผ่านจุด O และ (b) การกระจัดเชิงมุมของอนุภาคเนื่องจากการหมุน

เป็น θ_i เมื่อเคลื่อนที่มาอยู่ที่จุด P ที่เวลา t_f มีระยะเชิงมุมเป็น θ_f ดังรูป 6.1(b) การกระจัดเชิงมุม (Angular displacement) ของอนุภาคนี้จากจุด P ไปยังจุด Q คือ

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \tag{6.3}$$

อัตราส่วนของการกระจัดเชิงมุมต่อช่วงเวลา เรียกว่า ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย $\bar{\omega}$ มีหน่วยเป็น rad/s

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{6.4}$$

เมื่อพิจารณาในช่วงเวลาสั้น ๆ $(\Delta t \to 0)$ ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยจะกลายเป็นความเร็วเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่งนั่นคือ

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{6.5}$$

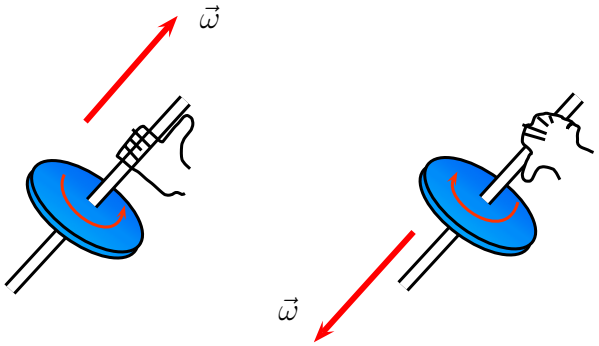
ในการหมุนรอบแกนใด ๆ ถ้าวัตถุมีการเปลี่ยนความเร็วเชิงมุมจาก ω_i เป็น ω_f จะได้ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ย $(\bar{\alpha})$ คือ

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{6.6}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับการเปลี่ยนความเร็วเชิงมุมในช่วงสั้น ๆ ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยจะกลายเป็นความเร่งเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่งดังนี้

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} \tag{6.7}$$

ความเร่งเชิงมุมมีหน่วยเป็น rad/s^2 เนื่องจากปริมาณทั้งความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมเป็นปริมาณเวกเตอร์ดังนั้นการระบุปริมาณเหล่านี้จะต้องมีทั้งขนาดและทิศทาง ในการกำหนดทิศทางของความเร็วเชิงมุม จะใช้กฎมือขวาดังแสดงในรูปที่ 6.2 ในขณะทิศของความเร่งเชิงมุมจะขึ้นอยู่กับอัตราการเปลี่ยนความเร็วเชิงมุมกล่าวคือถ้าความเร็วเชิงมุมมีอัตราเพิ่มขึ้น ทิศของความเร่งเชิงมุมจะมีทิศเดียวกับความเร็วเชิงมุม แต่ถ้ามีอัตราลดลง ความเร่งเชิงมุมก็จะมีทิศตรงข้ามกับความเร็วเชิงมุม



รูปที่ 6.2: แสดงทิศของความเร็วเชิงมุมโดยใช้กฎมือขวาเมื่อ (a) วัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิกา และ (b) หมุนตามเข็มนาฬิกา

6.2 การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่

เมื่อวัตถุหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่จะได้ว่าสมการที่เกี่ยวข้องกับจลนศาสตร์การหมุนดังต่อไปนี้

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \tag{6.8}$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{6.9}$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\left(\theta_f - \theta_i\right) \tag{6.10}$$

เมื่อ ω_i และ ω_f คือ ความเร็วเชิงมุมต้นและความเร็วเชิงมุมสุดท้ายตามลำดับθ_i และ θ_f คือ ระยะเชิงมุมต้นและระยะเชิงมุมสุดท้ายตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 3.1 ล้อวงกลมหมุนรอบแกนที่ตึงอยู่กับที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ 3.5 rad/s^2 ถ้าความเร็วเชิงมุมของล้อวงกลมที่เวลา t_i = 0 มีค่าเท่ากับ 2.0 rad/s จงคำนวณ

(ก) ในเวลา 2 วินาที ล้อวงกลมจะหมุนได้กี่รอบ

(ข) ขนาดของความเร็วเชิงมุมที่เวลา 2 วินาที

วิธีทำ (ก) โดยอาศัยสมการ 6.9 เพื่อหาการกระจัดเชิงมุมในช่วงเวลาตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงเวลา 2 วินาที ดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta\theta = \theta_f - \theta_i &= \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= (2.0 \text{ rad/s})(2 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.5 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s})^2 \\ &= 11.0 \text{ rad}\end{aligned}$$

ในการหมุน 1 รอบ มีระยะเชิงมุมเท่ากับ 2π rad ดังนั้นเมื่อวัตถุหมุนได้ระยะเชิงมุมเป็น 11.0 rad จะมีจำนวนรอบการหมุนเท่ากับ $\frac{11}{2\pi} = 1.75$ รอบ
(ข) ความเร็วเชิงมุมที่เวลา 2 วินาที หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\omega_f &= \omega_i + \alpha t \\ &= 2 \text{ rad} + (3.5 \text{ rad/s}^2)(2.0 \text{ s}) \\ \omega &= 9.0 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

6.3 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเชิงมุมและปริมาณเชิงเส้น

พิจารณาที่จุดใด ๆบนวัตถุแข็งเกร็งที่กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω ดังแสดงในรูปที่ 6.3 ความเร็วเชิงเส้น v ที่จุดดังกล่าวจะมีความสัมพันธ์กับความเร็วเชิงมุมดังนี้

$$v = \frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{6.11}$$

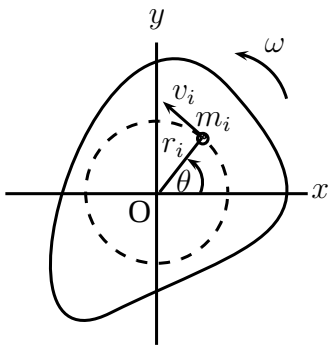
และเมื่อวัตถุหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ จุดที่อยู่บนวัตถุจะมีความเร่งในแนวเส้นสัมผัส (tangential acceleration, a_t) และความเร่งในแนวรัศมี (radial acceleration, a_r) ซึ่งจะเกี่ยวพันปริมาณเชิงมุมดังนี้

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{6.12}$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{6.13}$$

ดังนั้นความเร่งลัพธ์ที่จุดใด ๆบนวัตถุแข็งเกร็งคือการรวมกันแบบเวกเตอร์ขององค์ประกอบความเร่งทั้งสองแนวซึ่งมีขนาดเท่ากับ

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \tag{6.14}$$



รูปที่ 6.3: วัตถุหมุนรอบแกน z ที่ผ่านจุด O ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω

6.4 พลังงานจลน์ของการหมุน

อนุภาคมวล m_i ที่ประกอบเป็นวัตถุแข็งเกร็งซึ่งกำลังหมุนรอบแกน z ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ดังรูป 6.3 จะมีพลังงานจลน์เป็น

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{6.15}$$

เนื่องจาก $v_i = r_i\omega$ ดังนั้น สมการ 6.15 เขียนใหม่ได้เป็น

$$K_i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \tag{6.16}$$

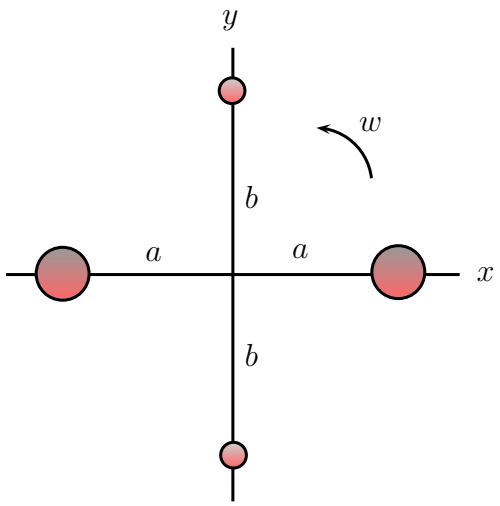
เมื่อรวมพลังงานจลน์ของอุภาคทั้งหมดที่ประกอบขึ้นมาเป็นวัตถุแข็งเกร็งทำให้ได้พลังงานจลน์ของการหมุนเป็นดังนี้

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i (\frac{1}{2} m_i r_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(\sum_i m_i r_i^2)\omega^2 \tag{6.17}$$

เมื่อ $I = \sum m_i r_i^2$ ซึ่งเรียกว่า *โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia)* มีหน่วยเป็น kg.m^2 ดังนั้นสมการที่ 6.17 เขียนใหม่ได้เป็น

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{6.18}$$

ในสมการที่ 6.18 แสดงให้ว่าพลังงานจลน์ทีเนื่องจากการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งจะขึ้นอยู่กับค่าโมเมนต์ความเฉื่อยและอัตราเร็วเชิงมุม โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุในการหมุนจะคล้ายคลึง



รูปที่ 6.4: ระบบอนุภาคที่ประกอบเป็นวัตถุแข็งเกร็งกำลังหมุนรอบแกน z

กับความเฉื่อยของวัตถุในการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวเส้นตรง แต่อย่างไรก็ตามค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจะขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของวัตถุด้วย

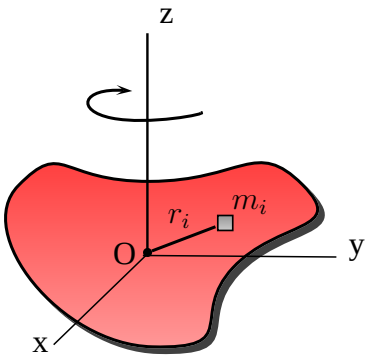
ตัวอย่างที่ 5.2 วัตถุทรงกลมเล็ก ๆสี่ก้อนวางอยู่ที่ตำแหน่งบนแกน x และ y และยึดติดกันด้วยแท่งยาวที่มีมวลน้อยมาก ดังรูปที่ 6.4 ถ้าทรงกลมทั้งสี่มีรัศมีน้อยมากเมื่อเทียบกับระยะทางระหว่างวัตถุแต่ละอันถึงจุดหมุน O จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยในการหมุนรอบแกน z และพลังงานจลน์ของการหมุนนี้

วิธีทำ โมเมนต์รอบแกน z คือ I_z มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 \\ &= 2Ma^2 + 2mb^2 \end{aligned}$$

และพลังงานจลน์ของการหมุนคือ

$$\begin{aligned} K_R &= \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 \\ &= (Ma^2 + mb^2)\omega^2 \end{aligned}$$



รูปที่ 6.5: วัตถุแข็งเกร็งที่มวลกระจายอย่างต่อเนื่องกำลังหมุนรอบแกน z

6.5 การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย

เมื่อวัตถุมีมวลกระจายอย่างต่อเนื่อง ผลบวกของมวลคูณกับระยะทางกำลังสองดังที่ได้นิยามไว้ในหัวข้อที่ผ่านมาจะเปลี่ยนเป็นการอินทิกรัล ให้จินตนาการโดยแบ่งวัตถุออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ ซึ่งมีมวลเป็น Δm ซึ่งมีระยะห่างตั้งฉากจากแกนหมุนเป็น r ดังรูป 6.5 ดังนั้นเมื่อใช้เงื่อนไขลิมิตของ Δm เข้าสู่ศูนย์ ทำให้การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุที่มีมวลกระจายอย่างต่อเนื่องสามารถใช้วิธีการอินทิกรัลได้ดังนี้

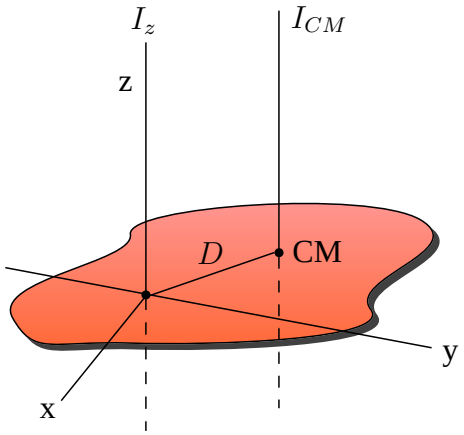
$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \tag{6.19}$$

แต่เนื่องจาก $\rho = \frac{M}{V}$ เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นเชิงปริมาตรมีหน่วยเป็น kg.m^{-3} เมื่อ M และ V คือ มวลและปริมาตรทั้งหมดของวัตถุดังนั้น $dm = \rho dV$ ทำให้สมการที่ 6.19 เขียนใหม่ได้เป็น

$$I = \rho \int r^2 dV \tag{6.20}$$

ในกรณีที่วัตถุมีรูปร่างเป็นแผ่นบาง ๆ หรือมีรูปร่างเป็นเส้นยาว ความหนาแน่นเชิงปริมาตรจะกลายเป็นความหนาแน่นเชิงพื้นผิว (suface density: $\sigma = \frac{M}{A}$) และ ความหนาแน่นเชิงเส้น (linear density: $\lambda = \frac{M}{L}$) เมื่อ A และ L คือ พื้นที่และความยาว ตามลำดับในกรณีดังกล่าวทำให้ได้ $dm = \sigma dA$ และ $dm = \lambda dL$

วิธีการคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยตามที่กล่าวมารอบแกนใด ๆที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุค่อนข้างยุ่งยากแม้กระทั่งวัตถุที่มีความสมมาตรสูง อย่างไรก็ตามก็มีวิธีการเพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนใด ๆ ซึ่งเรียกว่า วิธีทฤษฎีแกนขนาน (parallel-axis theorem) ซึ่งกล่าวว่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนใด ๆที่ขนานและอยู่ห่างเป็นระยะ D กับแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลจะมีค่าดังนี้ (ดูรูปที่ 6.6) และในรูปที่ 6.7 แสดงค่าโมเมนต์



รูปที่ 6.6: การหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ด้วยวิธีทฤษฎีแกนขนาน

ความเฉื่อยของวัตถุที่มีความสมมาตรสูง

$$I = I_{CM} + MD^2 \tag{6.21}$$

ตัวอย่างที่ 5.3 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของห่วงมวล M และรัศมี R รอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบห่วงและผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูป 6.8

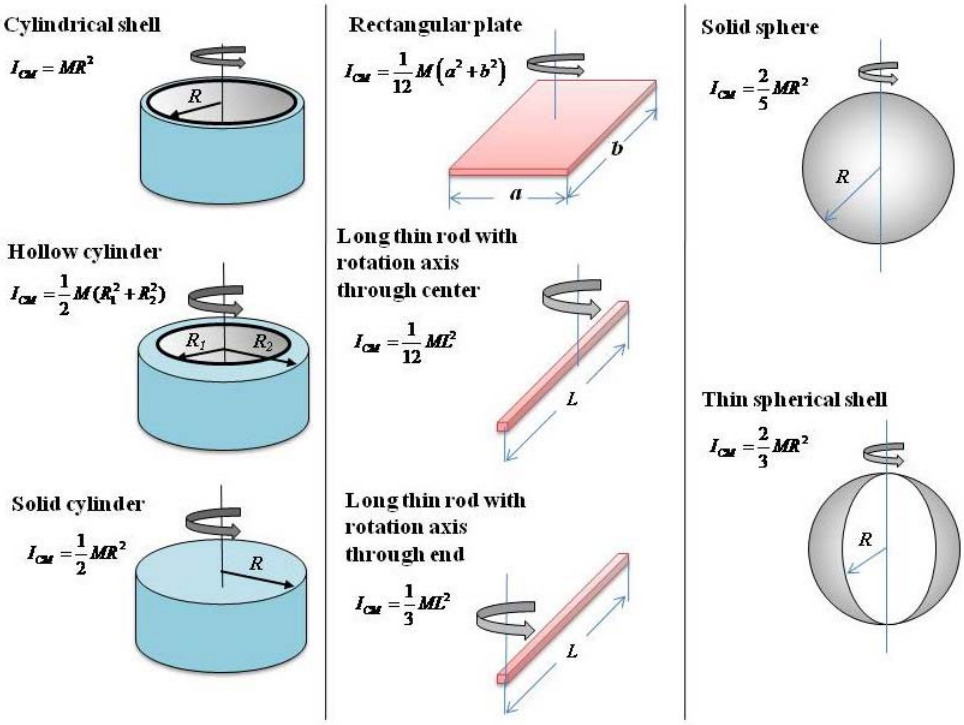
วิธีทำ มวลส่วนเล็กๆทั้งหมด dm มีระยะห่างจากแกนหมุนเท่ากันคือ $r = R$ ดังนั้นจากสมการที่ 6.19 จะได้โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ที่ผ่านจุด O

$$I_z = \int r^2 dm = R^2 \int dm$$
$$I_z = MR^2$$

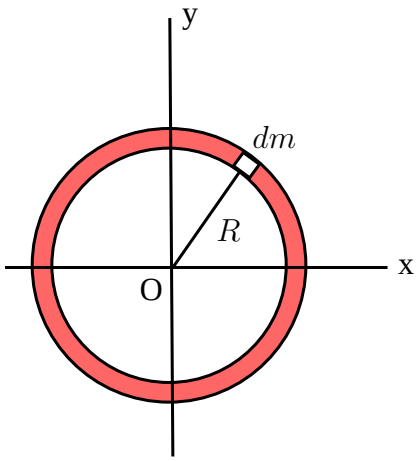
ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งวัตถุตรงขนาดสม่ำเสมอมวล M และยาว L รอบแกนที่ตั้งฉากกับแท่งวัตถุและผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูป 6.9

วิธีทำ พิจารณาส่วนของความยาว dx ซึ่งมีมวลเป็น dm มีค่าเท่ากับ

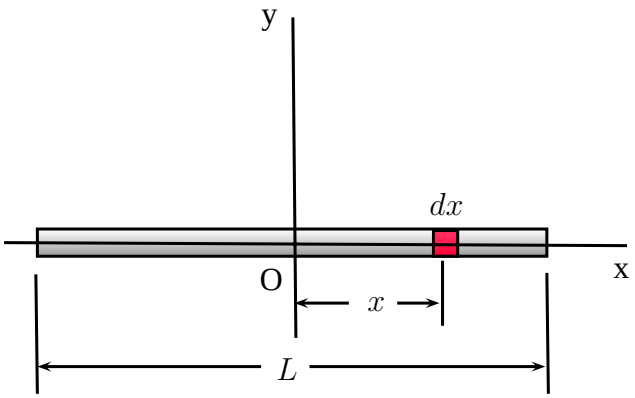
$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$



รูปที่ 6.7: โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงต่าง ๆ



รูปที่ 6.8: มวลส่วนเล็ก ๆ dm ของห่วงทั้งหมดอยู่ห่างจากจุด O เท่ากัน



รูปที่ 6.9: แท่งวัตถุขนาดสม่ำเสมอยาว L

แทนค่า dm นี้ลงในสมการ 6.19 และ $r = x$ จะได้

$$\begin{aligned} I_y &= \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx \\ &= \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm \\ I_z &= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned}$$

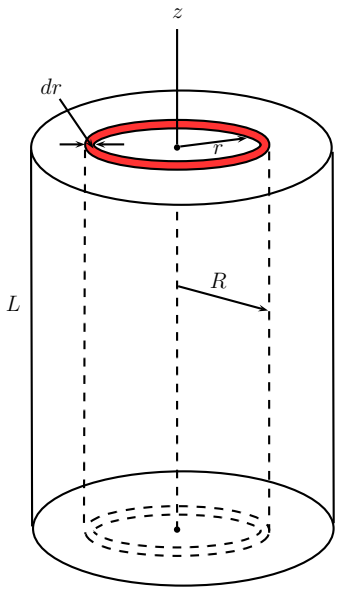
ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกตันขนาดสม่ำเสมอมวล M รัศมี R และยาว L รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูป 6.10

วิธีทำ เพื่อความสะดวกเราจะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นทรงกระบอกบาง ๆจำนวนมาก และแต่ละชั้นจะมีรัศมี r ความหนาเป็น dr และยาว L ดังนั้นปริมาตรของแต่ละชั้นทรงกระบอกคือ $dV = LdA = (2\pi r dr)L$ และมวล $dm = \rho dV = \rho 2\pi r L dr$ เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ 6.19 ทำให้ได้

$$I_z = \int r^2 dm = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

เพราะว่าปริมาตรทั้งหมดของทรวกระบอกคือ $V = \pi R^2 L$ และเราจะเห็นว่า$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$ เมื่อแทนค่า ρ ลงในสมการข้างต้นจะได้

$$I_z = \frac{1}{2} MR^2$$



รูปที่ 6.10: คำนวณค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกตัน

6.6 ทอร์ค

ทอร์ค (torque) คือ ปริมาณที่บ่งบอกถึงแน้วโน้มของการหมุนรอบจุดหมุนใด ๆ ซึ่งมีนิยามดังนี้คือ

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.22}$$

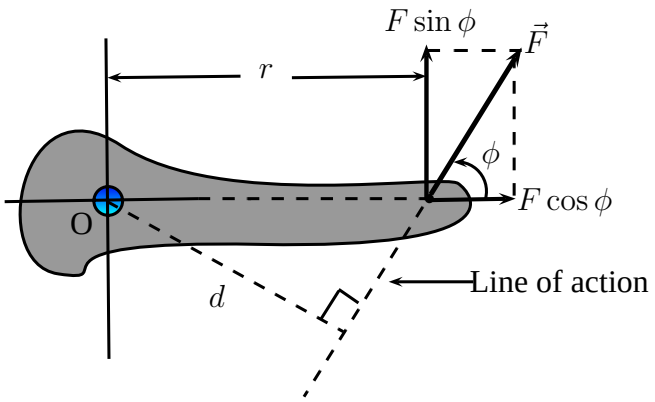
ทอร์ค เป็นปริมาณเวกเตอร์มีทิศซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{r}$ และ $\vec{F}$ และขนาดของทอร์คคือ

$$\tau = rFsin\phi \tag{6.23}$$

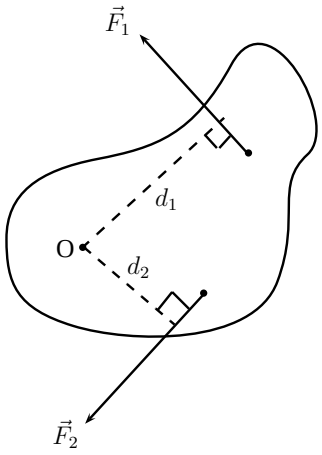
จากสมการ 6.23 ขนาดของทอร์ค คือ ผลคูณของระยะทางจากจุดหมุนถึงตำแหน่งที่แรงกระทำกับขนาดของแรงนั้นในแนวตั้งฉากกับระยะทางดังรูปที่ 6.11 ระยะทางจากจุดหมุนถึงแนวของแรงที่กระทำในแนวตั้งฉาก d ซึ่งเรียกว่า moment arm ของแรง $\vec{F}$ เมื่อวัตถุมีแรงจากภายนอกหลายแรงกระทำต่อวัตถุ ทอร์คลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุรอบจุดหมุนใด ๆจะมีค่าเท่ากับผลรวมแบบเวกเตอร์ของทอร์คย่อย ๆ ดังนี้

$$\vec{\tau}_{net} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + ... + \vec{\tau}_n \tag{6.24}$$

ลองพิจารณากรณีที่มีแรงสองแรง คือ แรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ กระทำต่อวัตถุให้หมุนรอบจุด O ดังรูปที่ 6.12 ทอร์คเนื่องจากแรง $\vec{F}_1$ จะหมุนวัตถุในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาให้เป็นบวก (+)



รูปที่ 6.11: ทอร์คของการหมุนรอบจุด O เนื่องจากมีแรงภายนอกกระทำ



รูปที่ 6.12: ทอร์คของแรงภายนอกสองแรงรอบจุดหมุน O

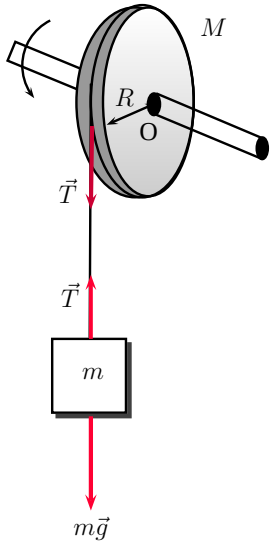
ส่วนทอร์คเนื่องจากแรง $\vec{F}_2$ ทำให้วัตถุหมุนตามเข็มนาฬิกาให้เป็นลบ (-) ดังนั้นขนาดของทอร์คลัพธ์คือ

$$\sum \tau = \tau_1 - \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2 \tag{6.25}$$

และจากสมการที่ 6.24 จะเห็นว่าเมื่อขนาดของทอร์คลัพธ์ไม่เป็นศูนย์วัตถุจะหมุนด้วยด้วยความเร่งเชิงมุมซึ่งเกี่ยวข้องกับโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนหมุนนั้น ดังนี้

$$\vec{\tau}_{net} = \sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{6.26}$$

ตัวอย่างที่ 5.6 ล้อวงกลมมวล M รัศมี R และมีค่าโมเมนต์ความเฉื่อย I กำลังหมุนรอบแกนในแนวระดับดังรูป 6.13 เส้นเชือกมวลเบาพันรอบล้อวงกลมซึ่งปลายด้านหนึ่งของเส้นเชือกผูกติดกับวัตถุมวล m จงคำนวณหาความเร่งเชิงเส้นของวัตถุ และแรงตึงในเส้นเชือก



รูปที่ 6.13: แรงตึงในเส้นเชือกทำให้เกิดทอร์ครอบจุด O

วิธีทำ ทอร์คกระทำต่อล้อหมุนรอบจุด O $\sum\tau = I\alpha$ เนื่องจากแรงตึงในเส้นเชือก T ทำให้ได้

$$\sum\tau = I\alpha = TR$$
$$\alpha = \frac{TR}{I} \tag{1}$$

และโดยการประยุกต์กฎข้อที่ 2 ของนิวตันกับการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m นั่นคือ

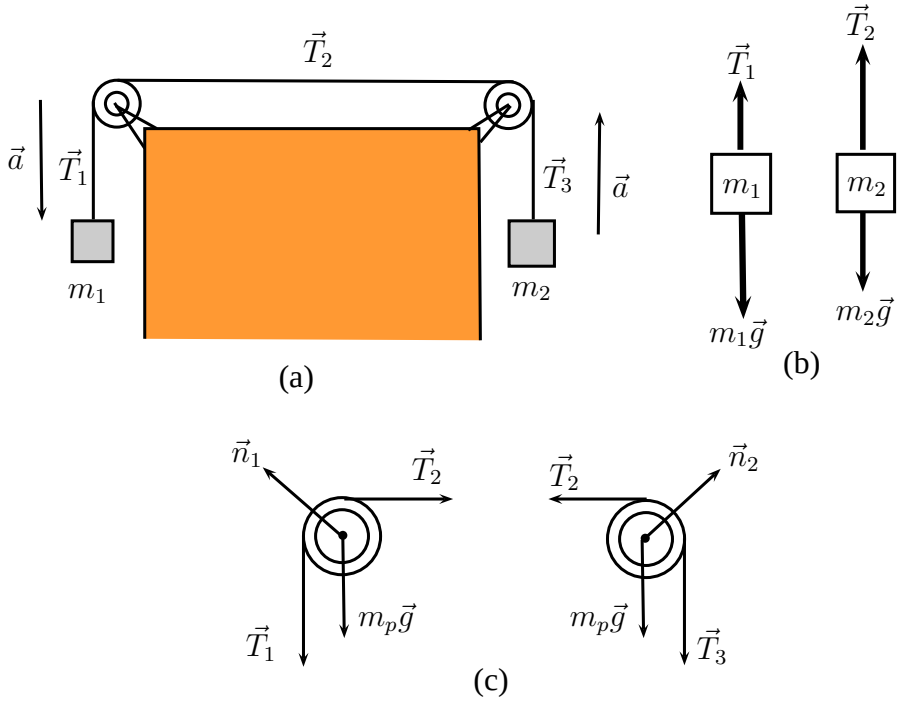
$$\sum F_y = mg - T = ma$$
$$a = \frac{mg - T}{m} \tag{2}$$

เนื่องจากความเร่ง a จะสัมพันธ์กับความเร่งเชิงมุม α คือ $a = R\alpha$ และจากสมการ (1) และ (2) ทำให้ได้

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m} \tag{3}$$
$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}} \tag{4}$$

เมื่อแทนค่าสมการ (4) ลงในสมการ (2) เพื่อหาค่า a และ α ทำให้ได้ดังนี้

$$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}$$
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + I/mR}$$



รูปที่ 6.14: (a) ระบบมวล m_1 และ m_2 ยึดติดกันด้วยเส้นเชือกที่คล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืด(b) และ (c) แสดงแผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุแต่ละอัน

ตัวอย่างที่ 5.7 วัตถุมวล m_1 และ มวล m_2 เชื่อมต่อกันด้วยเชือกมวลเบาซึ่งคล้องผ่านรอกสองตัวที่เหมือนกัน รอกทั้งสองไม่มีความฝืด มีรัศมีเป็น R และโมเมนต์ความเฉื่อยเป็น I ดังรูป 6.14a จงหาขนาดของความเร่งของมวลแต่ละก้อนและแรงตึงในเส้นเชือก T_1, T_2 และT_3

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระรูปที่ 6.14b และโดยการประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 นิวตัน ทำให้ได้

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \tag{1}$$

$$T_3 - m_2 g = m_2 a \tag{2}$$

พิจารณาการหมุนของรอกทั้งสองจะได้ทอร์ครอบจุดหมุนเนื่องจากแรงตึงในเส้นเชือก (ดูรูปที่ 6.14c) มีค่าเป็นดังนี้

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha \tag{3}$$

$$(T_2 - T_3)R = I\alpha \tag{4}$$

โดยการนำสมการ (3) บวกกับสมการ (4) ทำให้ได้

$$(T_1 - T_3)R = 2I\alpha \tag{5}$$

และนำสมการ (1) บวกกับสมการ (2) ก็จะได้

$$\begin{aligned} T_3 - T_1 + m_1 g - m_2 g &= (m_1 + m_2)a \\ T_1 - T_3 &= (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a \end{aligned} \tag{6}$$

โดยการนำสมการ (6) แทนลงในสมการ (5) และใช้ความสัมพันธ์ของ $\alpha = a/R$ ทำให้เราหาค่าความเร่งของวัตถุแต่ละก้อนได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \left[(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a\right] R &= 2I\alpha \\ (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a &= 2I\frac{a}{R^2} \\ a &= \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}} \end{aligned} \tag{7}$$

จากค่าความเร่งที่ได้ในสมการ (7) นำไปแทนลงใน (1) และ (2) จะหาค่า T_1 และ T_3 ได้ และค่า T_2 หาจากสมการ (3) หรือจากสมการ (4) ตามลำดับ

6.7 งาน พลังงานและกำลังงานสำหรับการหมุน

เมื่อวัตถุมีการหมุนรอบจุดหมุน O ได้ระยะการกระจัด $d\vec{s}$ ภายใต้แรงภายนอกกระทำ$\vec{F}$ โดยที่ตำแหน่งที่แรงกระทำอยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะ r และทำมุม ϕ กับแนวระยะทางดังกล่าว ดังแสดงในรูปที่ 6.15 ทำให้เกิดงานขึ้นด้วยขนาดเป็น

$$dW = \vec{F}.d\vec{s} = (F\sin\phi)rd\theta$$

เนื่องจากปริมาณ $rF\sin\phi$ คือขนาดของทอร์คที่จุด O ดังนั้นงานเนื่องจากการหมุนวัตถุคือ

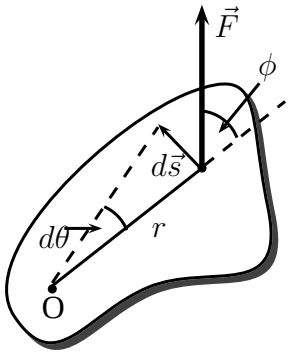
$$dW = \tau d\theta$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ $\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$ ดังนั้นทำให้

$$dW = \tau d\theta = I\omega d\omega \tag{6.27}$$

เมื่อวัตถุหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมจาก ω_i เป็น ω_f และการกระจัดเชิงมุมเปลี่ยนจาก θ_i เป็น θ_f งานทั้งหมดที่ได้จึงมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} W = \int dW &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \\ &= \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega \end{aligned}$$



รูปที่ 6.15: แรงภายนอกกระทำต่อวัตถุที่จุด O ทำให้เกิดงานเนื่องจากการหมุน

$$W = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \tag{6.28}$$

เมื่อ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุด O จากสมการ 6.28 จะเห็นว่างานของการหมุน ก็คือการเปลี่ยนแปลงของพลังงานจลน์ของการหมุนซึ่งก็คือทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์นั่นเอง สำหรับกำลัง(Power, P) คือ อัตราการส่วนของงานต่อหนึ่งหน่วยเวลานั่นคือ

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega \tag{6.29}$$

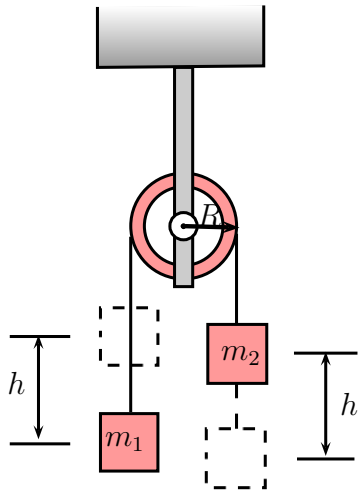
ตัวอย่างที่ 5.8 พิจารณาวัตถุมวล m_1 และ m_2 โดยที่ $m_1 \neq m_2$ เชื่อมต่อกันด้วยเชือกที่คล้องผ่านรอกดังแสดงในรูป 6.16 รอกรัศมี R และมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนเป็น I เส้นเชือกไม่ลื่นไหลบนรอกและระบบถูกปล่อยจากหยุดนิ่ง จงหาอัตราเร็วเชิงเส้นของวัตถุทั้งสองหลังจากวัตถุมวล m_2 ตกลงมาได้ระยะ h และ อัตราเร็วเชิงมุมของรอก ณ เวลานั้น

วิธีทำ เนื่องจากว่าเชือกไม่มีการลื่นไหลบนรอกทำให้รอกมีการหมุนและถ้าไม่คิดผลของแรงเสียดทานที่แกนหมุนดังนั้น พลังงานเชิงกลของระบบมีค่าคงที่นั่นคือ พลังงานจลน์ของระบบที่เพิ่มขึ้นจะเท่ากับพลังงานศักย์ของระบบที่ลดลงเพราะว่าพลังงานจลน์ตอนเริ่มต้น $K_i = 0$ ทำให้เราได้

$$\Delta K = K_f - K_i = \left(\frac{1}{2}m_1v_f^2 + \frac{1}{2}m_2v_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2\right) - 0$$

เมื่อ v_f คืออัตราเร็วเชิงเส้นซึ่งเป็นค่าเดียวกันสำหรับมวลทั้งสอง และเนื่องจาก $v_f = R\omega_f$ ดังนั้น

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2$$



รูปที่ 6.16: การเคลื่อนที่ของระบบมวล m_1 และ m_2 ที่เชื่อมต่อกันด้วยเชือกซึ่งคล้องผ่านรอก

จากรูปที่ 6.16 จะเห็นว่าพลังงานศักย์ที่ลดลงของระบบเนื่องจากมวล m_2 ตกลงมา และได้รับพลังงานศักย์เนื่องจากมวล m_1 เคลื่อนที่ขึ้น นั่นคือ $\Delta U_2 = m_2gh$ และ $\Delta U_1 = m_1gh$ โดยการประยุกต์หลักการคงตัวของพลังงานจะได้ว่า

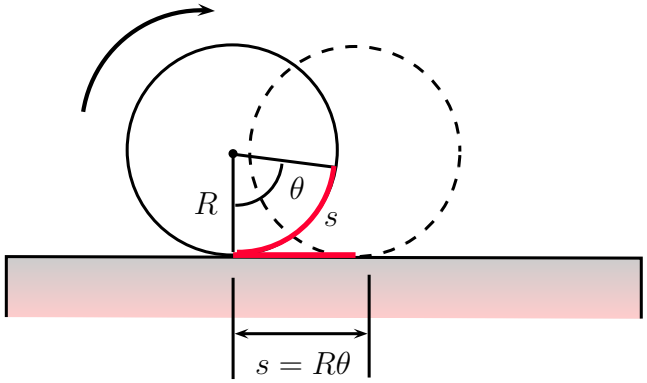
$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U_1 + \Delta U_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) v_f^2 + m_1gh - m_2gh &= 0 \\ v_f &= \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}\right]^{1/2} \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $v_f = R\omega_f$ ดังนั้นอัตราเชิงมุมของรอกมีค่าเป็น

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R}\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}\right]^{1/2}$$

6.8 การเคลื่อนที่แบบกลิ้ง

การเคลื่อนที่แบบกลิ้ง (rolling motion) คือการเคลื่อนที่ผสมผสานระหว่างการเลื่อนตำแหน่ง (translation) กับการหมุน (rotation) การเคลื่อนที่ดังกล่าวจะเห็นว่าวัตถุจะหมุนรอบแกนที่ไม่คงที่ พิจารณาการกลิ้งของทรงกระบอกรัศมี R บนพื้นราบโดยไม่มีการไถลดังรูป 6.17 ความเร็วและความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล (v_{CM}) จะเกี่ยวพันกับความเร็วเชิงมุม (ω) และ



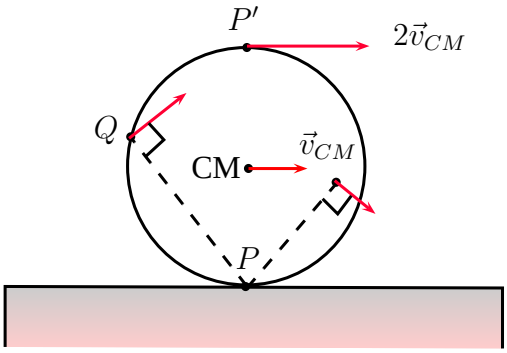
รูปที่ 6.17: ทรงกระบอกกลิ้งบนพื้นราบ

ความเร่งเชิงมุม (α) ของการหมุนดังนี้

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{6.30}$$

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{6.31}$$

ความเร็วเชิงเส้นของจุดศูนย์กลางมวลและของจุดอื่น ๆบนและภายในทรงกระบอกแสดงดังรูป 6.18 ทุก ๆจุดบนทรงกระบอกจะมีความเร็วเชิงมุมเดียวกันดังนั้นความเร็วเชิงเส้นที่จุดต่าง ๆจะขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่างจุดนั้นกับจุดหมุน เช่นที่จุด P' และ P ระยะทางจากจุด P' ถึง P เป็นสองเท่าของระยะทางจากจุดศูนย์กลางมวล (CM) ถึงจุด P ดังนั้นจึงมีความเร็วเป็น$2v_{CM} = 2R\omega$ ทิศทางของความเร็วเชิงเส้นจะตั้งฉากกับแนวเส้นตรงที่ลากจากจุดหมุน (P) ถึงจุดนั้น ๆ ดังแสดงในรูป เมื่อวัตถุมีการกลิ้งพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่คือ



รูปที่ 6.18: แสดงขนาดและทิศทางของความเร็วเชิงเส้นของจุดต่าง ๆบนและภายในวัตถุทรงกระบอกที่กำลังกลิ้งบนพื้นราบ

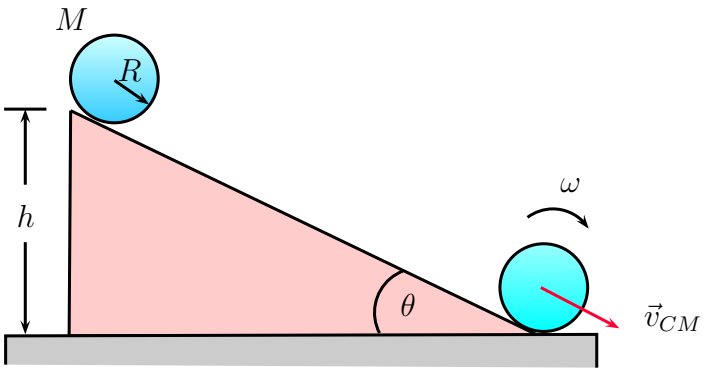
$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \tag{6.32}$$

เมื่อ I_P คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุด P และโดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีแกนขนานจะได้$I_P = I_{CM} + MR^2$ จากสมการ 6.32 ทำให้ได้พลังงานจลน์ของการกลิ้งมีค่าเป็น

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$
$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \tag{6.33}$$

นั่นคือ *พลังงานจลน์ทั้งหมดของการกลิ้งเท่ากับพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลบวกกับพลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล*

ตัวอย่างที่ 5.9 ทรงกลมตันมวล M รัศมี R กลิ้งลงตามพื้นเอียงซึ่งทำมุม θ กับแนวราบดังรูป 6.19 และพื้นเอียงไม่มีความเสียดทาน จงหาความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลขณะที่ทรงกลมกลิ้งลงมาถึงปลายด้านล่างของพื้นเอียง (โดยใช้หลักการคงตัวพลังงาน)



รูปที่ 6.19: วัตถุทรงกลมกลิ้งบนพื้นเอียงที่ไม่มีความฝืด

วิธีทำ โดยใช้หลักการคงตัวของพลังงานในการวิเคราะห์จะเห็นว่าเริ่มต้นทรงกลมหยุดนิ่ง พลังงานจลน์ $K_i = 0$ ส่วนพลังงานศักย์ $U_i = Mgh$ และเมื่อทรงกลมเคลื่อนที่มาที่ตำแหน่งปลายด้านล่างสุด พลังงานศักย์ $U_f = 0$ (เป็นตำแหน่งอ้างอิง) ส่วนพลังงานจลน์มีค่าเป็น

$$K_f = \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$
$$timesK_f = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)v_{CM}^2$$

จากหลักการคงตัวของพลังงานจะได้

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U &= 0 \\ (K_f - K_i) + (U_f - U_i) &= 0 \\ K_f &= U_i \\ \frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R} + M\right) v_{CM}^2 &= Mgh \end{aligned}$$

ดังนั้นทำให้ได้ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล ณ ตำแหน่งดังกล่าวมีค่าเท่ากับ

$$v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + I_{CM}/MR^2}\right)^{1/2}$$

6.9 โมเมนตัมเชิงมุมและการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม

6.9.1 โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค

โมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum) ของอนุภาคมวล m ที่กำลังหมุนรอบจุด O ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ มีนิยามดังนี้

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{6.34}$$

เมื่อ $\vec{p}$ คือ โมเมนตัมเชิงเส้น (linear momentun) มีค่าเท่ากับ $m\vec{v}$ โมเมนตัมเชิงมุมจะมีทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ และโมเมนตัม $\vec{p}$ ดังรูป 6.20 ซึ่งมีขนาดเป็น

$$L = mvr \sin\phi \tag{6.35}$$

แรงลัพธ์ ($\vec{F}$) ที่กระทำต่ออนุภาคซึ่งมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม $d\vec{p}/dt$ จะทำให้เกิดทอร์ครอบจุด O ดังนี้

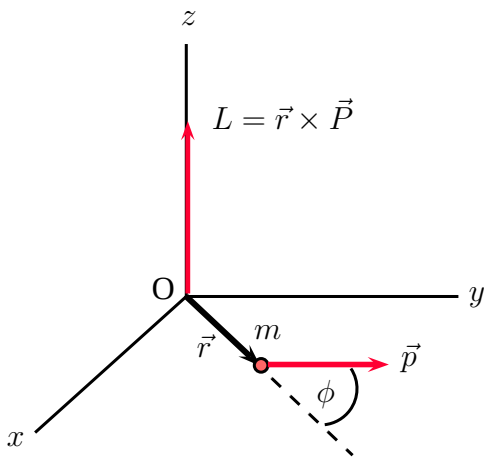
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุม $\frac{d\vec{L}}{dt}$ มีค่าเท่ากับ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

เทอม $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = 0$ เนื่องจาก $\vec{v}$ และ $\vec{p}$ มีทิศเดียวกัน ดังนั้นทำให้ได้ทอร์คที่กระทำต่ออนุภาครอบจุด O มีค่าเท่ากับอัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม

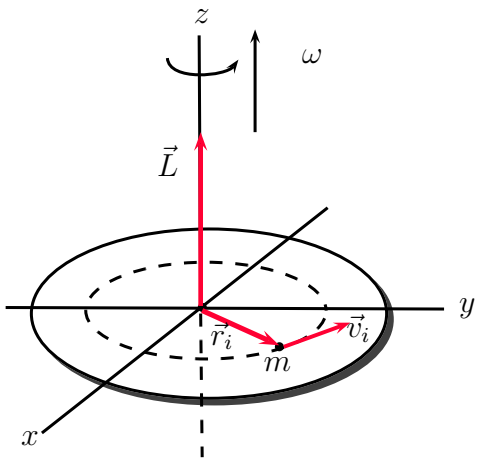
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{6.36}$$



รูปที่ 6.20: โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคมวล m

6.9.2 โมเมนตัมเชิงมุมของการหมุนวัตถุแข็งเกร็ง

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ทราบนิยามของโมเมนตัมเชิงมุมและความเกี่ยวพันของปริมาณดังกล่าวกับทอร์คของการหมุนในหัวข้อนี้เราจะแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของโมเมนตัมเชิงมุมกับความเร่งเชิงมุมของวัตถุที่หมุนรอบแกนหมุนใดๆ พิจารณาวัตถุที่กำลังหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω รอบแกน z ซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังรูป 6.21 ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมของ



รูปที่ 6.21: โมเมนตัมเชิงมุมของการหมุนวัตถุแข็งเกร็ง

อนุภาคมวล m_i รอบจุดหมุนคือ $m_i v_i r_i$ เพราะว่า $v_i = r_i\omega$ ดังนั้นเราสามารถแสดงขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคนี้ได้เป็น

$$L_i = m_i r_i^2 \omega \tag{6.37}$$

เมื่อพิจารณาโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุทั้งก้อนก็คือการรวมขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละอนุภาค นั่นคือ

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$
$$L_z = I\omega \tag{6.38}$$

ทอร์คที่กระทำต่อวัตถุรอบจุดหมุนมีค่าเท่ากับผลคูณของโมเมนความเฉื่อยรอบแกนหมุนนั้นกับขนาดของความเร่งเชิงมุม

$$\tau = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha \tag{6.39}$$

6.9.3 การคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม

โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบมีค่าคงที่ทั้งขนาดและทิศทางถ้าทอร์คลัพธ์ที่มากระทำต่อระบบมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \tag{6.40}$$

จากสมการ 6.40 L จะต้องเท่ากับค่าคงที่ นั่นคือเราจะได้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f = \text{ค่าคงที่} \tag{6.41}$$

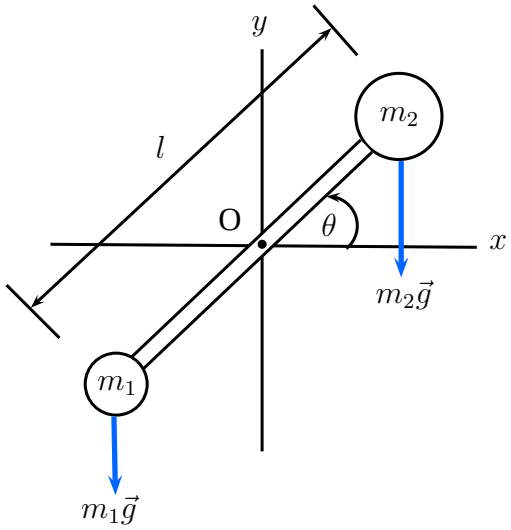
สำหรับในกรณีที่วัตถุหมุนรอบแกน z ดังรูป 6.21 ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $L_z = I\omega$ ดังนั้นกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงสามารถเขียนได้เป็น

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \tag{6.42}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.10</u> แท่งวัตถุยาว l มวล M ถูกตึงที่จุดหมุน O ซึ่งไม่มีความฝืดปลายทั้งสองข้างมีวัตถุทรงกลมมวล m_1 และ m_2 ติดอยู่ดังรูป 6.22 ระบบกำลังหมุนตามเข็มนาฬิกาในระนาบ xy รอบจุดหมุน O จงหา

(ก) ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบนี้

(ข) ขนาดของความเร่งเชิงมุมของระบบเมื่อแท่งวัตถุทำมุม θ กับแกน x



รูปที่ 6.22: ระบบกำลังหมุนรอบจุด O ในทิศตามเข็มนาฬิกาเนื่องจากมวล $m_2 > m_1$

วิธีทำ (ก) โมเมนต์ความเฉื่อยทั้งหมดของระบบคือ

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12}Ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right) \end{aligned}$$

ดังนั้นขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมคือ

$$L = I\omega = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega$$

(ข) เนื่องจากมวล $m_2 > m_1$ ทำให้วัตถุมีการหมุนรอบจุด O ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ทอร์คที่กระทำต่อจุด O เนื่องจากน้ำหนักของวัตถุมวล m_1 คือ

$$\tau_1 = m_1 g\frac{l}{2}\cos\theta \qquad (\vec{\tau}_1 \text{ พุ่งออกจากระนาบกระดาษ})$$

และทอร์คที่กระทำต่อจุด O เนื่องจากน้ำหนักของวัตถุมวล m_2 คือ

$$\tau_2 = -m_2 g\frac{l}{2}\cos\theta \qquad (\vec{\tau}_2 \text{ พุ่งเข้าไปในระนาบกระดาษ})$$

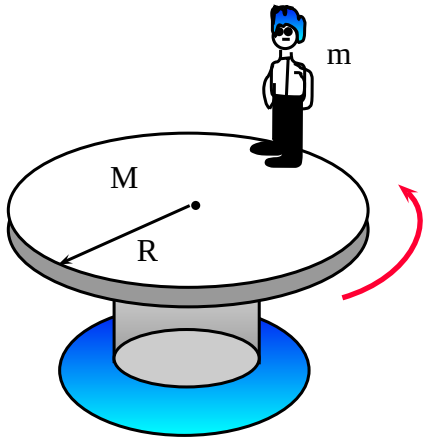
ดังนั้น ทอร์คลัพธ์ที่กระทำต่อระบบรอบจุดหมุน O จึงมีค่าเป็น

$$\sum \tau_{net} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)gl\cos\theta$$

จากนิยามของทอร์ค $\sum \tau_{net} = I\alpha$ ทำให้เราสามารถหาค่า α ได้ดังนี้

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{net}}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{l(M/3 + m_1 + m_2)}$$

ตัวอย่างที่ 5.11 โต๊ะวงกลมขนาดใหญ่มวล $M = 100$ กิโลกรัม รัศมี $R = 2.0$ เมตร หมุนรอบแกนในแนวดิ่งโดยไม่มีความฝืด มีชายคนหนึ่งซึ่งมีมวล $m = 60$ กิโลกรัม ยืนอยู่ที่ขอบโต๊ะดังรูป 6.23 ณ ขณะนั้นอัตราเร็วเชิงมุมของระบบ (คนและโต๊ะ) มีค่าเท่ากับ 2 เรเดียน/วินาทีเมื่อชายคนดังกล่าวเดินอย่างช้า ๆเข้าหาจุดศูนย์กลางวงกลมจงหาอัตราเร็วเชิงมุมของระบบนี้เมื่อชายคนนี้อยู่ที่ระยะ 0.5 เมตร จากจุดศูนย์กลางวงกลม



รูปที่ 6.23: ชายคนหนึ่งกำลังเดินบนโต๊ะวงกลมที่หมุนได้อย่างอิสระ

วิธีทำ กำหนดให้ I_p คือโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจานกลมรัศมี R และ I_s คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของเด็กผู้ชาย ดังนั้นในตอนเริ่มต้น โมเมนต์ความเฉื่อยของระบบมีค่าเท่ากับ

$$I_i = I_{p,i} + I_{s,i} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

และเมื่อเด็กผู้ชายคนนี้เดินมาถึงตำแหน่งที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวงกลมเป็นระยะ r จะได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อยของระบบมีค่าเท่ากับ

$$I_f = I_{p,f} + I_{s,f} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

ระบบไม่มีทอร์คลัพธ์ภายนอกมากระทำ ดังนั้นเราสามารถประยุกต์กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L_i &= L_f \\ I_i\omega_i &= I_f\omega_f \\ \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_i &= \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_f \\ \omega_f &= \left(\frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)\omega_i \\ \omega_f &= \left(\frac{200+240}{200+15}\right)(2.0 \text{ rad/s}) = 4.1 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

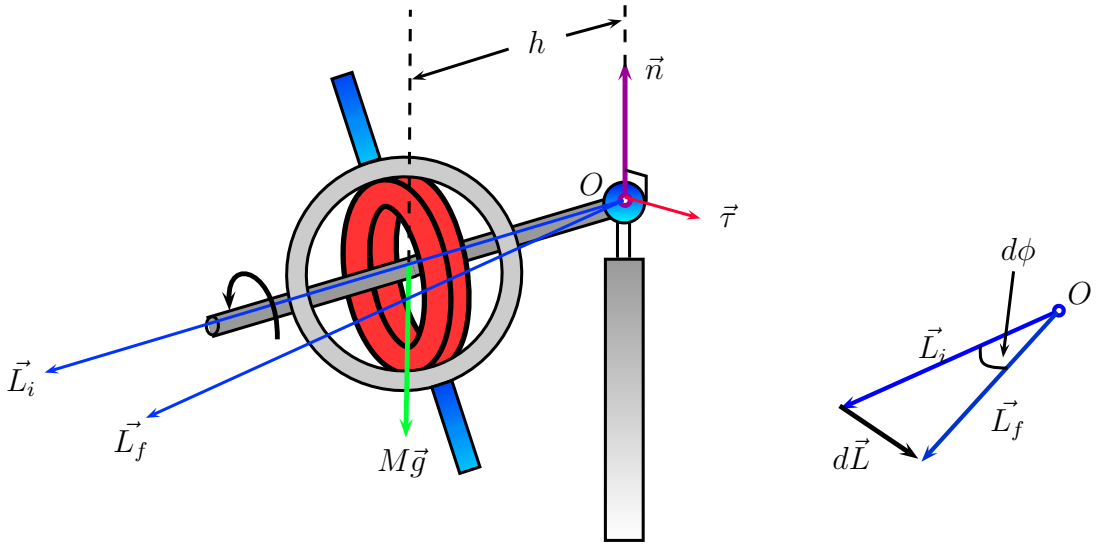
6.10 การเคลื่อนที่แบบไจโรสโคป (gyroscope motion)

ไจโรสโคป ประกอบด้วยล้อหมุนซึ่งติดตั้งไว้บนแกนในลักษณะซึ่งแกนจะหมุนเปลี่ยนทิศทางได้อย่างอิสระ ดังรูป 6.24 โดยที่ปลายด้านหนึ่งของแกนล้อหมุนตึงไว้ที่จุด O ที่ระยะห่าง h จากจุดศูนย์กลางมวลของล้อหมุน เมื่อให้ล้อหมุนรอบแกนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ และมีโมเมนตัมเชิงมุมในทิศทางตามแกนนั้น $\vec{L} = I\vec{\omega}$ พิจารณาทอร์กที่กระทำต่อล้อหมุนที่จุด O จะพบว่าแรงเนื่องจากน้ำหนักของล้อหมุนเท่านั้นที่ทำให้เกิดทอร์กที่มีขนาดเป็น $\tau = Mgh$ และมีทิศทางดังแสดงในรูป 6.24(a) ในช่วงเวลา dt จะมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม คือ $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$ ซึ่งทำให้โมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นทิศไปจากเดิม แต่ขนาดคงเดิม หมายความว่า แกนของไจโรสโคปจะมีการเคลื่อนที่ไปรอบแกนคงที่อันหนึ่ง การเคลื่อนที่ของแกนหมุนในลักษณะแบบนี้ เรียกว่า การส่าย (precession) จากแผนภาพเวกเตอร์ในรูป 6.24(b) แสดงให้เห็นว่า ในช่วงเวลา dt เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมหมุนเป็นมุม $d\phi$ จากรูปสามเหลี่ยมที่ประด้วยเวกเตอร์ $\vec{L_i}$, $\vec{L_f}$ และ $d\vec{L}$ จะเห็นว่า

$$\sin(d\phi) \approx d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{(Mgh)dt}{L}$$

จากนิยามของอัตราเร็วเชิงมุม $\omega = d\phi/dt$ นั่นคือเราจะได้ อัตราเร็วของการส่าย ω_p

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh}{I\omega} \tag{6.43}$$



(a) (b)

รูปที่ 6.24: (a) ไจโรสโคปอย่างง่ายที่กำลังหมุนแบบส่าย และ (b) แผนภาพแสดงเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมเนื่องจากมีทอร์กกระทำรอบจุด O

6.11 สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง

เมื่อมีแรงจากภายนอกหลาย ๆแรงกระทำต่อวัตถุ วัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลต่อการเลื่อนตำแหน่ง เมื่อแรงลัพธ์ที่มากระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ ($\sum \vec{F} = 0$) และสมดุลต่อการหมุนเมื่อทอร์คลัพธ์รอบจุดหมุนใด ๆมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\sum \vec{\tau} = 0$) นั่นคือเราได้เงื่อนไขสมดุลสถิต (Static Equalibrium) ดังนี้

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ และ } \sum \vec{\tau} = 0 \tag{6.44}$$

พิจารณาแรงที่กระทำต่อวัตถุดังรูป 6.25 เมื่อแรงลัพธ์กระทำมีค่าเป็นศูนย์$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$ ตำแหน่งที่แรง $\vec{F}_1$ กระทำต่อวัตถุโดยมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเทียบกับจุด O เป็น $\vec{r}_1$ ในทำนองเดียวกัน ตำแหน่งที่แรง $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ และ $\vec{F}_4$ มีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ และ $\vec{r}_4$ ตามลำดับ (ไม่แสดงในรูป) ดังนั้นทอร์คลัพธ์รอบจุด O คือ

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$

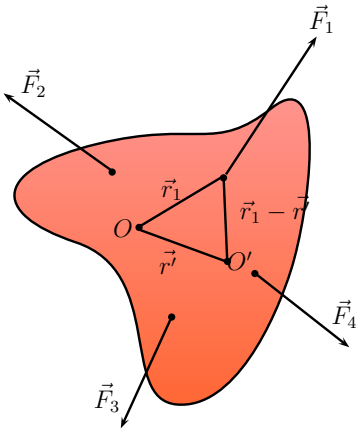
พิจารณาที่จุดหมุนอื่นเช่นจุด O' ซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{r'}$ เทียบกับจุด O ตำแหน่งที่แรง $\vec{F}_1$ กระทำซึ่งเทียบกับจุด O' ระบุด้วยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง$\vec{r}_1 - \vec{r'}$ และทำนอง

เดียวกันสำหรับตำแหน่งที่แรงอื่น ๆ กระทำ ดังนั้นทอร์ครอบจุด O' คือ

$$\begin{aligned}\sum \vec{\tau}'_O &= (\vec{r}_1 - \vec{r'}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r'}) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r'}) \times \vec{F}_3 + (\vec{r}_4 - \vec{r'}) \times \vec{F}_4 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 - \vec{r'} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4)\end{aligned}$$

เนื่องจากแรงลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์นั่นคือ *ถ้าวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลต่อการเลื่อนตำแหน่งและทอร์คลัพธ์รอบจุดใดจุดหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์แล้วทอร์คลัพธ์รอบจุดอื่น ๆก็จะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย*

ตัวอย่างที่ 5.12 จากรูปที่ 6.26 จงหาขนาดของแรง $\vec{n}$ ที่จุดหมุนของไม้กระดานแต่ละด้าน



รูปที่ 6.25: สมดุลของวัตถุแข็งเกร็งเนื่องจากแรงลัพธ์ที่กระทำเท่ากับศูนย์)

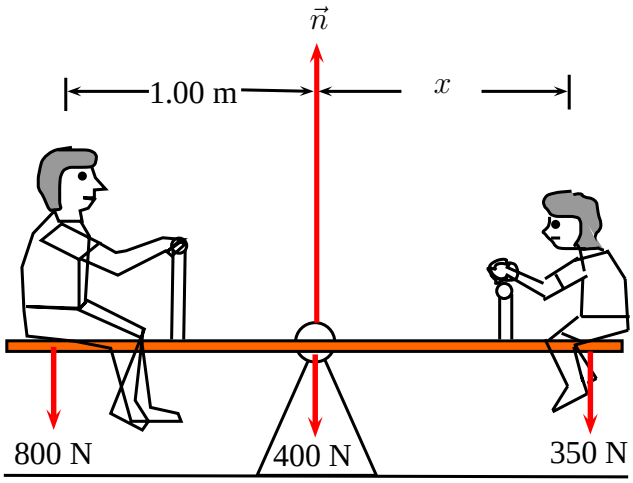
ของไม้กระดานมีพ่อและลูกสาวนั่งอยู่โดยที่พ่อมีน้ำหนัก 800 N และลูกสาวมีน้ำหนัก 350 N ถ้าหากคานอยู่ในสมดุลสถิต และจงหาตำแหน่งที่ลูกสาวนั่งอยู่ห่างจากจุดหมุนเป็นระยะเท่าใด

วิธีทำ เมื่อระบบอยู่ในสมดุลสถิต ดังนั้นเงื่อนไขของสมดุลต่อการเลื่อนตำแหน่งคือ

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ n - 800 - 350 - 40 &= 0 \\ n &= 1190 \text{ N}\end{aligned}$$

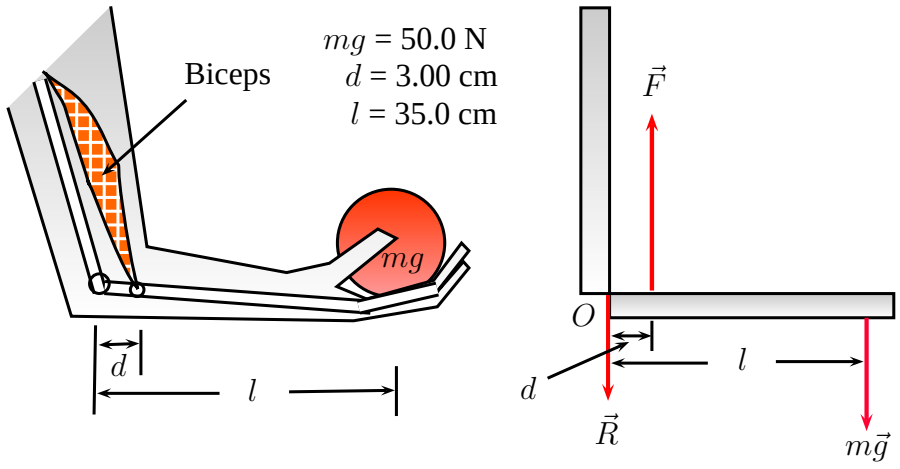
และเงื่อนไขของสมดุลต่อการหมุนรอบจุดหมุน

$$\begin{aligned}\sum \tau &= 0 \\ (800 \text{ N})(1.00 \text{ N}) - (350 \text{ N})x &= 0 \\ x &= 2.29 \text{ m}\end{aligned}$$



รูปที่ 6.26: ระบบคานไม้กระดานที่อยู่ในสภาพสมดุลสถิต

ตัวอย่างที่ 5.13 ชายคนหนึ่งถือวัตถุทรงกลมที่มีน้ำหนัก 50 N โดยที่ปลายแขนอยู่ในแนวราบดังรูป 6.27a ตำแหน่งที่กล้ามเนื้อยึดปลายแขนกับอยู่ห่างจากข้อต่อเป็นระยะ 3.00 cm และทรงกลมอยู่ห่างจากข้อต่อเป็นระยะ 35 cm จงหาขนาดของแรงดึงขึ้นเนื่องจากกล้ามเนื้อกระทำต่อปลายแขนและแรงที่กดลงเนื่องจากท่อนแขนบนกระทำต่อปลายแขนตรงข้อต่อ (ถ้าไม่คิดน้ำหนักของปลายแขน)



(a) (b)

รูปที่ 6.27: แรงที่กล้ามเนื้อยึดปลายแขนเมื่ออยู่ในสภาพสมดุลสถิต (a) และแผนภาพวัตถุอิสระ (b)

วิธีทำ เมื่อระบบสมดุลสถิตและใช้การประมาณระบบกล้ามเนื้อด้วยระบบเชิงกลดังรูป 6.27b

ทำให้เห็นว่า แรงลัพธ์ที่กระทำต่อปลายแขนมีค่าเป็นศูนย์และทอร์คลัพธ์ที่กระทำต่อข้อต่อมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\sum F_y = F - R - 50.0\ \text{N} = 0 \tag{1}$$

$$\sum \tau = Fd - mgl = 0 \tag{2}$$

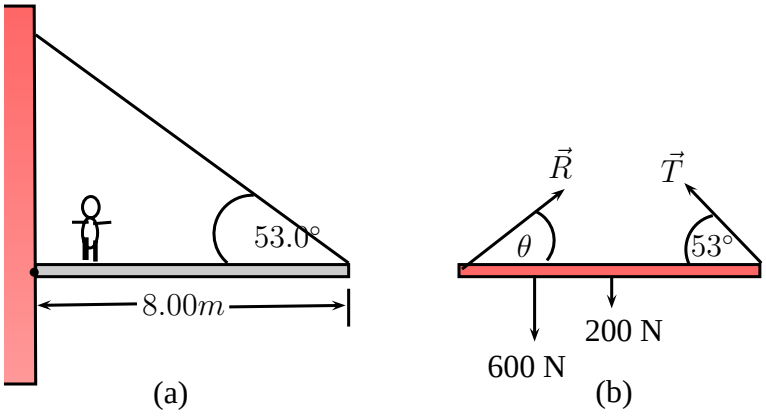
จากสมการ (2) ทำให้ได้ขนาดของแรง F ดังนี้

$$F(3.00\ \text{cm}) - (50.0\ \text{N})(35.0\ \text{cm}) = 0$$

$$F = 583\ \text{N}$$

และจากสมการ (1) ด้วยการแทนค่า F ที่ได้จากสมการ (2) ทำให้ได้แรงที่กดลงตรงบริเวณข้อต่อเท่ากับ$R = 533$ N

ตัวอย่างที่ 5.14 ชายคนหนึ่งหนัก 600 N ยืนอยู่ที่ระยะ 2 ห่างจากผนังบนคานไม้ยาว 8 m ที่ปลายคานด้านหนึ่งผูกเชือกและโยงยึดติกกับผนังทำมุม 53 องศา กับคานที่วางอยู่ในแนวระดับดังรูป 6.28a คานไม้หนัก 200 N จงหาแรงตึงในเส้นเชือกและขนาดและทศทางของแรงปฏิกิริยาที่ผนังกระทำต่อปลายคานอีกด้าน



รูปที่ 6.28: คานไม้อยู่ในสมดุลสถิต (a) และแผนภาพวัตถุอิสระ (b)

วิธีทำ เงื่อนไขสมดุลต่อการเลื่อนตำแหน่ง

$$\sum F_x = R\cos\theta - T\cos 53.0^\circ = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = R\sin\theta + T\sin 53.0^\circ - 600\ \text{N} - 200\ \text{N} = 0 \tag{2}$$

และเงื่อนไขสมดุลต่อการหมุนรอบจุดหมุนที่ตำแหน่งปลายคานด้านที่ติดกับผนังกำแพงจะได้ว่า

$$\sum \tau = (T \sin 53.0^\circ)(8.00\ \text{m}) - (600\ \text{N})(2.00\ \text{m}) - (200\ \text{N})(4.00\ \text{m}) = 0$$
$$T = 313\ \text{N}$$

เมื่อแทนค่า T ลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$R \cos\theta = 188\ \text{N} \tag{3}$$
$$R \sin\theta = 550\ \text{N} \tag{4}$$

สมการ (4) หารด้วยสมการ (3) ทำให้ได้มุม θ มีค่าเป็น

$$\tan\theta = \frac{550}{188} = 2.93$$
$$\theta = \tan^{-1}(2.93) = 71.1^\circ$$

และจากสมการ (3) จะได้ขนาดของแรงปฏิกิริยาที่ผนังกำแพงกระทำต่อคานไม้ดังนี้

$$R = \frac{188}{\cos\theta} = \frac{188}{\cos 71.1^\circ} = 580\ \text{N}$$

6.12 แบบฝึกหัด

1. เด็กสองคนซึ่งมีมวลเท่ากัน 25 กิโลกรัม นั่งอยู่คนละข้างของปลายคานหมุนซึ่งมีความยาว 2.6 เมตรและมีมวล 10 กิโลกรัม ถ้าคานหมุนในอัตรา 5 รอบต่อนาที รอบแกนในแนวดิ่งซึ่งผ่านกึ่งกลางของคาน

   (ก) ถ้าเด็กทั้งสองนั้นเลื่อนที่ขยับใกล้จุดศูนย์กลางเข้ามา 60 เซนติเมตร อัตราเร็วเชิงมุมของคานหมุนตอนนั้นจะเป็นเท่าใด

   (ข) พลังงานจลน์ของการหมุนของระบบนี้เปลี่ยนไปเท่าไร

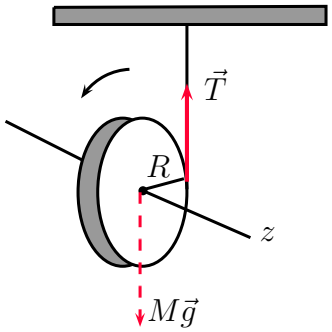
2. วัตถุทรงกลมและทรงกระบอกซึ่งมีมวลและรัศมีเท่ากันปล่อยให้กลิ้งลงมาจากพื้นเอียงเดียวกันพร้อมกัน วัตถุใดจะลงมาถึงปลายพื้นเอียงก่อนกัน และถ้าทรงกระบอกดังกล่าวนั้นมีมวลและรัศมีไม่เท่ากัน ผลจะเป็นอย่างไร

3. ลูกกลมมวล 1 กิโลกรัม กลิ้งไปบนพื้นราบด้วยความเร็ว 20 เมตรต่อวินาที แล้วเคลื่อนขึ้นไปบนพื้นเอียงซึ่งทำมุม 30 องศากับแนวระดับ

(ก) พลังงานจลน์ทั้งหมดของลูกกลมเป็นเท่าใด ขณะอยู่บนพื้นราบ

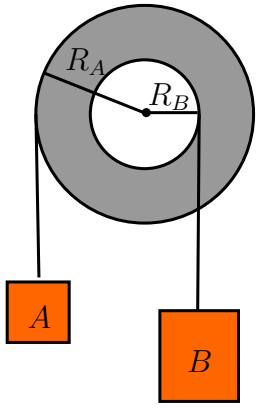
(ข) ลูกกลมจะขึ้นไปบนพื้นเอียงได้ไกลเท่าใด

4. ล้ออันหนึ่งมีมวล M รัศมี R มีเชือกเส้นหนึ่งผูกไว้กับเพดานแขวนล้อไว้ให้แกนล้ออยู่ในแนวระดับเมื่อปล่อยให้ล้อเคลื่อนที่ลงมาดังรูป 6.29 จงหาแรงตึงในเส้นเชือกและความเร่งของการเคลื่อนที่ของล้อนี้



รูปที่ 6.29: โจทย์ปัญหาข้อที่ 4

5. ระบบล้อและเพลาซึ่งมีโมเมนต์ของความเฉื่อย 0.26 กิโลกรัม.เมตร^2 ประกอบด้วยล้อหมุนขนาดรัศมี 20 เซนติเมตรและเพลาหมุนขนาดรัศมี 10 เซนติเมตร มีมวลถ่วง A เท่ากับ 2 กิโลกรัม และมวล B เท่ากับ 6 กิโลกรัม ผูกเชือกพันไว้รอบล้อและเพลาดังรูป 6.30 ถ้าปล่อยให้เคลื่อนที่ระบบล้อและเพลาจะหมุนด้วยอัตราเร่งเชิงมุมเท่าใดและความตึงในเส้นเชือกแต่ละเส้นเป็นเท่าใด



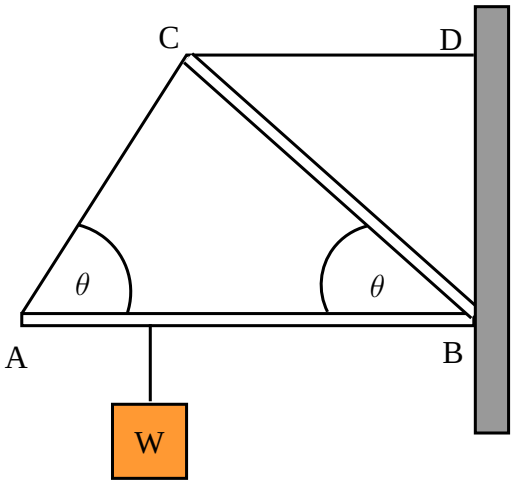
รูปที่ 6.30: โจทย์ปัญหาข้อที่ 5

6. โครงสร้างรับน้ำหนักซึ่งประกอบด้วยคาน AB ขนาดสม่ำเสมอยาว 4 เมตร มีมวล 15 กิโลกรัมมีเชือก AC, CD, และ ไม้ยัน BC ซึ่งมีน้ำหนักเบาประกอบกันเป็นโครงสร้าง

โดยตรึงไว้กับกำแพงด้วยบานพับที่ปลายคาน B และโยงไว้ด้วยเส้นเชือก CD ในลักษณะที่ทำมุม θ เท่ากับ 37 องศา ดังรูป 6.31 ถ้ามีกล่องน้ำหนักมวล 90 กิโลกรัม แขวนไว้ห่างจากปลายคาน A เป็นระยะ 1 เมตรจงคำนวณหา

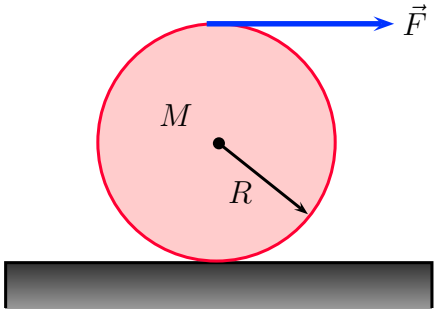
(ก) ความตึงในเส้นเชือก CD

(ข) แรงที่บานพับกระทำต่อปลายคาน B



รูปที่ 6.31: โจทย์ปัญหาข้อที่ 6

7. จากรูป 6.32 พันเชือกรอบทรงกระบอกขนาดสม่ำเสมอมวล 3 กิโลกรัม รัศมี 10 เซนติเมตร และโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนของทรงกระบอก 0.5 กิโลกรัม.เซนติเมตร^2 เมื่อดึงปลายเชือกด้านนอกด้วยแรงขนาด 20 นิวตัน จงหาความเร่งเชิงมุมของการหมุนนี้



รูปที่ 6.32: โจทย์ปัญหาข้อที่ 7

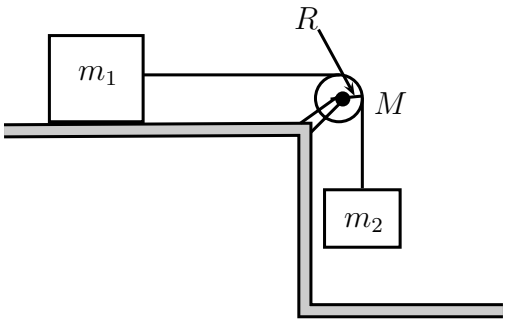
8. มวล m_1 และ m_2 ผูกด้วยเชือกเบาแล้วนำไปคล้องผ่านล้อหมุนมวล M รัศมี R ตามรูป 6.33 มวล m_1 วางอยู่บนพื้นที่มีความเสียดทาน โดยที่สัมประสิทธิ์ของความเสียด

ทานจลน์เท่ากับ 0.2 เมื่อปล่อยให้เคลื่อนที่ กำหนดให้ $m_1 = 10$ กิโลกรัม $m_2 = 5$ กิโลกรัม $M = 5$ กิโลกรัม และ $R = 0.1$ เมตร จงหา

(ก) ความเร่งของมวล m_1 และ มวล m_2

(ข) แรงตึงของเชือก

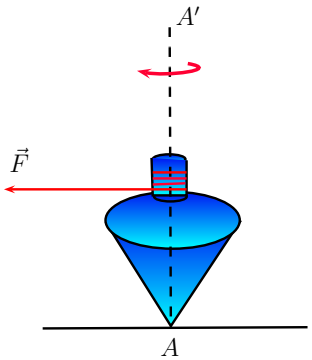
(ค) ความเร่งเชิงมุมของล้อหมุน



รูปที่ 6.33: โจทย์ปัญหาข้อที่ 8

9. ล้อมวล 500 กรัม มีโมเมนต์ความเฉื่อย 0.015 กิโลกรัม.เมตร^2 หมุนด้วยความถี่ 30 รอบต่อนาทีล้อหมุนช้าลงจนหยุดนิ่ง หลังจากหมุนไปได้ 163 รอบ จงคำนวณหาทอร์คที่ทำให้ล้อหมุนช้าลง

10. ลูกข่างมีโมเมนต์ความเฉื่อย 4×10^{-4} กิโลกรัม.เมตร^2 มีเชือกพันรอบแกนด้านบนของลูกข่าง ดังรูป 6.34 เมื่อออกแรงดึงเชือกขนาดคงที่ $F = 5.57$ นิวตัน ทำให้ลูกข่างหมุนรอบแกนหมุน AA' จงคำนวณหาอัตราเร็วเชิงมุมของลูกข่างเมื่อดึงเชือกที่พันออกมาทั้งหมดเป็นระยะ 30 เซนติเมตร



รูปที่ 6.34: โจทย์ปัญหาข้อที่ 10

บทที่ 7

การเคลื่อนที่แบบออสซิลเลต

การเคลื่อนที่ของวัตถุซึ่งมีลักษณะการสั่น (vibration) รอบตำแหน่งสมดุล หรืออาจจะพูดอีกนัยหนึ่งคือว่าเป็นการเคลื่อนที่กลับไปกลับมาซ้ำรอยเดิมโดยที่อัมปลิจูด (ค่าการกระจัดสูงสุด) ของวัตถุเทียบกับตำแหน่งสมดุลมีค่าคงที่หรือลดลงเรื่อย ๆจนกระทั่งเป็นศูนย์ การเคลื่อนที่ดังกล่าวเป็นการเคลื่อนที่แบบออสซิลเลต สำหรับการเคลื่อนที่แบบที่มีอัมปลิจูดคงที่ เรียกว่า การออสซิลเลตแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ (simple harmonic motion) ส่วนการเคลื่อนที่ซึ่งอัมปลิจูดมีค่าลดลงเรื่อย ๆ เรียกว่า การออสซิลเลตแบบมีความหน่วง (damped oscillation)

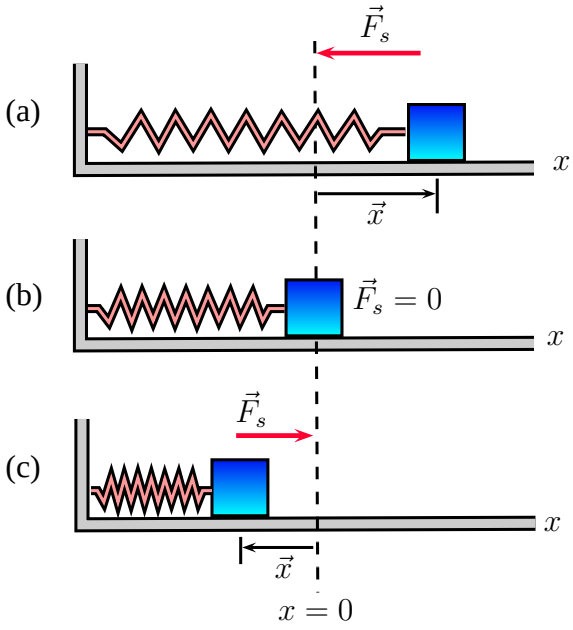
7.1 การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์

พิจารณาระบบมวลยึดกับสปริงดังรูปที่ 7.1 สมมติว่าไม่มีความเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสทั้งสอง เมื่อออกแรงดึงวัตถุมวล m จากตำแหน่งสมดุล ($x = 0$) แล้วปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่อย่างอิสระ วัตถุมวล m จะถูกแรงดึงกลับของสปริง (restoring force, F_s) กระทำโดยที่

$$F_s = -kx \tag{7.1}$$

ซึ่งแรงดังกล่าวจะมีทิศทางตรงข้ามกับการกระจัด นั่นคือแรงนี้จะดึงวัตถุเข้าหาตำแหน่งสมดุลเสมอ ค่าคงที่ k คือ ค่าคงที่ของสปริง และเมื่อประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันกับระบบนี้ทำให้ได้ว่า ความเร่งของวัตถุจะมีทิศตรงข้ามกับการกระจัดเสมอ ดังนี้

$$\begin{aligned} F_s &= -kx = ma \\ a &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \tag{7.2}$$



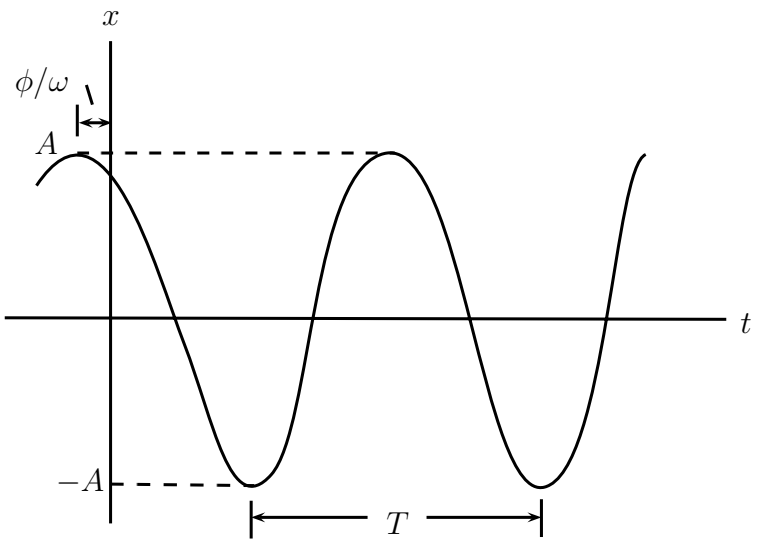
รูปที่ 7.1: ระบบมวลยึดกับสปริง

การเคลื่อนที่ของวัตถุดังกล่าวจะเห็นว่า *ความเร่งของวัตถุเป็นสัดส่วนโดยตรงกับการกระจัดของวัตถุและมีทิศตรงข้ามกับการกระจัดนี้* เรียกการเคลื่อนที่ในลักษณะแบบนี้ว่า การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ (simple harmonic motion, SHM) การเปลี่ยนแปลงการกระจัดกับเวลาดังแสดงในรูป 7.2 บรรยายด้วยสมการ

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{7.3}$$

เมื่อ ω เรียกว่า ความถี่เชิงมุม (angular frequency) A เรียกว่า อัมปลิจูด (amplitude) ซึ่งก็คือ การกระจัดสูงสุดและ ϕ คือค่าคงที่มุมเฟส จากสมการ 7.3 จะเห็นว่าเป็นฟังก์ชันคาบ คือจะมีลักษณะซ้ำตัวเองทุกช่วงเวลาที่ค่า ωt เพิ่มขึ้นเป็น 2π เรเดียน นั่นคือ คาบ (period, T) จึงหมายถึงเวลาที่อนุภาคหรือวัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ครบรอบ คาบของการเคลื่อนที่สัมพันธ์กับความถี่เชิงมุมดังนี้ เพราะว่าเฟส $\omega t + \phi$ เพิ่มขึ้น 2π ในเวลา T ทำให้ได้

$$\begin{aligned} \omega t + \phi + 2\pi &= \omega(t + T) + \phi \\ \omega T &= 2\pi \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \tag{7.4}$$



รูปที่ 7.2: การกระจัดของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

ส่วนกลับของคาบ เรียกว่า ความถี่ (frequency, f) นั่นคือเราจะได้ความสัมพันธ์ของปริมาณความถี่กับคาบดังนี้

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7.5}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{7.6}$$

7.1.1 ความเร็ว และความเร่งของการเคลื่อนที่แบบ SHM

จากสมการการกระจัดของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ เรานำวิเคราะห์หาความเร็วและความเร่งของวัตถุได้ดังนี้คือ

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \tag{7.7}$$

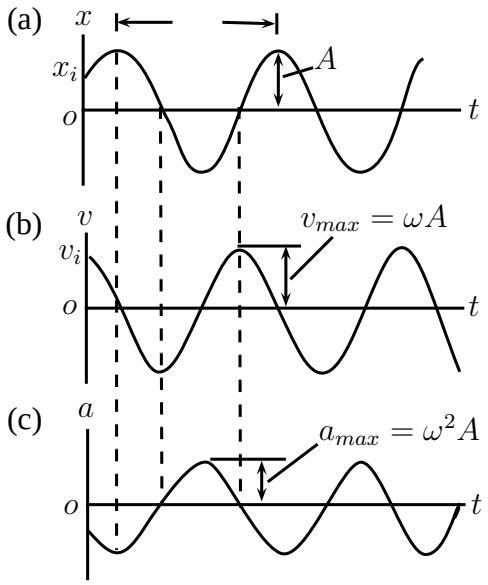
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \tag{7.8}$$

จากสมการของความเร็วและความเร่งจะพบว่าเฟสของความเร็วต่างจากเฟสของการกระจัดเป็นมุม 90° นั่นคือเมื่อ x มีค่ามากสุดหรือต่ำสุด ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ ในทำนองเดียวกันเมื่อ $x = 0$ อัตราเร็วมีค่าสูงสุด ในขณะที่เฟสของความเร่งต่างจากเฟสของการกระจัดเป็นมุม 180° นั่นคือ เมื่อ x มีค่าสูงสุดความเร่งก็มีค่าสูงสุดด้วยเช่นกันแต่มีทิศตรงกันข้าม ดัง

แสดงในรูปที่ 7.3 และขนาดของความเร็วและความเร่งสูงสุดมีค่าเป็น

$$v_{max} = \omega A \tag{7.9}$$

$$a_{max} = \omega^2 A \tag{7.10}$$



รูปที่ 7.3: กราฟแสดงการกระจัด (a) ความเร็ว (b) และความเร่ง (c) ของวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

7.1.2 ความถี่เชิงมุมของการสั่นแบบ SHM

ในการวิเคราะห์หาความถี่ของระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบ SHM นี้จะมีแนวปฏิบัติคล้าย ๆ กัน สำหรับในที่นี้เราจะพิจารณาการหาความถี่ของระบบมวลยึดกับสปริง ดังแสดงในรูป 7.4 จากหัวข้อที่ผ่านมาเราจะเห็นว่าขนาดความเร่งจะแปรผันตรงกับการกระจัดดังนี้คือ

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

ถ้ากำหนดให้ $\omega^2 = \frac{k}{m}$ และแทนค่าลงในสมการทำให้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{7.11}$$

เมื่อแทนค่าการกระจัดสมการที่ 7.3 และความเร่ง สมการที่ 7.7 ลงในสมการ 7.11

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

พบว่าทั้งสองข้างเท่ากัน นั่นหมายความว่า สมการการกระจัด $x = A\cos(\omega t + \phi)$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM และจากความสัมพันธ์ของความถี่เชิงมุมทำให้ได้ สำหรับระบบมวลยึดกับสปริง ความถี่เชิงมุมของการออสซิลเลตแบบ SHM คือ

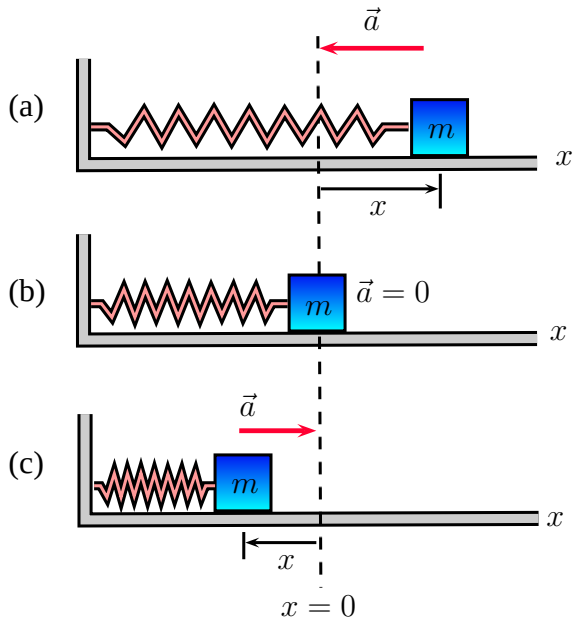
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.12}$$

นอกจากนี้คาบและความถี่ของการออสซิลเลตของระบบนี้มีค่าเป็นดังนี้คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.13}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.14}$$

จากสมการจะเห็นความถี่และคาบของระบบมวลยึดกับสปริงจะขึ้นอยู่กับมวลของวัตถุและค่าคงที่ของสปริง



รูปที่ 7.4: การออสซิลเลตของวัตถุมวล m ที่ยึดติดกับสปริง

ตัวอย่างที่ 1 วัตถุอันหนึ่งกำลังเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ซึ่งมีสมการการกระจัดเป็นดังนี้

$$x = 4\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$$

เมื่อ x และ t มีหน่วยเป็นเมตรและวินาที ตามลำดับ จงหา
(ก) อัมปลิจูด ความถี่ และคาบของการเคลื่อนที่นี้
(ข) ความเร็วและความเร่งของวัตถุที่เวลา t ใด ๆ
(ค) ใช้ผลที่ได้จากข้อ (ข) หาตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งที่เวลา $t = 1$ วินาที
(ง) ความเร็วสุงสุดและความเร่งสูงสุด

วิธีทำ โดยเทียบกับสมการการกระจัดในรูปทั่ว ๆไป $x = A\cos(\omega t + \phi)$ ทำให้ได้
(ก) อัมปลิจูด : $A = 4$ เมตร ความถี่: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} = 0.5$ เฮิร์ทซ์
และ คาบ: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.5}$ วินาที
(ข) ความเร็วและความเร่งที่เวลาใดหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(4\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})\right) \\ &= -4\pi \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \\ a = \frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(-4\sin(\pi t + \frac{\pi}{4})\right) \\ &= -4\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

(ค) การกระจัด ความเร็วและความเร่งที่เวลา $t = 1$ วินาที

$$x = 4\cos\left(\pi(1) + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2.83$$

$$v = -4\pi \sin\left(\pi(1) + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -8.89$$

$$a = -4\pi^2 \cos\left(\pi(1) + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi^2 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 27.90$$

(ง) ความเร็วสูงสุดและความเร่งสูงสุด

$$v_{max} = \omega A = 4\pi = 12.6$$

$$a_{max} = \omega^2 A = 4\pi^2 = 39.5$$

7.2 พลังงานของการออสซิลเลตแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์

พลังงานรวมของระบบ (E) มวลยึดกับสปริงที่มีการออสซิลเลตแบบ SHM คือผลรวมพลังงานจลน์ (K) กับพลังงานศักย์ (U)

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.15}$$

เมื่อแทนค่า $x = A\cos(\omega t + \phi)$ และ $v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$ ลงในสมการ 7.15 จะได้

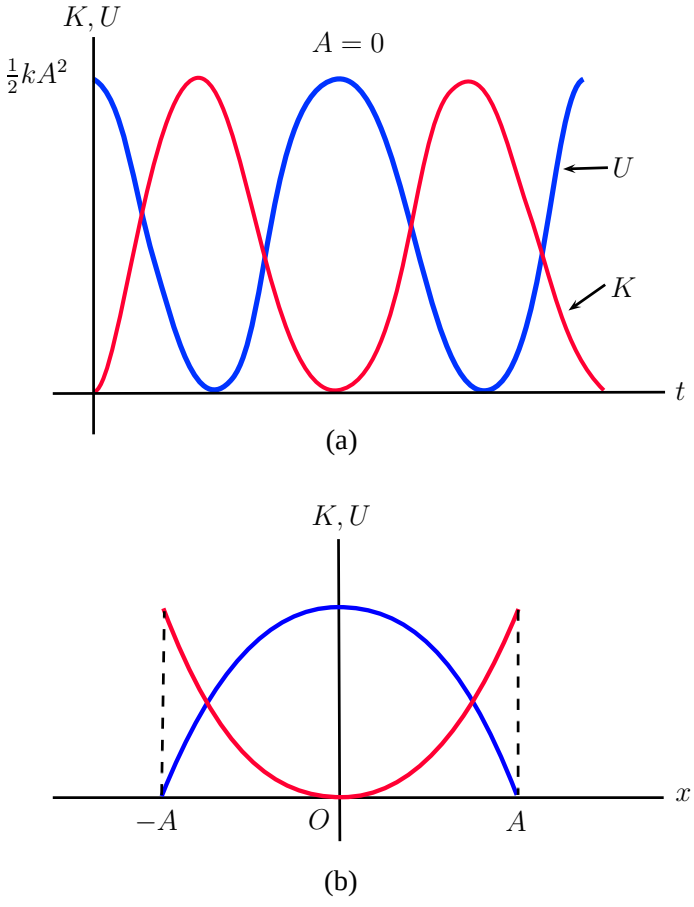
$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \tag{7.16}$$

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \tag{7.17}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \left(\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{7.18}$$

พลังงานรวมของระบบการออสซิลเลตแบบ SHM มีค่าคงที่ตลอดและมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัมปลิจูดยกกำลังสองการเปลี่ยนแปลงค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ระหว่างการเคลื่อนที่แบบ SHM แสดงดังรูป 7.5 จากรูปจะเห็นว่าผลรวมของพลังงานทั้งสองมีค่าคงที่ตลอดเวลา นั่นคือ เรากล่าวได้ว่า *สำหรับระบบที่มีการออสซิลเลตแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ พลังงานรวมของระบบมีค่าคงตัว*



รูปที่ 7.5: การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของการออสซิลเลตแบบ SHM

ตัวอย่างที่ 2 วัตถุมวล $m = 0.5$ kg ยึดติดกับสปริงมวลเบาที่มีค่าคงที่ของสปริง$k = 20$ N/m ออสซิลเลตในแนวระดับบนพื้นไม่มีความเสียดทาน จงคำนวณหา
(ก) พลังงานรวมของระบบและอัตราเร็วสูงสุดเมื่ออัมปลิจูด $A = 30$ cm
(ข) ความเร็วของวัตถุเมื่อการกระจัด 2.0 cm

วิธีทำ (ก) จากสมการพลังงานรวมของระบบจะได้

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(20)(3.0 \times 10^{-2})^2$$
$$E = 9.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

เมื่อวัตถุอยู่ที่ $x = 0$ เรารู้ว่า $U = 0$ และ $E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ ดังนั้น

$$\frac{1}{2}kv_{max}^2 = 9.0 \times 10^{-3}$$
$$v_{max} = \sqrt{\frac{18.0 \times 10^{-3}}{0.5}} = 0.19 \text{ m/s}$$

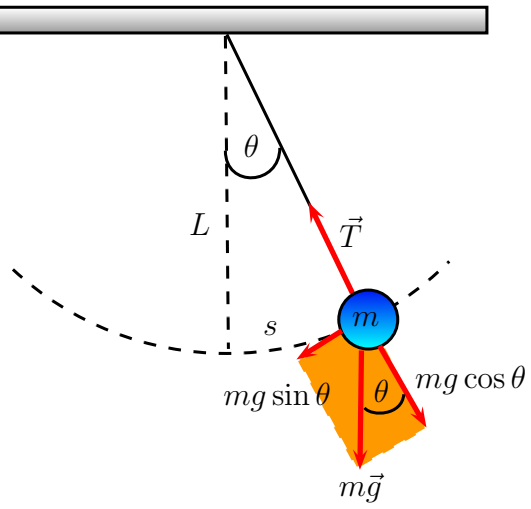
(ข) ความเร็วของวัตถุ ณ ตำแหน่ง $x = 2.0$ หาได้จาก

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$
$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$
$$v = \pm\sqrt{\frac{20}{0.5}[(0.03)^2 - (0.02)^2]}$$
$$v = \pm 0.141 \text{ m/s}$$

7.3 การประยุกต์การเคลื่อนที่แบบ SHM

7.3.1 ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย

การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาก็เป็นตัวอย่างหนึ่งของการออสซิลเลตแบบ SHM ถ้าเราประมาณว่ามุมของแกว่งไม่โตมากนั้น($\leq 10^\circ$) พิจารณาลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย (simple pendulum) ดังรูป 7.6 แรงที่กระทำต่อลูกตุ้มมวล m คือตึงของเส้นเชือก $\vec{T}$ และแรงโน้มถ่วงของโลก $m\vec{g}$ และองค์ประกอบของแรงโน้มถ่วงในแนวเส้นสัมผัส $mg\sin\theta$ จะดึงวัตถุเข้าหามุม



รูปที่ 7.6: การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย

$\theta = 0$ เสมอ และมีทิศตรงข้ามกับการกระจัดเชิงมุม ดังนั้นจากกฎนิวตันข้อที่สองสำหรับการเคลื่อนที่ จะได้ว่า

$$\sum F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{7.19}$$

เมื่อ s คือการกระจัดของลูกตุ้มที่วัดตามส่วนโค้ง เพราะว่า $s = L\theta$ และ L มีค่าคงที่ จากสมการ 7.19 ทำให้ได้

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{7.20}$$

โดยการประมาณ $\sin\theta \approx \theta$ ทำให้สมการ 7.20 เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{7.21}$$

นี้คือสมการการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ของลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย และมีผลเฉลยของสมการนี้อยู่ในรูปแบบ$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$ เมื่อ θ_{max} คือ การกระจัดเชิงมุมสูงสุด (maximum angular displacement) และมีความถี่ของการออสซิลเลตเป็น

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{7.22}$$

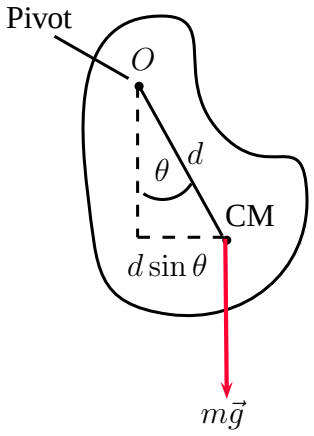
และคาบของการออสซิลเลตเป็น

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{7.23}$$

จากสมการ 7.23 จะเห็นว่า *คาบและความถี่การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายขึ้นอยู่กับความยาวของเส้นเชือกและความเร่งโน้มถ่วงของโลกเท่านั้น*

7.3.2 ลูกตุ้มฟิสิคัล (physical pendulum)

พิจารณาวัตถุที่รูปร่างใด ๆ ซึ่งมีมวล M ถ้าวัตถุทำให้หมุนรอบจุดใด ๆโดยที่จุดหมุนไม่ผ่านตรงจุดศูนย์กลางมวลวัตถุ (center of mass, CM) เมื่อปล่อยให้มีการเคลื่อนที่วัตถุจะออสซิลเลตรอบจุดหมุนนี้ เราเรียกว่าการแกว่งของวัตถุในลักษณะดังกล่าวว่า *physical pendulum* ดังรูป 7.7 จะเห็นว่าแรงโน้มถ่วงของโลกจะทำให้เกิดทอร์ครอบจุดหมุน O ด้วยขนาด $mgd\sin\theta$ และโดยใช้กฎการเคลื่อนที่ $\sum\tau = I\alpha$ เมื่อ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดหมุน O นั่นคือ



รูปที่ 7.7: การแกว่งของลูกตุ้มฟิสิคัล

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

โดยใช้การประมาณเช่นเดียวกันคือ $\sin\theta \approx \theta$ ทำให้เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\theta\right) = -\omega^2\theta \tag{7.24}$$

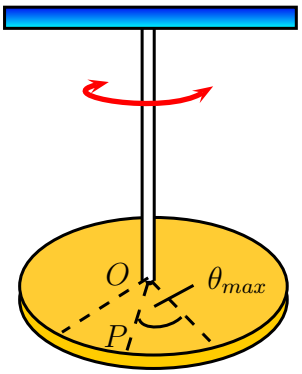
คำตอบของสมการ 7.24 คือ $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$ ซึ่งมีความถี่เชิงมุมและคาบของการแกว่งเป็น

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{7.25}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{7.26}$$

7.3.3 Torsional Pendulum

พิจาณาแผ่นวงกลมที่ยึดติดเพดานด้วยแท่งเล็ก ๆดังรูป 7.8 เมื่อออกแรงบิดวัตถุเป็นเล็ก ๆ รอบแกนในแนวดิ่งและปล่อยให้วัตถุมีการออสซิลเลตรอบแกนนี้ ลักษณะการเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า *torsional pendulum* ทอร์คของการหมุนรอบแกนในแนวดิ่งมี่เท่ากับ$\tau = -\kappa\theta$ เมื่อ κ คือ ค่าคงที่ของการบิด (torsional constant) เป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับวัสดุที่ใช้ทำเป็นแท่งยึด โดยการประยุกต์กฎการเคลื่อนที่



รูปที่ 7.8: การแกว่งของ torsional pendulum

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ -\kappa\theta &= I\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{\kappa}{I}\theta = -\omega^2\theta \end{aligned} \tag{7.27}$$

จะเห็นว่าวัตถุจะมีการแกว่งด้วยความถี่และคาบเป็นดังนี้คือ

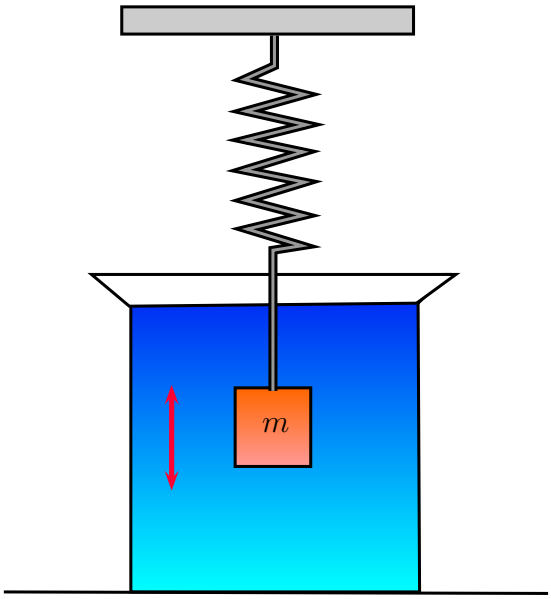
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{7.28}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{7.29}$$

7.4 การออสซิลเลตแบบมีความหน่วง

การเคลื่อนที่แบบออสซิลเลตส่วนใหญ่จะมีการสูญเสียพลังงานอยู่ตลอดเวลาขณะเคลื่อนที่ เนื่องจากมีแรงต้าน เช่น แรงเสียดทาน ทำให้การเคลื่อนที่ถูกหน่วงไว้ การออสซิลเลตแบบ

นี้เรียกว่า การออสซิลเลตแบบมีความหน่วง (damped oscillation) ในรูปที่ 7.9 พิจาณาการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m ยึดติดกับสปริงที่มีค่า k แขวนในแนวดิ่ง แล้วนำไปจุ่มในของเหลว เมื่อทำให้วัตถุมีการออสซิลเลตวัตถุจะมีแรงหน่วงในของเหลวกระทำตลอดเวลา โดยที่แรง



รูปที่ 7.9: การออสซิลเลตแบบมีความหน่วง

หน่วง (retard force, $\vec{R}$) มีค่าเป็น

$$\vec{R} = -b\vec{v} \tag{7.30}$$

เมื่อ b คือสัมประสิทธิ์ของความหน่วง (damping coefficient) และแรงหน่วงนี้จะมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วของวัตถุ แรงดึงกลับของสปริง $\vec{F}_r = -kx$ และโดยการประยุกต์กฎของนิวตันข้อที่สองสำหรับการเคลื่อนที่นี้ทำให้ได้

$$\begin{aligned}\sum F_x = F_r + R &= -kx - bv = ma \\ -kx - b\frac{dx}{dt} &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x &= 0\end{aligned}$$

เมื่อแรงหน่วงมีค่าน้อย (b มีค่าน้อย ๆ) เปรียบเทียบค่าสูงสุดของแรงดึงกลับของสปริง เราจะได้คำตอบของสมการนี้อยู่ในรูป

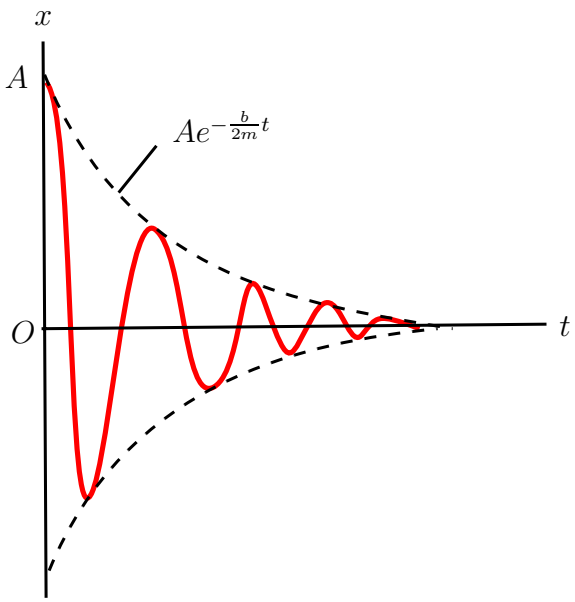
$$x = Ae - \frac{b}{2m}t\cos(\omega t + \phi) \tag{7.31}$$

ซึ่งมีความถี่ของการออสซิลเลตเป็น

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{7.32}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{7.33}$$

เมื่อ ω_0 คือ ความถี่ของการออสซิลเลตขณะที่ไม่มีความหน่วงหรือเรียกว่า ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ลักษณะการออสซิลเลตแบบมีความหน่วงแสดงดังรูป 7.10 ซึ่งจะเห็นว่าการกระจัดของวัตถุจะลดลงเรื่อย ๆตามเวลาจนกระทั่งเป็นศูนย์ โดยทั่วไปเพื่อความสะดวก



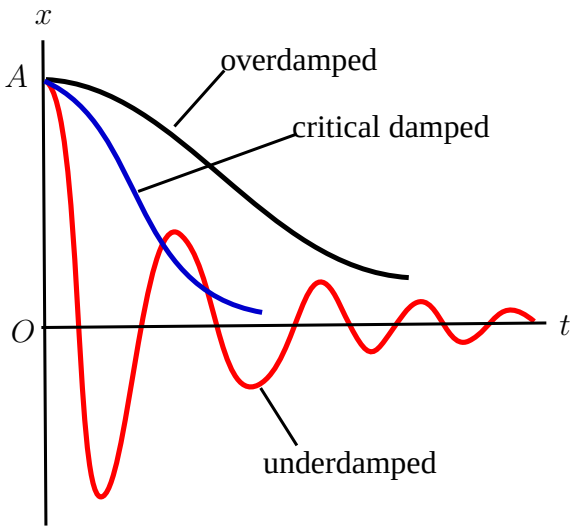
รูปที่ 7.10: การเปลี่ยนแปลงของการกระจัดกับเวลา

ในการแยกแยะว่าเมื่อไหร่ระบบจะออสซิลเลตแบบมีความหน่วงนั้น ได้ทำการกำหนดเงื่อนไขของการเกิดการออสซิลเลตไว้ดังนี้คือ

- เมื่อแรงหน่วงสูงสุด $R_{max} = bv_{max} < kA$ ระบบจะเคลื่อนที่แบบออสซิลเลต เรียกว่า *underdamped*
- เมื่อค่า $\frac{b}{2m} = \omega_0$ ระบบไม่มีการออสซิลเลต เรียกว่า *critically damped*
- เมื่อแรงหน่วงสูงสุด $R_{max} = bv_{max} > kA$ และ $\frac{b}{2m} > \omega_0$ ระบบไม่มีการออสซิลเลตเรียกว่า *overdamped*

ลักษณะการเคลื่อนที่ทั้งสามกลุ่มแสดงในรูป 7.11 ซึ่งการกระจัดของวัตถุจะลดลงเข้าหา

ตำแหน่งสมดุล ($x = 0$) วัตถุจะจะแสดงพฤติกรรมการเคลื่อนที่แบบออสซิลเลตก็ต่อเมื่ออยู่ในสภาวะ underdamped เท่านั้น ถ้าตัวกลางมีความหนืดมากแรงต้านจะมีค่ามากกว่าแรง



รูปที่ 7.11: การเคลื่อนที่แบบ underdamed, critically damped และ overdamped

ดึงกลับ นั่นคือ ถ้า $R_{max} = kv_{max} > kA$ และ $b/2m > \omega_0$ ซึ่งเรียกว่า **overdamped** ในสภาวะนี้ระบบจะไม่มีการออสซิลเลตแต่จะถูกดึงกลับเข้าสู่ตำแหน่งสมดุลและหยุดนิ่ง เมื่อความหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นเวลาที่ใช้ในการนำระบบเข้าสู่สมดุลจะเพิ่มขึ้นด้วย

ในหลายกรณีที่มีความเสียดทานปรากฏอยู่ในระบบ ระบบอาจจะอยู่ในสภาวะ overdamped หรือ underdamped พลังงานของระบบจะค่อย ๆลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ พลังงานเชิงกลที่สูญเสียไปกลายเป็นพลังงานภายในของตัวกลางนั้น

ตัวอย่างที่ 3 ลูกตุ้มนาฬิกาอันหนึ่งประกอบด้วยทรงกลมอะลูมิเนียมแขวนไว้ด้วยเส้นเชือกยาว ℓ เมตร พบว่าในเวลา 27 นาที อัมปลิจูดลดลงจาก 6.00° ไปเป็น 5.40° ให้หาค่า $\gamma = \frac{b}{2m}$ มีค่าเป็นเท่าไหร่ และจงสรุปว่าแรงต้านของอากาศจะมีผลต่อคาบของการออสซิลเลตของลูกตุ้มนาฬิกาอย่างไร

วิธีทำ จากสมการของการเปลี่ยนแปลงอัมปลิจูดกับเวลาสำหรับการออสซิลเลตแบบมีความหน่วงคือ

$$A' = Ae^{-\gamma t}$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น $\gamma = \frac{1}{t}\ln\frac{A}{A'}$
แทนค่า $t = 27$ นาที เท่ากับ 1.62×10^3 วินาที และ $A = 6.00^\circ$ และ $A' = 5.40^\circ$ จะได้

$$\gamma = \frac{1}{1.62 \times 10^3}\ln\frac{6.00^\circ}{5.40^\circ} = 6.56 \times 10^{-4} \qquad \text{s}^{-1}$$

ในกรณีของลูกตุ้มนาฬิกา ความถี่ของการออสซิลเลตกำหนดโดย

$$\omega = \sqrt{(\omega_0)^2 - (\frac{b}{2m})^2} = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \gamma^2}$$

ดังนั้นคาบของการแกว่งเป็น

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\ell - \gamma^2}}$$

แทนค่า $g/\ell = 9.80$ s^{-2} และ $\gamma^2 = 4 \times 10^{-7}$ s^{-2} จะพบว่าค่าของ γ^2 มีค่าน้อยมากเทียบกับ g/ℓ ดังนั้น คาบของการออสซิลเลตจึงมีค่าเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 2.01 \qquad \text{s}$$

แสดงว่าแรงต้านทานของอากาศไม่มีผลต่อคาบของการออสซิลเลตของลูกตุ้มนาฬิกาแต่จะมีผลต่ออัมปลิจูดของการออสซิลเลต โดยทำให้อัมปลิจูดมีค่าลดลง

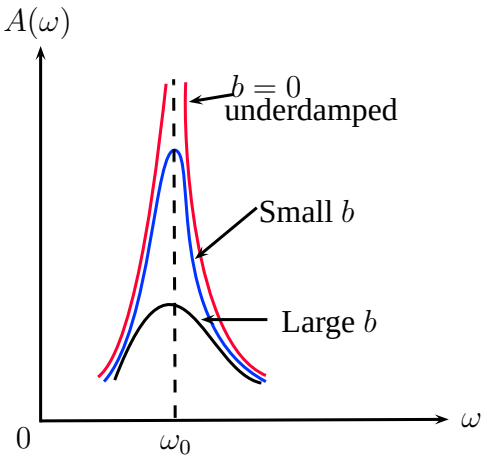
7.5 การออสซิลเลตเมื่อมีแรงกระทำ (forced oscillations)

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะพบว่าในการออสซิลแบบมีความหน่วงนั้นพลังงานของระบบจะลดลงเรื่อย ๆแต่อย่างไรก็ ตามเราสามารถชดเชยพลังงานที่สูญเสียไปได้โดยการกระตุ้นจากแรงภายนอก เช่น สมมติแรงภายนอกที่มากระตุ้นมีลักษณะเป็นคาบ $F = F_{ext}\cos\omega t$ เมื่อ ω คือ ความถี่เชิงมุมของแรงกระตุ้น และ F_{ext} คือค่าคงที่ โดยการเพิ่มแรงนี้เข้าไปในสมการของการออสซิลเลตแบบมีความหน่วง จะได้ดังนี้

$$F_{ext}\cos\omega t - kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{7.34}$$

ผลเฉลยของสมการ 7.34 เป็นดังนี้

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{7.35}$$



รูปที่ 7.12: กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัมปลิจูดกับความถี่เชิงมุมของการออสซิลเลตแบบมีแรงกระตุ้น

เมื่อ A คืออัมปลิจูดของการออสซิลเลต และมีค่าเป็น

$$A = \frac{F_{ext}/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \tag{7.36}$$

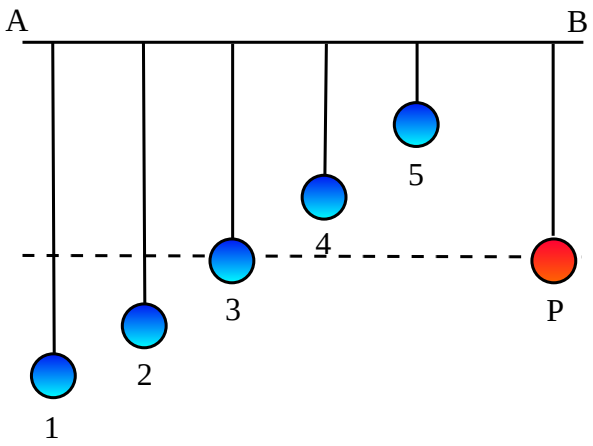
ข้อสังเกตุคือว่าระบบจะออสซิลเลตด้วยความถี่เดียวกันกับความถี่ของแรงกระตุ้นจากภายนอก จากสมการที่ 7.36 จะพบว่า อัมปลิจูดของการออสซิลเลตจะมีค่าสูงมากเมื่อความถี่ของแรงกระตุ้นมีค่าใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติ (ω_0) เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า การกำทอน (resonance) และด้วยเหตุนี้บางครั้งเราจึงเรียก ω_0 ว่า ความถี่กำทอนของระบบ (resonance frequency)

การออสซิลเลตด้วยอัมปลิจูดโตมาก ๆ ที่ความถี่กำทอนก็เพราะว่าพลังงานถูกส่งเข้าไปในระบบได้มากที่สุด เพื่อให้เห็นภาพชัดขึ้นลองพิจารณาจากนิยามของอัตราการส่งผ่านพลังงานซึ่งก็คือกำลังงาน กำหนดเป็นดังนี้

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{\vec{s}}{dt}$$
$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

เนื่องจาก $v = dx/dt = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ และ $F = F_{ext}\cos(\omega t + \phi)$ ดังนั้นจะพบว่าผลคูณของแรงกระตุ้น $\vec{F}$ และความเร็วของการออสซิลเลต $\vec{v}$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อปริมาณทั้งสองมีเฟสตรงกัน นั่นคืออัตราการส่งพลังงานจะเกิดขึ้นมากที่สุดนั่นเอง
ในรูปที่ 7.12 เป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอัมปลิจูดกับความถี่เชิงมุมของแรงกระตุ้นซึ่งมีและไม่มีความหน่วง จะเห็นว่าอัมปลิจูดจะเพิ่มขึ้นเมื่อสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีค่าลด

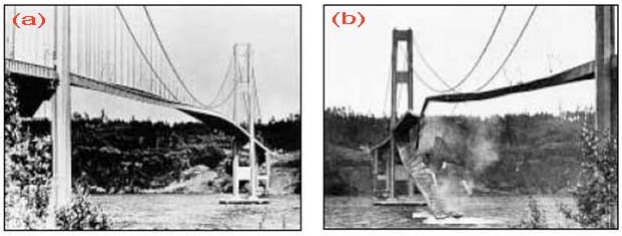
ลง ($b \to 0$) และกราฟของการเกิดกำทอนจะมีความกว้างเพิ่มขึ้นเมื่อสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้น จากสมการที่ 7.36 อัมปลิจูดจะเข้าหาค่าอนันต์ เมื่อ $\omega \to \omega_0$ หรือพูดอีกนัยหนึ่งคือไม่มีการสูญเสียพลังงานภายในระบบ พฤติกรรมของระบบออสซิลเลตที่มีแรงกระตุ้นหลังจากที่นำแรงภายนอกออกไปแล้วจะขึ้นอยู่กับค่า b และค่าของ ω ว่าเข้าใกล้ค่า ω_0 มากน้อยแค่ไหน คุณภาพของพฤติกรรมดังกล่าวบ่งบอกด้วยปริมาณที่เรียกว่าแฟคเตอร์คุณภาพ (quality factor, Q) ถ้าระบบเข้าใกล้สภาวะ underdamped ค่า Q จะมีค่าสูง และอัมปลิจูดจะลดลงด้วยแฟคเตอร์ของ $e(= 2.718\ldots)$ ในวงรอบ Q/π การเกิด



รูปที่ 7.13: การสาธิตของการเกิดกำทอนของลูกตุ้มนาฬิกา

กำทอนสามารถแสดงให้เห็นได้โดยการทดลองคือเอาเชือกชนิดเดียวกันมาทำลูกตุ้มนาฬิกาหลาย ๆอันที่มีความยาวต่าง ๆกัน และแขวนอยู่บนเชือก AB ซึ่งเป็นเชือกชนิดเดียวกันกับลูกตุ้มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 7.13 ถ้าเราทำให้ลูกตุ้ม P แกว่ง ลูกตุ้มอีก 5 อันก็จะแกว่งด้วย ทั้งนี้เนื่องจากเกิดการถ่ายทอดพลังงานจากลูกตุ้ม P ไปยังลูกตุ้มทั้ง 5 อัน จากการแกว่งของลูกตุ้มทั้ง 5 อัน พบว่าลูกตุ้มอันที่ 3 จะแกว่งด้วยอัมปลิจูดมากที่สุด เพราะว่าลูกตุ้มที่ 3 มีความยาวเท่ากับลูกตุ้ม P นั่นคือมีความถี่ธรรมชาติเท่ากัน

ตัวอย่างของการเกิดกำทอนในชีวิตประจำวัน คือ การปรับเครื่องรับคลื่นวิทยุให้ตรงกับความถี่ของคลื่นวิทยุที่ส่งออกมาจากสถานีวิทยุ ซึ่งผลที่ได้จะทำให้เราสามารถรับฟังรายการจากสถานีนั้นได้ นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างของการเกิดกำทอนเนื่องจากออสซิลเลตของสะพานทาโกมา ที่เมืองวอชิงตัน ประเทศสหรัฐอเมริกา โดยแรงลมของพายุทำให้สะพานเกิดการออสซิลเลตด้วยอัมปลิจูดเพิ่มสูงขึ้นเกินกว่าโครงสร้างจะรับไว้ได้ และเหตุการณ์ครั้งนั้นทำให้สะพานนั้นพังทะลายลงมาดังปรากฏในรูป 7.14



รูปที่ 7.14: สพานทาโกมา (Tagoma) ทีเมือง วอชิงตัน ในปี 1940 ถูกลมพายุพัดโดย ลมพายุนี้ได้ทำให้สะพานเกิดการออสซิลเลตด้วยความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติและทำให้เกิดการกำทอนขึ้น (a) ภาพสะพานก่อนเกิดกำทอน และ (b) หลังเกิดกำทอนและสะพานพังทะลายลงมา

7.6 แบบฝึกหัด

1. ในเครื่องยนต์ ลูกสูบจะออสซิลเลตแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์ โดยที่การกระจัดของลูกสูบสอดคล้องกับสมการนี้

$$x = (5.0 \text{ cm}) \cos(2t + \frac{pi}{6})$$

เมื่อ x มีหน่วยเป็นเซนติเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที ที่เวลา $t = 0$ จงหา
(ก) การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง
(ข) คาบและอัมปลิจูดของการเคลื่อนที่นี้

2. สปริงถูกยืดออกเป็นระยะ 3.9 cm เมื่อมีมวล 10 kg แขนอยู่ ถ้านำมวลขนาด 25 kg ไปยึดกับสปริงนี้แล้วมีการออสซิลเลตแบบ SHM จงหาคาบของการเคลื่อนที่นี้

3. มวลขนาด 1 kg ยึดติดกับสปริงที่มีค่าคงที่ของสปริง $k = 25$ N/m ออสซิลเลตในแนวระดับบนพื้นที่ไม่มีความเสียดทาน ณ ที่เวลา $t = 0$ มวลถูกปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่งที่ $x = -3.0$ cm จงหาต่อไปนี้
(ก) คาบของการเคลื่อนที่
(ข) ความเร็วสูงสุดและความเร่งสูงสุด
(ค) การกระจัด ความเร็ว และความเร่งที่เวลาใด ๆ

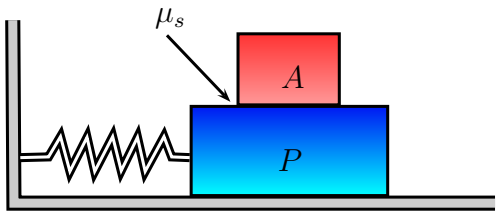
4. ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายมีมวล $m = 0.25$ kg และมีความยาวเส้นเชือก $L = 1.0$ m เริ่มต้นจากการปล่อยที่ตำแหน่งมุม 15° จงหาค่าต่อไปนี้
(ก) อัตราเร็วสูงสุด
(ข) ความเร่งเชิงมุมสูงสุด
(ค) แรงดึงกลับสูงสุด

5. ลูกตุ้มนาฬิกามีความยาวเส้นเชือก 1.0 เมตร ถูกปล่อยจากมุมเริ่มต้น 15° หลังจากผ่านไป 1.0 วินาที อัมปลิจูดของลูกตุ้มลดลงเป็น 5.5° จงหาค่าของ $\frac{b}{2m}$

6. มวลของดิวเทอเรียม (Deuterium, D_2) มีขนาดเป็นสองเท่าของมวลโมเลกุลไฮโดรเจน (H_2) ถ้าความถี่ของการสั่นของโมเลกุลไฮโดรเจนเป็น 1.3×10^{14} Hz ความถี่การสั่นของโมเลกุลD_2 เป็นเท่าไหร่ (กำหนดให้ ค่าของที่ของสปริงของทั้งสองโมเลกุลมีค่าเท่ากัน)

7. วัตถุยึดติดกับสปริงสั่นด้วยอัมปลิจูด 3.5 cm ถ้าค่าคงที่ของสปริงคือ 250 N/m และวัตถุมวล 0.5 kg จงหา (ก) พลังงานเชิงกลของระบบ (ข) อัตราเร็วสูงสุดของวัตถุ (ค) ความเร่งสูงสุดของวัตถุ

8. กล่อง P ขนาดใหญ่ใบหนึ่งทำการสั่นในแนวระดับแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์บนพื้นที่ไม่มีความฝืดด้วยความถี่ 1.5 Hz กล่อง B วางนิ่งอยู่บนกล่อง P ดังรูป 7.15 สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างกล่องทั้งสองคือ 0.6 จงหาค่าอัมปลิจูดสูงสุดของการสั่นของระบบนี้ถ้ากล่อง B ไม่มีการลื่น



รูปที่ 7.15: สำหรับโจทย์ปัญหาข้อที่ 8

9. ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายซึ่งมีเส้นเชือกความยาว 2.0 m สั่นรอบจุดสมดุลในแนวดิ่งลูกตุ้มนาฬิกาจะสั่นจำนวนกี่รอบในเวลา 5 นาที กำหนดให้ค่า $g = 9.8$ m/s^2

10. วัตถุอันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี 20.0 cm ในการเคลื่อนที่แต่ละรอบใช้เวลา 2 วินาที จงหา(ก) อัตราเร็วในการเลื่อนตำแหน่งของวัตถุ (ข) ความถี่ของการเคลื่อนที่ในหน่วยเฮิทซ์ (Hz) และ(ค) อัตราเร็วเชิงมุมของวัตถุ

บทที่ 8

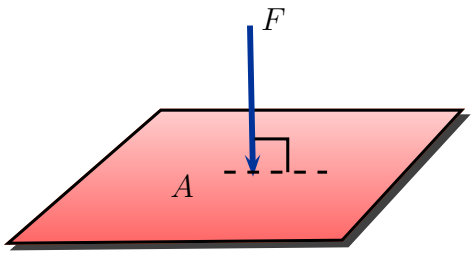
กลศาสตร์ของไหล

สถานะ (state) หรือเฟส (phase) ของสสารในธรรมชาติแบ่งออกเป็น 3 สถานะ ได้แก่ ของแข็ง (solid) ของเหลว (liquid) และก๊าซ (gas) สสารที่เป็นของแข็งจะมีรูปร่างแน่นอน ไม่เปลี่ยนแปลง (deformation) เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ ในขณะที่สสารที่อยู่ในสถานะของเหลวและก๊าซจะมีรูปร่างไม่แน่นอนและเปลี่ยนแปลงตามภาชนะที่บรรจุ ด้วยสมบติของสสารดังกล่าวจึงเรียกว่า ของไหล (fluid) ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับกลศาสตร์ไหล (fluid mechanics) ทั้งของไหลที่อยู่นิ่ง (static fluid) และของไหลที่เคลื่อนที่ (dynamic fluid)

8.1 ความดันและความหนาแน่น

8.1.1 ความดัน (Pressure)

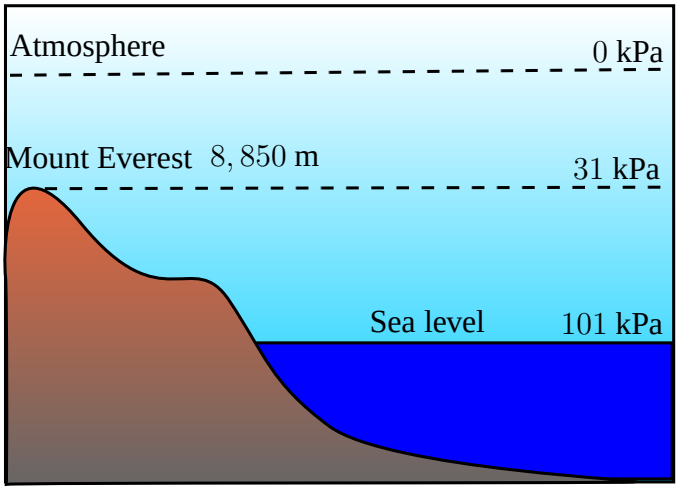
ความดัน (Pressure, P) คือ อัตราส่วนระหว่างแรงในแนวตั้งฉากกับพื้นผิว (F) กับพื้นที่ (A) ดังรูป 8.1



รูปที่ 8.1: แรงกระทำในทิศตั้งฉากกับพื้นที่ผิว

$$P = \frac{F}{A} \tag{8.1}$$

ความดันมีหน่วยเป็น นิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2) เรียกว่า ปาสคาล (Pascal, Pa) โดยที่ 1 Pa = 1 N/m^2 นอกจากนี้ยังมีหน่วยการวัดความดันที่นิยมใช้กันคือ *ความดันบรรยากาศ* (Atmosphere, atm) โดยที่ความดันบรรยากาศ (P_0) คือ ความดันบรรยากาศของโลกซึ่งเป็นความดันด้านล่างของอากาศที่เราอาศัย จะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามสภาพลมฟ้าอากาศและความสูงดังรูป 8.2 ความดันบรรยากาศปกติระดับน้ำทะเล (ค่าเฉลี่ย) คือ 1 บรรยากาศ (1 atm) $= 1.013 \times 10^5$ Pa



รูปที่ 8.2: ความดันบรรยากาศบนชั้นผิวโลกที่ระยะต่าง ๆ

8.1.2 ความหนาแน่น (Density)

ความหนาแน่น ของสสารใด ๆ เป็นสมบัติเฉพาะของสสาร (mass density, ρ) ซึ่งมีนิยามเป็นอัตราส่วนมวล (mass, m) ต่อปริมาตรของสสารนั้น (volume, V)

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{8.2}$$

มีหน่วยเป็น กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร (kg/m^3) ตารางที่ 8.1 แสดงบางตัวอย่างของความหนาแน่นมวลของสสาร

8.2 ความดันที่ขึ้นอยู่กับความลึก

ของไหลมีความหนาแน่น ρ บรรจุในภาชนะที่เปิดสัมผัสกับชั้นบรรยากาศ P_0 พิจารณาแท่งของไหลที่มีระยะความสูงจากผิวด้านบน h และมีพื้นที่หน้าตัดเป็น A ดังรูปที่ 8.3 เมื่อ

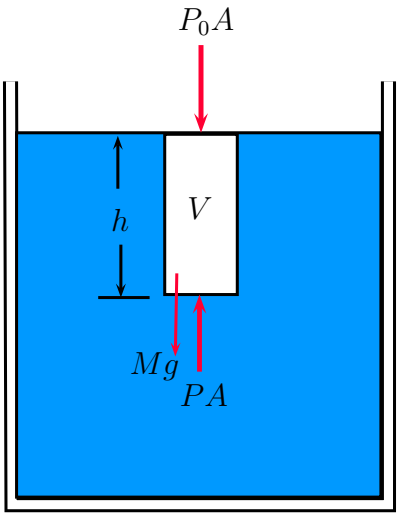
สสาร	ρ (kg/m^3)
ทอง	19.3×10^3
ตะกั่ว	11.3×10^3
เหล็ก	7.8×10^3
อะลูมิเนียม	2.7×10^3
แก้ว	$2.4 - 2.8 \times 10^3$
น้ำแข็ง	0.917×10^3
น้ำ	1.00×10^3
อากาศ	1.21

ตารางที่ 8.1: ตารางแสดงค่าความหนาแน่นมวลของสสารบางชนิด

ของไหลหยุดนิ่งอยู่ในสมดุลสถิตจะได้ว่า แรงลัพธ์ที่กระทำต่อแท่งของไหลมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \sum F_y = PA - P_0A - Mg &= 0 \\ PA - P_0A - \rho Vg &= 0 \\ PA - P_0A - \rho Ahg &= 0 \\ P = P_0 + \rho gh & \qquad (8.3) \end{aligned}$$

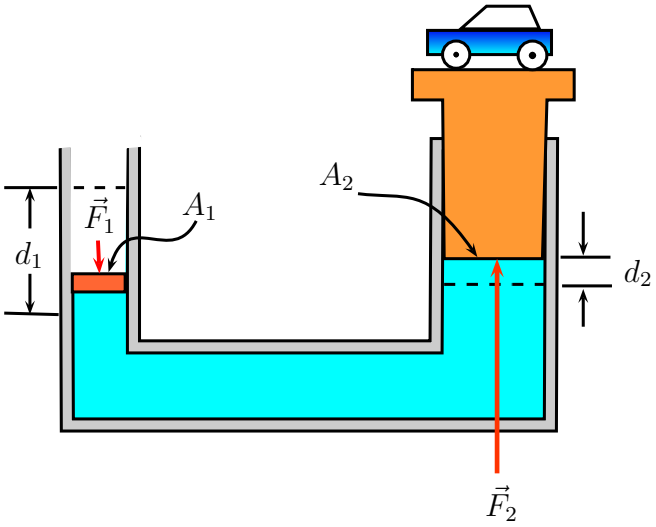
จากสมการ 8.3 จะเห็นว่าความดันของไหล P ที่ระดับความลึก h จะมีค่ามากกว่าความดัน



รูปที่ 8.3: การหาค่าความดันของไหลที่แปรตามความลึก

บรรยกาศอยู่ ρgh และผลดังกล่าวนำไปสู่แนวคิดที่ถูกเสนอโดยพาสคาล (Pascal) เรียกว่า

กฎของพาสคาล (Pascal's law) ซึ่งกล่าวว่า *ความดันที่เพิ่มขึ้นที่ผิวจะถูกส่งต่อไปยังทุก ๆ จุดในของไหลและส่งต่อไปยังผนังของภาชนะที่บรรจุ* หลักการนี้นำมาประยุกต์ใช้ในเครื่องยกไฮดรอลิก ดังแสดงในรูปที่ 8.4 แรง F_1 กระทำต่อลูกสูบที่มีพื้นที่หน้าตัด A_1 ความดันที่



รูปที่ 8.4: หลักการทำงานของเครื่องยกไฮโดรลิก

เพิ่มขึ้นมีค่าเป็น

$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1}$$

รถบรรทุกวางบนลูกสูบที่ใหญ่กว่า A_2 ถูกยกขึ้นด้วยแรง F_2 และการเพิ่มขึ้นของความดันทางด้านลูกสูบเล็กจะส่งต่อมาทางด้านลูกสูบใหญ่ด้วยขนาดเดียวกัน ดังนั้นทำให้ได้ว่า

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \tag{8.4}$$

นอกจากนี้จะเห็นว่าปริมาตรของของไหลที่กระจัดในแต่ละด้านของลูกสูบเท่ากันทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 d_1 &= A_2 d_2 \\ \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} &= \frac{d_1}{d_2} \end{aligned} \tag{8.5}$$

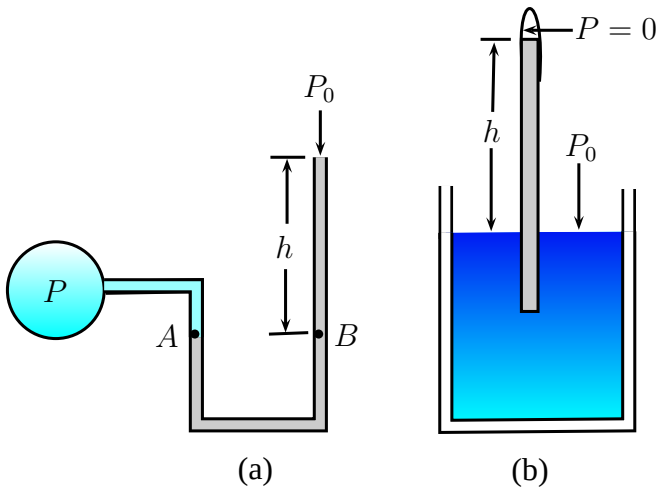
8.3 การวัดความดัน

การวัดค่าความดันโดยใช้เครื่องวัดที่เรียกว่า มาโนมิเตอร์ (manometer) ซึ่งมีลักษณะดังรูป 8.5(a) จากรูป ที่ระดับความลึกเดียวกัน (จุด A กับจุด B) ความดันเท่ากัน นั่นคือ

$$\begin{aligned} P_A &= P_B \\ P &= P_0 + \rho gh \\ P - P_0 &= \rho gh \\ P_g &= \rho gh \end{aligned}$$

เมื่อ P_g เรียกว่า ความดันเกจ (gauge pressure) ซึ่งมีค่าเท่ากับ ρgh ส่วน P เรียกว่า ความดันสัมบูรณ์ (absolute pressure) เครื่องวัดความดันอีกแบบที่เรียกว่าบารอมิเตอร์ ดังรูป 8.5(b) ซึ่งใช้วัดความดันบรรยากาศ (P_0) จากรูปจะได้ว่า

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ P_0 &= P + \rho gh = 0 + \rho gh \\ P_0 &= \rho gh \end{aligned}$$



รูปที่ 8.5: เครื่องวัดความดัน (a) มานอมิเตอร์ และ (b) บารอมิเตอร์

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> เขื่อนกั้นน้ำมีความกว้าง w ระดับน้ำในเขื่อนมีความสูง H ดังรูป 8.6 จงหาแรงดันที่น้ำกระทำต่อเขื่อน

วิธีทำ พิจารณาพื้นที่ส่วนเล็กๆของสันเขื่อน dA ที่อยู่ลึกเป็นระยะ h จากผิวน้ำ ความดันที่กระทำต่อพื้นที่ dA คือ

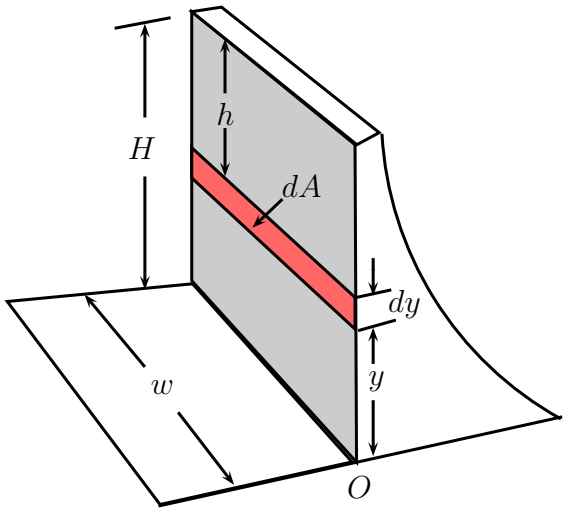
$$P = \rho g h = \rho g(H - y)$$

ดังนั้นแรงที่กระทำต่อพื้น dA จึงมีขนาดเป็น

$$dF = PdA = Pwdy$$
$$dF = \rho g(H - y)wdy$$

แรงทั้งหมดที่กระทำต่อเขื่อนจึงมีค่าดังนี้

$$F = \int PdA = \int \rho g(H - y)wdy$$
$$F = \rho w g \int_0^H (H - y)dy$$
$$F = \frac{1}{2}\rho g w H^2$$



รูปที่ 8.6: แสดงการหาค่าแรงดันน้ำที่กระทำต่อสันเขื่อน

ตัวอย่างที่ 2 หลอดรูปตัวยูบรรจุน้ำและปลายทั้งสองข้างเปิดสัมผัสกับอากาศ ค่อย ๆเทปรอทปริมาณหนึ่งลงไปที่แขนข้างซ้ายของหลอดจนกระทั่งความสูงในแนวดิ่งของลำน้ำเท่ากับ 15 cm ดังรูป 8.7 จงหาความดันเกจที่รอยต่อระหว่างน้ำกับปรอทและความสูงในแนวดิ่ง h จาก

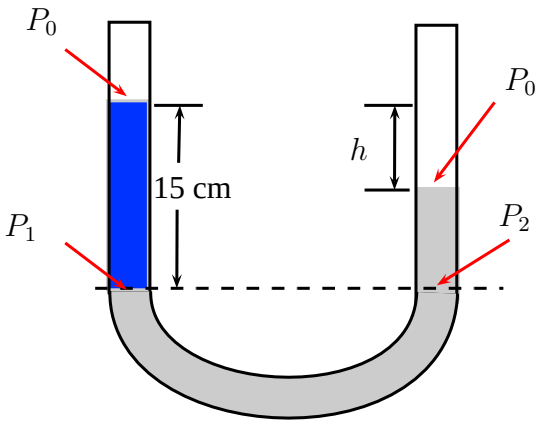
ด้านบนของปรอทไปยังด้านบนของน้ำ

วิธีทำ ความดันเกจที่รอยต่อน้ำกับปรอท คือ

$$P_g = P_1 - P_0 = \rho_w g d$$
$$P_g = (1.0 \times 10^3)(9.8)(0.15) = 1.47 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

จากรูปที่ระดับความลึกเดียวกัน ความดันจะเท่ากันนั่นคือ

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ P_0 + \rho_w g(15) &= P_0 + \rho_{Hg} g(15-h) \\ 15\rho_w g &= (15-h)\rho_{Hg} g \\ h &= 15\frac{(\rho_{Hg} - \rho_w)}{\rho_{Hg}} = 15\frac{(13.6 \times 10^3 - 1.0 \times 10^3)}{13.6 \times 10^3} \\ h &= 13.89 \text{ cm} \end{aligned}$$

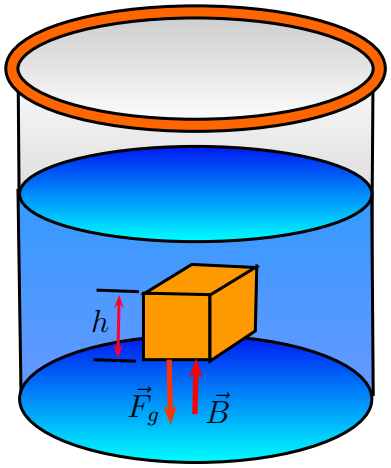


รูปที่ 8.7: หลอดรูปตัวยูปลายเปิดทั้งสองข้างบรรจุน้ำและปรอท

8.4 แรงลอยตัวและหลักของอาร์คีมีดีส

หลักการของอาคีมีดิส (Archimedes's principle) กล่าวไว้ว่า *เมื่อวัตถุจมในของเหลวทั้งก้อนหรือบางส่วนของไหลจะออกแรงดันขึ้นต่อวัตถุเท่ากับน้ำหนักของไหลส่วนที่ถูกแทนที่* เราเรียกแรงดังกล่าวว่า แรงลอยตัว (Buoyant force, B) มีค่าเท่ากับน้ำหนักของเหลวที่ถูก

แทนที่ (F_g) จากรูปที่ 8.8 พิจารณาวัตถุทรงลูกบาศก์ที่มีความหนาแน่น ρ_O จมในของเหลวที่มีความหนาแน่น ρ เมื่อวัตถุจมทั้งก้อนจะเห็นว่าผลต่างของความดันที่ผิวด้านล่างกับผิวด้านบน (ΔP) เท่ากับ ρgh เมื่อ h คือความยาวของลูกบาศก์ และความดันที่ผิวด้านล่างมีขนาดเท่ากับอัตราส่วนของแรงลอยตัว (B) กับพื้นที่ผิว (A)



รูปที่ 8.8: วัตถุทรงลูกบาศก์จมในของเหลว

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{B}{A} = \rho gh \\ B &= (\rho gh)A = \rho gV \\ B &= \rho gV = Mg = F_g \end{aligned} \tag{8.6}$$

เมื่อ V และ M คือ ปริมาตรและมวลของเหลวที่ถูกแทนที่ ในกรณีที่วัตถุจมไปในของเหลวทั้งก้อนจะพบว่าปริมาตรของเหลวที่ถูกแทนที่จะเท่ากับปริมาตรของวัตถุทั้งก้อน นั่นคือทำให้ได้ว่า ขนาดของแรงลอยตัวเท่ากับ ρgV_O เมื่อปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่อย่างอิสระแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุในแนวดิ่งคือ

$$B - F_g = (\rho - \rho_O)V_O g = ma \tag{8.7}$$

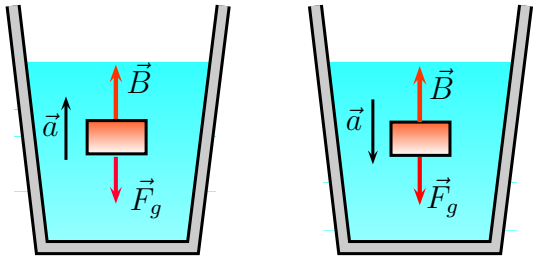
เมื่อ m คือมวลของวัตถุและ a คือความเร่งของวัตถุ จากสมการ 8.7 จะเห็นว่าวัตถุจะลอยขึ้นด้วยความเร่ง a ถ้าหากว่า $\rho > \rho_O$ และวัตถุจะจมลงไปในของเหลวด้วยความเร่งเมื่อ $\rho < \rho_O$ ดังแสดงในรูปที่ 8.9 สำหรับกรณีที่วัตถุลอยในของเหลวซึ่งมีบางส่วนของวัตถุจม

ในของเหลว เมื่อวัตถุอยู่ในสมดุล ดังนั้น

$$\begin{aligned} B &= F_g \\ B &= \rho_f V_f g \\ F_g &= \rho_O V_O g \\ \rho_f V_f g &= \rho_O V_O g \end{aligned}$$

นั่นคือเราจะได้อัตราส่วนระหว่างความหนาแน่นของวัตถุกับความหนาแน่นของของไหลเป็นดังนี้

$$\frac{\rho_O}{\rho_f} = \frac{V_f}{V_O} \tag{8.8}$$



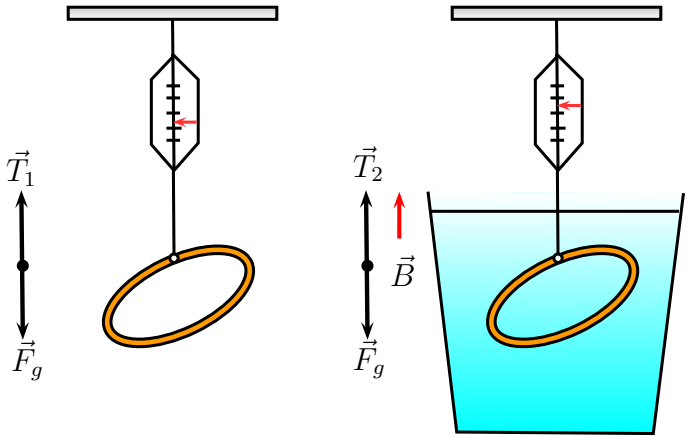
(a) (b)

รูปที่ 8.9: แสดงทิศของความเร่งของวัตถุที่จมในของเหลว (a) วัตถุลอยขึ้น และ (b) วัตถุจมลงด้วยความเร่ง

ตัวอย่างที่ 3 กำไลข้อมือทำด้วยทองคำนำไปชั่งน้ำหนักในอากาศดังแสดงในรูป 8.10(a) อ่านได้ 7.84 นิวตัน และเมื่อนำไปชั่งในน้ำ (รูปที่ 8.10(b)) อ่านค่าได้ 6.86 นิวตัน จงคำนวนหาความหนาแน่นของทองคำ กำหนดให้ความแน่นของน้ำ $\rho_w = 1 \times 10^3$ kg/m^3

วิธีทำ เมื่อชั่งในอากาศนำหนักของกำไลข้อมือ F_g เท่ากับแรงตึงในเส้นเชือก T_1 แต่เมื่อชั่งในน้ำแรงตึงในเส้นเชือก T_2 มีค่าน้อยลงเนื่องจากมีแรงลอยตัวในของเหลว B ช่วยพยุงวัตถุไม่ให้จม นั่นคือแรงลอยตัวจะมีขนาดเป็น

$$B = F_g - T_2 = 7.84 - 6.86 = 0.98 \text{ N}$$



รูปที่ 8.10: น้ำหนักของกำไลข้อมือทองคำ (a) เมื่อชั่งในอากาศ และ (b) เมื่อชั่งในน้ำ

ขนาดของแรงลอยตัวนี้เท่ากับน้ำหนักของน้ำส่วนที่ถูกแทนที่ (ตามหลักของอาคีมีดีส) จากรูปจะเห็นว่า กำข้อมือจมลงในของเหลวทั้งหมด นั่นคือ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} B &= M_w g = \rho_w V_w g = 0.98 \\ V_O &= V_w = \frac{0.98}{\rho_w g} = \frac{0.98}{(1\times 10^3)(9.8)} \\ V_O &= 1.0\times 10^{-4}\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

และจากนิยาม ความหนาแน่นของวัตถุคือ

$$\begin{aligned} \rho_O &= \frac{m_O}{V_O} = \frac{M_O g}{V_O g} = \frac{7.84}{(1.0\times 10^{-4})(9.8)} \\ \rho_O &= 8.0\times 10^3\ \text{kg/m}^3 \end{aligned}$$

ตอบ ความหนาแน่นของกำไลข้อมือที่ทำด้วยทองคำมีค่าเท่ากับ 8.0×10^3 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร

8.5 พลวัติของไหลและสมการความต่อเนื่อง

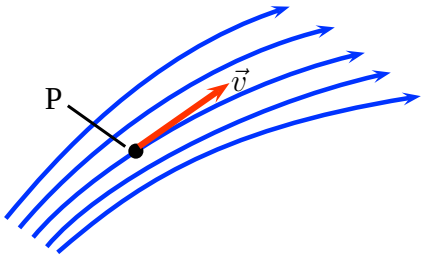
พลวัติของไหล (fluid dynamics) คือการศึกษาของไหลที่กำลังเคลื่อนที่ เช่น การไหลของน้ำในท่อน้ำ การไหลของกระแสเลือดในร่างกาย การไหลของอากาศในท่อ เป็นต้น สำหรับการศึกษานี้เราจะพิจารณาของไหลอุดมคติซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) ของไหลที่บีบอัดไม่ได้ นั่นคือ ความหนาแน่นของไหลไม่เปลี่ยนแปลง

(2) ไม่มีความเสียดทานภายใน ที่เรียกว่า ความหนืด
(3) การไหล (flow) ของของไหลเป็นแบบสม่ำเสมอ

8.5.1 สายกระแส

เส้นทางที่อนุภาคของไหลเคลื่อนที่ภายใต้การไหลที่สม่ำเสมอและเส้นทางดังกล่าวจะต้องไม่ตัดกันเองเราเรียกเส้นทางการไหลดังกล่าวว่า สายกระแส (streamline) ดังแสดงในรูปที่ 8.11 ความเร็วของไหลที่จุดใด ๆบนเส้นสายกระแสจะหาได้จากการลากเส้นสัมผัสที่จุดนั้น ๆ เช่น ที่จุด P

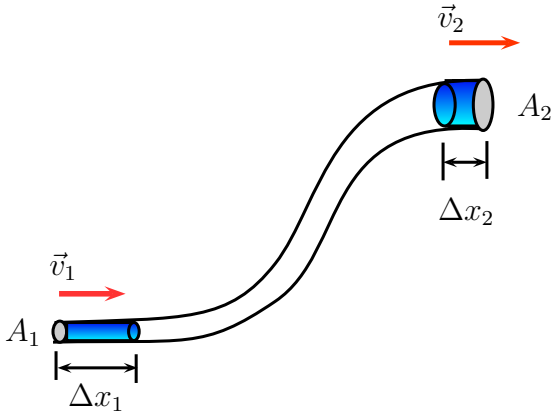


รูปที่ 8.11: สายกระแสของไหล

8.5.2 สมการความต่อเนื่อง

พิจารณาการไหลที่ผ่านพื้นที่ผิวสมมุติ เช่นพื้นที่ A_1 จะก่อเป็นท่อที่เรียกว่าท่อการไหลเมื่อมีการไหลในท่อการไหล มวลของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลง จากรูป 8.12 จะเห็นว่า มวลของไหลที่ไหลเข้า A_1 จะมีค่าเท่ากับมวลของไหลที่ไหลออกที่ A_2 ถ้าให้ m_1 คือมวลที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด A_1 ด้วยอัตราเร็ว v_1 และ ให้ m_2 คือมวลที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด A_2 ด้วยอัตราเร็ว v_2 ในช่วงเวลาเดียวกัน t มวลของไหลทั้งสองด้านเคลื่อนที่ได้ระยะเป็น Δx_1 และΔx_2 ตามลำดับ

$$m_1 = \rho V_1 = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_1 v_1 t$$
$$m_2 = \rho V_2 = \rho A_2 \Delta x_2 = \rho A_2 v_2 t$$



รูปที่ 8.12: การไหลของของไหลในท่อของไหลที่มีพื้นที่หน้าตัดแตกต่างกัน

เนื่องจากของไหลที่ไหลเข้าและที่ไหลออกในช่วงเวลาเดียวกันมีค่าเท่ากันทำให้ได้

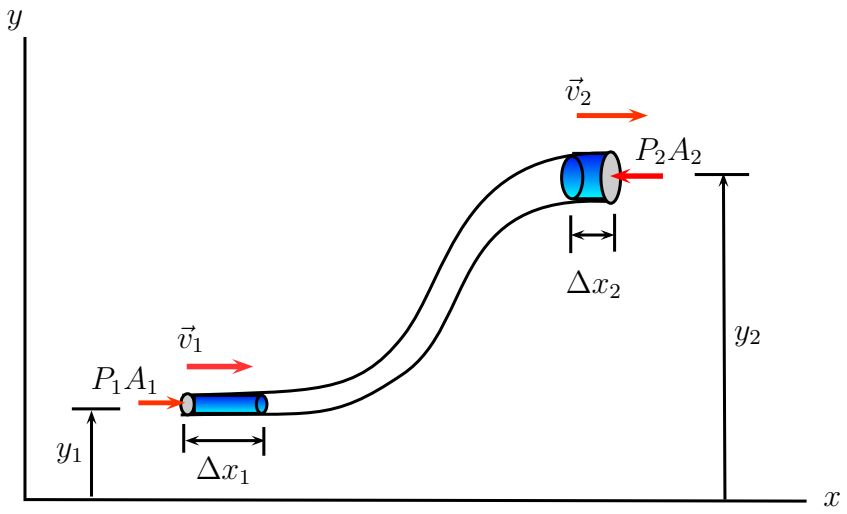
$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ \rho A_1 v_1 t &= \rho A_2 v_2 t \\ A_1 v_1 &= A_2 v_2 \end{aligned} \tag{8.9}$$

สมการที่ 8.9 เรียกว่า *สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation)* และผลคูณของพื้นที่หน้าตัดกับอัตราเร็วของไหล เรียกว่า อัตราการไหล (Volome flow rate) นั่นคือ

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av \quad \text{m}^3/\text{s} \tag{8.10}$$

8.6 สมการแบร์นูลลี

สมการความต่อเนื่องในหัวข้อที่ผ่านมาบอกให้รู้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลของของไหลระหว่างจุดสองจุดที่มีอัตราเร็วและพื้นที่หน้าตัดแตกต่างกัน แต่ยังไม่ได้อธิบายว่าของไหลเกิดการไหลได้อย่างไร ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะมาวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของการไหลที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงความดัน พิจารณาการไหลของของไหลในท่อของไหล โดยปลายท่อของไหลทั้งสองข้างอยู่สูงจากระดับอ้างอิงเป็นระยะ y_1 และ y_2 ตามลำดับ (ดูรูปที่ 8.13) ความดันที่ปลายท่อด้านล่าง P_1 ทำให้เกิดแรงดันที่กระทำต่อพื้นที่หน้าตัด A_1 เป็น $F_1 = P_1 A_1$ และความดันที่ปลายท่อด้านบน P_2 ทำให้เกิดแรงดันกระทำต่อพื้นที่หน้าตัด A_2 เป็น $F_2 =$



รูปที่ 8.13: การไหลของไหลในท่อของไหลที่มีความแตกต่างความดันและความสูง

P_2A_2 ดังนั้นงานสุทธิที่ทำในช่วงเวลา t มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} W_1 &= F_1\Delta x_1 = P_1A_1\Delta x_1 = P_1V \\ W_2 &= -F_2\Delta x_2 = -P_2A_2\Delta x_2 = -P_2V \\ \Delta W &= W_1 - W_2 = (P_1 - P_2)V \end{aligned}$$

เมื่อ V คือ ปริมาตรในท่อของไหลที่ของไหลเคลื่อนที่ไปในช่วงเวลา t เนื่องจากงานสุทธิบางส่วนเปลี่ยนไปเป็นพลังงานจลน์ ΔK และพลังงานศักย์ ΔU โดยที่

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \Delta U &= mgy_2 - mgy_1 \end{aligned}$$

โดยใช้หลักการคงตัวของพลังงานทำให้ว่า

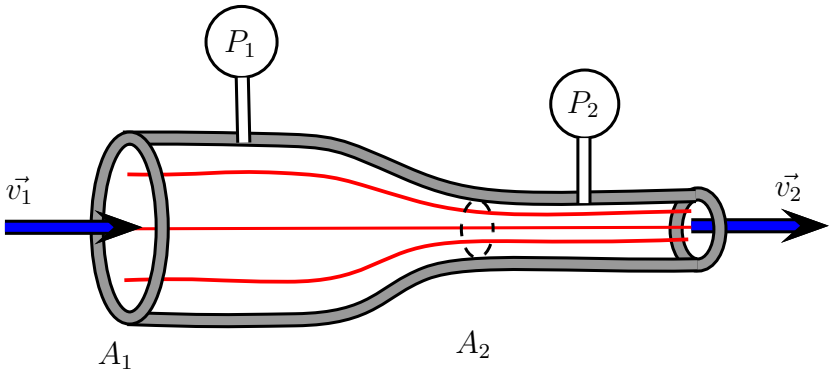
$$\begin{aligned} W &= \Delta K + \Delta U \\ (P_1 - P_2)V &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_2 - mgy_1 \\ P_1 - P_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\right)v_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\right)v_1^2\left(\frac{m}{V}\right)gy_2 - \left(\frac{m}{V}\right)gy_1 \\ P_1 - P_2 &= \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_2 - \rho gy_1 \end{aligned}$$

ทำการจัดรูปสมการใหม่ทำให้ได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดัน อัตราเร็ว และความสูงระหว่างจุดสองจุดในของไหลที่เคลื่อนที่ เราเรียกว่า *สมการแบร์นูลลี (Bernoulli's*

equation) ดังนี้

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \tag{8.11}$$

ตัวอย่างที่ 4 หลอดเวนทูรี (Venturi) ใช้สำหรับวัดอัตราการไหลของไหลดังแสดงในรูปที่ 8.14 ถ้าความดันที่วัดได้ที่จุดที่ 1 และ 2 คือ P_1 และ P_2 พื้นที่หน้าตัดท่อใหญ่และท่อเล็กคือ A_1 และ A_2 จงคำนวณหาอัตราเร็วของไหลที่ท่อเล็ก



รูปที่ 8.14: หลอดเวนทูรีสำหรับวัดอัตราการไหลของของไหล

วิธีทำ เนื่องจากท่อวางอยู่ในระดับเดียวกัน ดังนั้น $y_1 = y_2 = 0$
จากสมการแบร์นูลลีเราจะได้ว่า

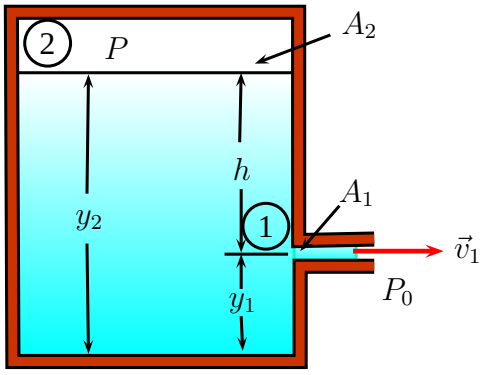
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{1}$$

และจากสมการความต่อเนื่องทำให้ได้ว่า

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$
$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \tag{2}$$

จากสมการ (1) และ (2) ทำให้ได้อัตราเร็วของไหลที่ท่อเล็กเป็นดังนี้

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \rho v_2^2$$
$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \qquad \text{ตอบ}$$



รูปที่ 8.15: ถังบรรจุน้ำและเจาะรูเล็กที่ผิวด้านข้าง

ตัวอย่างที่ 5 ถังน้ำทรงลูกบาศก์บรรจุน้ำจนถึงระดับความสูง y_1 จากพื้น ทำการเจาะรูเล็ก ๆ ที่ระดับความสูง y_2 จากพื้นดังรูป 8.15 รูที่เจาะมีพื้นที่หน้าตัด A_1 และพื้นที่หน้าตัดของถังน้ำ A_2 จงหาอัตราเร็วของน้ำที่พุ่งออกจากรูเล็ก ๆนี้ กำหนดให้ P และP_0 คือความดันเหนือระดับผิวน้ำและความดันบรรยายกาศตามลำดับ

วิธีทำ เนื่องจากพื้นที่ A_2 มีขนาดใหญ่กว่าพื้นที่ A_1 ทำให้ได้ว่าอัตราเร็วของน้ำที่ผิวด้านบนมีค่าน้อยมากอาจจะประมาณเป็นศูนย์ได้ $(v_2 = 0)$
โดยการประยุกต์สมการแบร์นุลลี จะได้ว่า

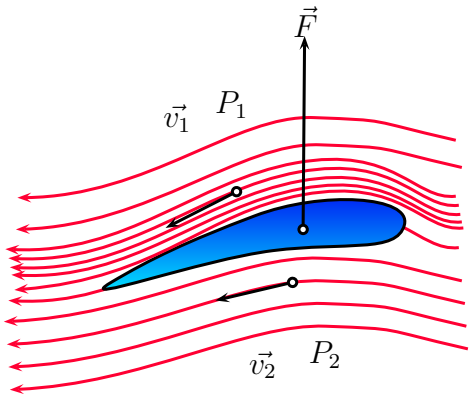
$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2g(y_2 - y_1)}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh} \qquad \text{ตอบ}$$

8.7 แรงยกขึ้นที่ปีกเครื่องบิน

ตัวอย่างหนึ่งของการประยุกต์ใช้สมการของแบร์นุลลี คือ ออกแบบปีกของเครื่องบินเพื่อให้เกิดแรงยกที่ต้องการ เราจะต้องคำนวณหารูปร่างและมุมปะทะอากาศที่เหมาะสม ดังในรูป 8.16 แสดงรูปร่างภาคตัดขวางของปีกเครื่องบิน จะเห็นว่า สายกระแสที่อยู่เหนือปีกจะอยู่ชิดกันมากเมื่อเทียบกับสายกระแสที่อยู่ด้านล่าง นั่นหมายความว่าความเร็วลมที่อยู่เหนือปีก



รูปที่ 8.16: สายกระแสที่ล้อมรอบปีกเครื่องบิน

เครื่องบินสูงกว่าความเร็วที่อยู่ใต้ปีก จากหลักการของแบร์นุลลี จะได้ว่า ความดันของอากาศใต้ปีกสูงกว่าความดันที่อยู่เหนือปีก ดังนั้นแรงลัพธ์ที่กระทำต่อปีกเครื่องบินจึงมีทิศขึ้น นั่นคือ เกิดแรงยกเครื่องบิน จากรูป สมมติให้ $\vec{v_1}$ และ P_1 คือความเร็วและความดันของอากาศที่อยู่เหนือปีกเครื่องบิน และ ให้ $\vec{v_2}$ และ P_2 คือความเร็วและความดันของอากาศที่อยู่ใต้ปีกเครื่องบิน โดยใช้การประมาณว่า ปีกเครื่องบินบางมาก นั่นหมายความว่า ด้านบนและด้านล่างของปีกเครื่องบินอยู่ในระดับเดียวกัน จากสมการแบร์นุลลี จะได้ว่า

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

ถ้าให้ A คือ พื้นที่ใต้ปีกเครื่องบิน จะได้ขนาดของแรงยกขึ้นที่ปีกเครื่องบิน F มีขนาดเท่ากับ

$$F = (P_2 - P_1)A = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)A \tag{8.12}$$

ตัวอย่างที่ 6 เครื่องบินมวล 6,000 กิโลกรัม และมีพื้นที่ใต้ปีก 60 ตารางเมตร ถ้าความดันใต้ปีกเท่ากับ 0.60×10^5 Pa และ บินในแนวระดับที่ความสูง 4,000 เมตร จงหาความดันเหนือปีกเครื่องบิน

วิธีทำ แรงยกของปีกเครื่องบินทั้งสองข้างจะรับน้ำหนักของปีกเครื่องบิน ดังนี้

$$2F = 2(P_2 - P_1)A = Mg$$
$$2 \times (0.60 \times 10^5 - P_1) \times 60 = 6000 \times 9.8$$
$$P_1 = 5.95 \times 10^4 \quad \text{Pa}$$

นั่นคือ ความดันเหนือปีกเครื่องบินเท่ากับ 5.95×10^4 Pa

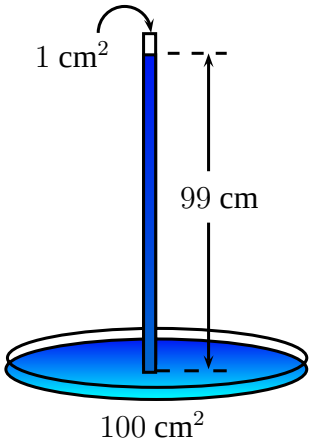
8.8 แบบฝึกหัด

1. เรือดำน้ำอยู่ลึก 80 เมตร จงคำนวณความดันสัมบูรณ์ที่ความลึกนี้เป็นนิวตันต่อตารางเมตร(ตอบ 8.84×10^5 N/m^2)

2. จงหาพื้นที่หน้าตัดของก้อนน้ำแข็งหนา 30 cm ซึ่งสามารถรองรับคนหนัก 784 N ไว้ได้โดยไม่จม ความหนาแน่นของน้ำแข็งเท่ากับ 0.917×10^3 kg/m^3 น้ำแข็งนี้ลอยในน้ำจืด กำหนดให้ความหนาแน่นของน้ำเท่ากับ 1.00×10^3 kg/m^3 (ตอบ 3.2 ตารางเมตร)

3. กระป๋องใบหนึ่งมีพื้นที่หน้าตัด 100 ตารางเซนติเมตร สูง 1 เซนติเมตร ที่ฝาด้านบนเจาะรูแล้วนำหลอดแก้วปลายเปิดซึ่งรูหลอดมีขนาด 1 ตารางเซนติเมตรมาต่อติดอยู่ดังรูป 8.17 เมื่อเติมน้ำลงในกระป๋องจนกระทั่งระดับน้ำในหลอดแก้วสูงจากระดับน้ำในกระป๋อง 99 เซนติเมตร จงหา

   - แรงที่น้ำดันก้นกระป๋องเป็นเท่าไร (ตอบ 98 N)
   - น้ำหนักทั้งหมดของน้ำเป็นเท่าไร (ตอบ 2 N)
   - เหตุใดแรงที่น้ำดันก้นกระป๋องและน้ำหนักของน้ำจึงไม่เท่ากัน



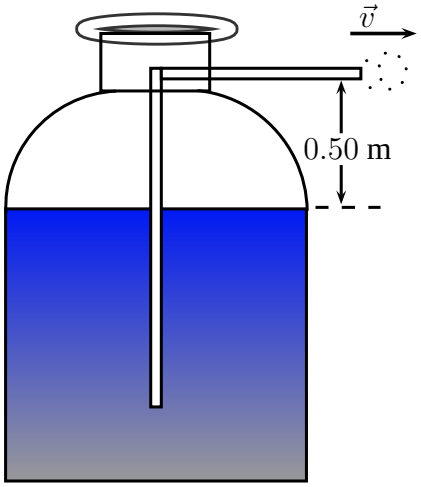
รูปที่ 8.17: โจทย์ปัญหาข้อที่ 3

4. ลูกบาศก์ไม้ตันมีขอบยาวด้านละ 30.0 cm สามารถถูกทำให้จมมิดน้ำได้ ถ้ากดลงด้วยแรง 54.0 N จงหาความหนาแน่นของไม้ (ตอบ 800 kg/m^3)

5. ถังใบหนึ่งมีน้ำและน้ำมันบรรจุอยู่ โดยที่น้ำมันลอยอยู่เหนือผิวน้ำและชั้นน้ำมันหนา 0.18 m ชั้นของน้ำหนา 0.30 m จงหาความดันเกจที่ผิวรอยต่อระหว่างชั้นน้ำมันกับน้ำ

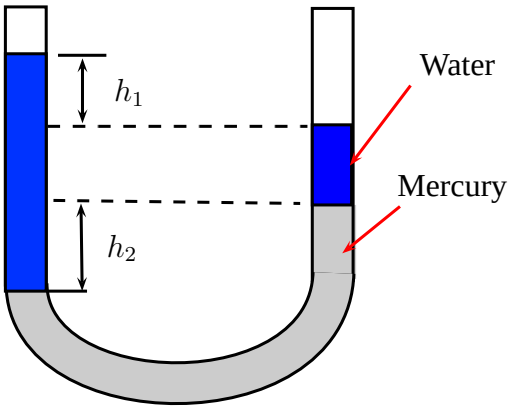
และที่ก้นถัง กำหนดให้ความหนาแน่นของน้ำมันเท่ากับ 0.916 g/cm^3 (ตอบ $1.62 \times 10^3, 4.56 \times 10^3$ N/m^2)

6. น้ำถูกฉีดพ่นออกมา โดยความดันของอากาศภายในเครื่องฉีด ดังรูป 8.18 ความดันเกจของอากาศภายในจะเป็นเท่าใดถ้าน้ำที่พ่นออกมามีอัตราเร็ว 30 m/s เมื่อระดับน้ำอยู่ต่ำกว่าหัวฉีดเป็นระยะ 0.5 m (ตอบ 455 kPa)



รูปที่ 8.18: โจทย์ปัญหาข้อที่ 6

7. หลอดแก้วรูปตัวยู ปลายทั้งสองข้างเปิดสู่บรรยากาศ บรรจุปรอทและน้ำไว้ในหลอด ดังรูปที่ 8.19 ถ้า $h_2 = 1.00$ cm จงหา h_1 มีค่าเท่าใด กำหนดให้ $\rho_{H_2O} = 1$ g/cm^3 และ $\rho_{Hg} = 13.6$ g/cm^3 (ตอบ 12.6 cm)



รูปที่ 8.19: โจทย์ปัญหาข้อที่ 7

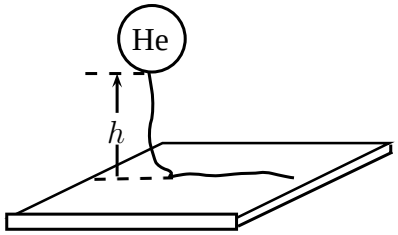
8. อัตราการไหลของน้ำในท่อตามแนวระดับเท่ากับ 2.00 m^3/min จงหาอัตราเร็วของการไหลเมื่อผ่านท่อที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางเป็น 10.0 cm และ 5.0 cm (ตอบ 4.244 m/s และ 16.98 m/s)

9. ถังน้ำปิดฝาสนิทจนอากาศภายนอกซึมเข้าข้างในไม่ได้ ที่ว่างเหนือผิวน้ำที่บรรจุอยู่ในถังมีความดันเป็น 2 เท่าของความดันบรรยากาศ ถ้าเจาะรูที่ข้างถังต่ำกว่าผิวน้ำ 5 เมตร น้ำจะพุ่งออกจากรูด้วยอัตราเร็วเท่าไร (ตอบ 17.4 m/s)

10. ของเหลวความหนาแน่น 1.65 g/cm^3 ไหลผ่านท่อที่วางในแนวระดับสองท่อซึ่งเชื่อมต่อกันท่อแรกมีพื้นที่หน้าตัด 10 cm^2 อัตราการไหลคือ 275 cm/s ความดัน 1.20×10^5 Pa ท่อที่สองมีพื้นที่หน้าตัด 2.50 cm^2 จงคำนวณหาอัตราการไหลและความดันในท่อที่สอง

11. ความหนาแน่นของน้ำแข็งคือ 920 kg/m^3 และความหนาแน่นของน้ำทะเลคือ 1030 kg/m^3 จงคำนวณสัดส่วนของปริมาตรของน้ำแข็งทั้งหมดที่จมลงในน้ำทะเล

12. บอลลูนเป็นทรงกลมรัศมี 0.40 m บรรจุก๊าซฮีเลียมไว้ภายในและผูกด้วยเชือกยาว 20 m มวล 0.50 kg เมื่อปล่อยบอลลูนจะยกเชือกขึ้นไปได้เป็นระยะ h ดังรูปที่ 8.20 จงคำนวณหาค่า h กำหนดให้ $\rho_{air} = 1.29$ kg/m^3 และ $\rho_{He} = 1.79 \times 10^{-1}$ kg/m^3 (ตอบ 11.91 m)



รูปที่ 8.20: โจทย์ปัญหาข้อที่ 12

บทที่ 9

เทอร์โมไดนามิกส์

เนื้อหาในบทนี้จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับพลังงานความร้อนและพลังงานกลหรือพลังงานในรูปอื่น ๆที่มีความสัมพันธ์กันและเชื่อมโยงไปยังสมบัติของสสารที่เกี่ยวข้องกับปริมาณในระดับมหภาค (macroscopic) เช่น อุณหภูมิ ความดัน และ ปริมาตร เป็นต้น การศึกษาในเรื่องเหล่านี้เป็นอีกแขนงหนึ่งของวิชาฟิสิกส์ที่เรียกกันว่า *เทอร์โมไดนามิกส์ (thermodynamics)*

9.1 อุณหภูมิและกฎข้อที่ศูนย์ของเทอร์โมไดนามิกส์

หลักการเกี่ยวกับความร้อนจำเป็นต้องอาศัยนิยาม 2 อย่าง คือ สัมผัสเชิงความร้อน (thermal contract) และสมดุลเชิงความร้อน (thermal equilibrium) ความร้อน (heat) คือ การถ่ายเทของพลังงานจากวัตถุหนึ่งไปสู่อีกวัตถุหนึ่งอันเนื่องมาจากความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิของวัตถุทั้งสอง โดยอาศัยหลักการทั้งสองและนิยามของความร้อนนำมาสู่การตั้งกฎข้อที่ศูนย์ของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่า "*ถ้าวัตถุ A และวัตถุ B อยู่ในสภาวะสมดุลเชิงความร้อนกับวัตถุที่สามคือ C แล้ว วัตถุ A และวัตถุ B จะอยู่ในสมดุลเชิงความร้อนซึ่งกันและกัน*" อุณหภูมิ (temperature, T) สำหรับการวัดในหน่วย SI จะเป็นเคลวิล (K) แต่ก็มีหน่วยวัดอุณหภูมิอื่นอีกที่นิยม เช่น เซลเซียส (°C) และ ฟาเรนไฮน์ (F) ซึ่งหน่วยวัดเหล่านี้มีความสัมพันธ์ดังนี้คือ

$$T_C = T - 273.15 \quad (^\circ\text{C}) \tag{9.1}$$

$$T_F = \frac{9}{5}T_c - 32 \quad (^\circ\text{F}) \tag{9.2}$$

9.2 การขยายตัวเชิงความร้อน

เมื่อสสารได้รับความร้อนจะเกิดการขยายตัวทุกทิศทุกทาง การขยายตัวของวัตถุใด ๆก็ขึ้นอยู่กับสมบัติเฉพาะตัวของสสารนั้นและขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ เพื่อความเข้าใจง่ายลองพิจารณาการขยายตัวเชิงเส้น (linear thermal expansion) ซึ่งสัมประสิทธิ์ของการขยายตัวตามเส้น (linear expansion coefficient, α) มีค่าดังนี้

$$\alpha = \frac{\Delta L/L_i}{\Delta T} \tag{9.3}$$

เมื่อ L_i คือ ความยาวเริ่มต้นที่อุณหภูมิ T_i, ΔL คือ ความยาวที่ยืดออกไปเทียบกับค่าเริ่มต้น และ ΔT คือ อุณหภูมิที่เปลี่ยนไปจากอุณหภูมิเริ่มต้น สมการ 9.3 อาจจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T \tag{9.4}$$

$$L_f - L_i = \alpha L_i (T_f - T_i) \tag{9.5}$$

หน่วยของสัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้น คือ $1/^\circ C$ ในทำนองเดียวกันการพิจารณาการขยายตัวเชิงปริมาตรจะได้ว่า

$$\Delta V = \beta V_i \Delta T \tag{9.6}$$

เมื่อ β คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงปริมาตร เพื่อความเข้าใจมากขึ้นเราพิจารณากล่องสี่เหลี่ยมที่มีขนาดความกว้าง w ยาว l และสูง h จะได้ว่าปริมาตรของกล่องใบนี้ตอนอุณหภูมิเริ่มต้น T_i คือ

$$V_i = lwh$$

ถ้าอุณหภูมิเปลี่ยนเป็น $T_f = T_i + \Delta T$ แล้วปริมาตรก็จะเปลี่ยนเป็น $V_i + \Delta V$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} V_i + \Delta V &= (l + \Delta l)(w + \Delta w)(h + \Delta h) \\ &= (l + \alpha l \Delta T)(w + \alpha w \Delta T)(h + \alpha h \Delta T) \\ &= lwh(1 + \alpha \Delta T)^3 \\ &= V_i[1 + 3\alpha\Delta T + 3(\alpha\Delta T)^2 + (\alpha\Delta T)^3] \\ \frac{\Delta V}{V_i} &= 3\alpha\Delta T + 3(\alpha\Delta T)^2 + (\alpha\Delta T)^3 \end{aligned}$$

โดยใช้การประมาณเนื่องจาก $\alpha\Delta T \ll 1$ ดังนั้นทำให้เราได้

$$\frac{\Delta V}{V_i} \simeq 3\alpha\Delta T \tag{9.7}$$

$$\beta = 3\alpha = \frac{1}{V_i}\frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{9.8}$$

ตัวอย่างที่ 1 เมื่อเจาะรูแผ่นเหล็กเป็นวงกลมให้มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 เซนติเมตร ที่อุณหภูมิ 0°C จงหาขนาดของเส้นผ่าศูนย์กลางวงกลมนี้ที่อุณหภูมิ 30°C เมื่อเหล็กมีสัมประสิทธิ์การขยายตัวตามเส้น $12 \times 10^{-6}\ ^{\circ}\text{C}^{-1}$

วิธีทำ การเพิ่มขนาดของเส้นผ่าศูนย์กลาง คิดเหมือนกับการขยายตัวตามเส้น ตามสมการ

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T$$

เมื่อ $L_i = 6$ cm $\Delta T = T_f - T_i = 30 - 0 = 30^{\circ}\text{C}$ และ $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ ^{\circ}\text{C}^{-1}$ แทนลงในสมการจะได้

$$\Delta L = (12 \times 10^{-6})(6)(30) = 0.00216 \qquad \text{cm}$$

ดังนั้นเส้นผ่าศูนย์กลางจึงมีความยาวเท่ากับ $L_f = L_i + \Delta L = 6 + 0.00216 = 6.00216$ cm

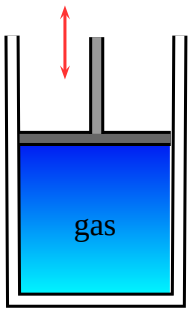
9.3 การบรรยายในระดับมหภาคเกี่ยวกับกาซอุดมคติ (ideal gas)

สำหรับในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสมบัติของกาซมวล m ที่บรรจุในภาชนะปริมาตร V ที่ความดัน P และอุณหภูมิ T ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเหล่านี้นำไปสู่สมการที่ใช้อธิบายสมบัติของกาซ ที่เราเรียกว่า สมการสถานะ (equation of state) อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปแล้วสมการสถานะมีความสลับซับซ้อนมาก แต่ถ้าเราพิจารณากาซที่ความดันต่ำมาก ๆ (ความหนาแน่นน้อย) สมการสถานะของกาซก็จะหาได้โดยง่าย กาซที่มีความหนาแน่นต่ำดังกล่าวอาจจะกล่าวได้ว่าเป็น *กาซอุดมคติ*

เพื่อความสะดวกเราจะแสดงปริมาณของกาซในภาชนะที่มีปริมาตรที่กำหนดให้ในเทอมของจำนวนโมล (mole, n) โดยที่สสารใด ๆจำนวน 1 โมลจะมีจำนวนเท่าเลขอาโวกาโดร (Avogagro's number, N_A) ซึ่ง $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ อนุภาค (อะตอมหรือโมเลกุล) ดังนั้นสสารจำนวน n โมลจึงเกี่ยวพันกับมวลของสสารตามสมการนี้

$$n = \frac{m}{M} \tag{9.9}$$

โดยที่ M คือ มวลโมลาร์ (molar mass) ของสสาร โดยทั่วไปมวล 1 โมล ของธาตุใด ๆ จะมีค่าเท่ากับเลขอะตอม (atomic mass) ของธาตุนั้นในหน่วยกรัม เช่น เหล็ก 1 โมล มีมวลเท่า



รูปที่ 9.1: กาซอุดมคติบรรจุในกระบอกสูบที่มีลูกสูบสามารถเคลื่อนที่ได้

กับ 55.85 กรัม (เลขอะตอมของเหล็ก คือ 55.85 u) ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า มวลโมลาร์ของเหล็ก คือ 55.85 g/mol นั่นเอง นั่นคือ มวลโมลาร์จะแสดงในหน่วยของ กรัมต่อโมล (g/mol) พิจารณากาซที่บรรจุในกระบอกลูกสูบที่สามารถเปลี่ยนแปลงปริมาตรของลูกสูบได้โดยการเคลื่อนที่เข้าและออกของลูกสูบ และมวลของกาซที่อยู่ภายในมีค่าคงที่ ดังแสดงในรูป 9.1 จากการทดลองทำให้ได้ข้อสรุปดังนี้

- เมื่อให้กาซมีอุณหภูมิคงที่ (T คงที่) ความดัน (P) ของกาซจะแปรผกผันกับปริมาตร (V) นั่นคือ

  $$P \propto \frac{1}{V} \qquad \text{เมื่อ T คงที่}$$

  หรืออาจจะใหม่ได้ดังนี้

  $$P_i V_i = P_f V_f \tag{9.10}$$

  สมการ 9.10 เรียกว่ากฎของบอยส์ (Boyle's law)

- เมื่อให้ความดันของกาซคงที่ ปริมาตรของกาซจะแปรผันโดยตรงกับอุณหภูมิ นั่นคือ

  $$V \propto T \qquad \text{เมื่อ P คงที่}$$
  $$\frac{V_i}{V_f} = \frac{T_i}{T_f} \tag{9.11}$$

  สมการที่ 9.11 เรียกว่า กฎของชาร์ล (Charles's law)

เมื่อรวมกฎทั้งสองเข้าด้วยกันทำเราได้ความสัมพันธ์ดังนี้คือ

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \tag{9.12}$$

จากสมการ 9.12 จะพบว่าอัตราส่วนทั้งสองข้างต้องเท่ากันและเท่ากับค่าคงที่ C และจากการทดลองได้พิสูจน์ให้เห็นแล้วว่าค่าคงที่ $C = nR$ เมื่อ R เรียกว่า ค่าคงตัวของกาซสากล (universal gas constant) ซึ่งเป็นค่าเดียวกันสำหรับกาซทุกชนิด ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการสถานะสำหรับกาซได้ดังนี้

$$PV = nRT \tag{9.13}$$

สมการ 9.13 รู้จักกันดีว่าคือ *กฎของกาซอุดมคติ* และค่า R ในระบบ SI มีค่าเป็น

$$R = 8.315 \qquad \text{J/mol.K}$$

นอกจากนี้กฎของกาซสามารถเขียนในเทอมของจำนวนโมเลกุลทั้งหมด N เนื่องจากว่าจำนวนโมเลกุลทั้งหมดมีค่าเท่ากับผลคูณของจำนวนโมล (n) กับเลขอาโวกาโดร (N_A) ดังนั้นสมการ 9.13 เขียนใหม่ได้เป็น

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A}RT$$
$$PV = Nk_BT \tag{9.14}$$

เมื่อ k_B คือ ค่าคงที่ของโบลต์ซมันท์ (Boltzmann's constant) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \qquad \text{J/K}$$

ปริมาณ P, V และ T เราเรียกว่า ตัวแปรทางเทอร์โมไดนามิกส์ (thermodynamic variables) ของกาซอุดมคติ ถ้าเราทราบสมการสถานะแล้วเราสามารถแสดงตัวแปรหนึ่งในเทอมของตัวแปรอีกสองตัวนั้นได้

ตัวอย่างที่ 2 กาซอุดมคติปริมาตร 100 cm^3 ที่อุณหภูมิ 20°C และความดัน 100 Pa จงหาจำนวนโมลของกาซที่บรรจุอยู่ในภาชนะนี้

วิธีทำ จากกฎของกาซอุดมคติ $PV = nRT$ และ $T = 20°\text{C} = 293$ K ดังนั้นจะได้ว่า

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{(100)\,\text{Pa}\,(10^{-4}\,\text{m}^3)}{(8.315\,\text{J/mol.K})(293\,\text{K})}$$
$$n = 4.10 \times 10^{-6} \qquad \text{mol}$$

9.4 ความร้อนและพลังงานภายใน

ความร้อน (heat) คือพลังงานรูปแบบหนึ่งซึ่งเกิดจากการถ่ายเทพลังงานข้ามขอบเขตของระบบ (system) กับสิ่งแวดล้อม (surrounding) คำว่า ระบบ ในที่นี้หมายถึง สิ่งที่เราสนใจ

และสิ่งแวดล้อม หมายถึง สิ่งที่เราไม่ต้องการศึกษาที่อยู่รอบ ๆระบบนั้น หน่วยที่ใช้ในการวัดความร้อนที่ไหลเข้าหรือออกจากระบบ คือ แคลอรี(caloric) โดยที่
ความร้อน 1 cal คือ ปริมาณพลังงานที่จำเป็นในการทำให้อุณหภูมิของน้ำ 1 กรัม เปลี่ยนไป 1 องศาเซลเซียสนั่นคือ 1 cal = 4.186 J
พลังงานภายใน (internal energy, U**)** คือ พลังงานของอะตอมหรือโมเลกุลซึ่งเกี่ยวข้องกับพลังงานจลน์และพลังงานศักย์

9.4.1 ความจุความร้อน

ความจุความร้อน (heat capacity, C) คือ ปริมาณความร้อนที่จำต้องใช้ในการเพิ่มอุณหภูมิของสสารให้เปลี่ยนไป 1 °C นั่นคือ เราจะได้

$$Q = C\Delta T \tag{9.15}$$

เมื่อ Q คือ ปริมาณความร้อน และ ΔT คือ อุณหภูมิที่เปลี่ยนไป ความจุความร้อนต่อหนึ่งหน่วยมวล เรียกว่า ความร้อนจำเพาะ (specific heat, c) เขียนแทนด้วย

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\Delta T} \tag{9.16}$$

จากนิยามดังกล่าว ทำให้เราสามารถเขียนสมการแสดงปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทเข้าไปในสสารมวล m เพื่อทำให้มีอุณหภูมิเปลี่ยนไปเป็น ΔT ได้ดังนี้

$$Q = mc\Delta T \tag{9.17}$$

สสารที่มีค่าความจุความร้อนสูง แสดงว่าการที่จะทำให้อุณหภูมิของสสารนั้นเพิ่มขึ้นจากเดิมนั้นจำต้องใช้พลังงานมากขึ้นด้วยตัวอย่างเช่น พลังงานที่ต้องใช้ในการเพิ่มอุณภูมิของน้ำมวล 0.500 kg จากเดิมเป็น 3.00°C มีค่าเท่ากับ $(0.500\text{ kg})(4186\text{ K/kg}\cdot^\circ\text{C})(3.00^\circ) = 6.23\times10^3$ J ข้อสังเกตุ เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น Q และ ΔT จะมีค่าเป็นบวก ดังนั้นพลังงานจะไหลเข้าสู่ระบบ ในขณะที่อุณหภูมิลดลง Q และ ΔT จะมีค่าเป็นลบ ดังนั้นพลังงานจะไหลออกจากระบบ

9.4.2 ความร้อนแฝง

เมื่อมีการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่สสารและอุณหภูมิของสสารนั้นไม่เปลี่ยนแปลงแต่สสารนั้นมีการเปลี่ยนสถานะหนึ่งไปสู่อีกสถานะหนึ่ง เช่น จากสถานะของแข็ง (solid) เปลี่ยนไปเป็นของเหลว (liquid) ซึ่งเรียกว่าการหลอมละลาย (melting) หรือ การเปลี่ยนสถานะจาก

ของเหลวไปเป็นกาซ (gas) ซึ่งเรียกว่า การเดือด (boiling) ในการเปลี่ยนสถานะจะเกี่ยวข้องกับพลังงานภายในระบบและปริมาณความร้อนที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะของสสารนี้ เราเรียกว่า ความร้อนแฝง (Latent heat, L) โดยที่

$$L = \frac{Q}{m} \tag{9.18}$$

ดังนั้นเราจะได้ความร้อนแฝงของการเปลี่ยนสถานะมีค่าเป็น

$$Q = mL \tag{9.19}$$

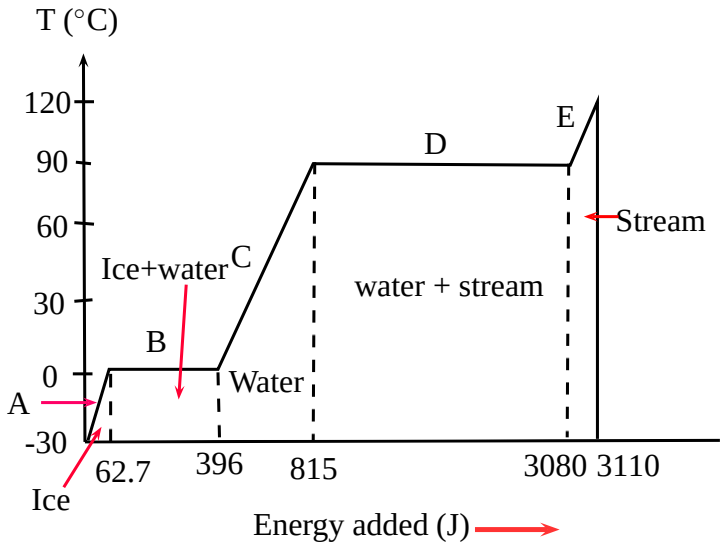
เมื่อ Q คือ ปริมาณความร้อนที่สสารได้รับ และ m คือ มวลของสสาร

เราสามารถบรรยายการเปลี่ยนสถานะ (phase change) ของสสารในแง่ของการจัดเรียงตัวของโมเลกุล เมื่อสสารนั้นได้รับพลังงานเข้ามาหรือสสารนั้นคายพลังงานออกมาสู่สิ่งแวดล้อม สสารทุกชนิดจะประกอบด้วยอะตอม และสสารในแต่ละโมเลกุลก็จะเกิดจากการรวมตัวของอะตอม ดังนั้นการเปลี่ยนสถานะของสสารใด ๆจึงเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างภายในของการจัดเรียงอะตอม เช่น พิจารณาการเปลี่ยนสถานะจากเหลวไปเป็นกาซ (liquid-gas phase) ของน้ำ โมเลกุลของของเหลวอยู่ใกล้ชิดกันมาก และระหว่างโมเลกุลของของเหลวมีค่าแข็งแรงกว่าแรงระหว่างโมเลกุลของน้ำในสถานะกาซเนื่องจากมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมากกว่าของของเหลว ผลที่ตามมาก็คือในการในการแยกโมเลกุลของน้ำให้ออกห่างจากกันจำเป็นต้องใช้พลังงานที่มากขึ้นเพื่อให้เอาชนะแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุล ปริมาณพลังงานที่ใช้ต่อหนึ่งหน่วยมวลเพื่อทำให้ของเหลวเปลี่ยนสถานะกลายเป็นไอ เราจึงเรียกว่า *ความร้อนแฝงของการกลายเป็นไอ (latent heat of vaporization)*

ในทำนองเดียวกัน สำหรับของแข็งที่มีโมเลกุลอยู่ชิดกันมาก ๆและยึดจับเป็นโครงข่าย เมื่อเพิ่มพลังงานให้กับสสารนั้น โมเลกุลแต่ละตัวก็จะสั่นรอบ ๆตำแหน่งสมดุลด้วยอัมปลิจูดที่เพิ่มขึ้นตามการเพิ่มของอุณหภูมิ ถ้าหากว่าอัมปลิจูดการสั่นสูงมากเพียงพอที่จะทำให้พันธะระหว่างโมเลกุล (molecular bonding) นั่นถูกทำลายลง ส่งผลทำให้โมเลกุลแต่ละอันเคลื่อนที่ไปอยู่ที่ตำแหน่งใหม่และมีระยะห่างระหว่างโมเลกันมากขึ้น ที่จุดนี้เองเรียกว่า จุดหลอมเหลวของของแข็ง และพลังงานที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะจากของแข็งเป็นของเหลวต่อหนึ่งหน่วยมวล เรียกว่า *ความร้อนแฝงของการหลอมเหลว (latent heat of fusion)*

ตัวอย่างที่ 3 จงคำนวณหาค่าความร้อนแฝงที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะของน้ำแข็งมวล 1 kg ที่อุณหภูมิ -30° ไปเป็นไอน้ำที่อุณหภูมิ 120° การเปลี่ยนสถานะของน้ำแข็งแสดงดังรูปที่ 9.2

วิธีทำ จากรูปจะแบ่งช่วงการเปลี่ยนสถานะของน้ำแข็งไปเป็นไอน้ำออกเป็น 5 ช่วง คือ A, B, C, D และ E ตามลำดับ ในแต่ละช่วงเราสามารถคำนวณหาค่าความร้อนที่ใช้ในการ



รูปที่ 9.2: การเปลี่ยนสถานะของน้ำแข็งจนกลายเป็นไอน้ำ

เปลี่ยนแปลงดังนี้คือ

Part A อุณหภูมิของน้ำแข็งเพิ่มขึ้นจาก $-30°$C ไปเป็น $0°$C ในช่วงนี้ค่าความจุความร้อนของน้ำแข็งคือ 2090 J/kg.°C ดังนั้นปริมาณความร้อนที่ใช้ในการเพิ่มอุณหภูมิหาได้เป็น

$$Q = m_i c_i \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2090\text{J/kg.°C})(30.0°\text{C}) = 62.7 \quad \text{J}$$

Part B ในช่วงนี้น้ำแข็งเริ่มเปลี่ยนสถานะกลายเป็นน้ำอุณหภูมิจะคงที่ ค่าความร้อนแฝงของการเปลี่ยนสถานะจากของแข็งไปเป็นของเหลว (Latent heat of fusion, L_f) สำหรับน้ำคือ 3.33×10^5 J/kg ดังนั้นปริมาณความร้อนที่ใช้หาได้ดังนี้

$$Q = mL_f = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(3.33 \times 10^5\ \text{J/kg}) = 333 \quad \text{J}$$

Part C อุณภูมิของน้ำจะเพิ่มขึ้นจาก 0.0 °C ไปเป็น 100.0 °C ค่าความจุของน้ำในช่วงนี้คือ 4.19×10^3 J/kg.°C ดังนั้นปริมาณความร้อนที่ใช้คือ

$$Q = m_w c_w \Delta T = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(4.19 \times 10^3\ \text{J/kg.°C})(100.0°\text{C}) = 419 \quad \text{J}$$

Part D น้ำเปลี่ยนสถานะกลายเป็นไอ ค่าความร้อนแฝงของการกลายเป็นไอ (Latent heat of vaporization, L_v) คือ 2.26×10^6 J/kg ดังนั้นปริมาณความร้อนที่ใช้ในช่วงนี้คือ

$$Q = mL_v = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2.26 \times 10^6\ \text{J/kg}) = 2.26 \times 10^3 \quad \text{J}$$

Part E น้ำกลายไอน้ำที่อุณภูมิ 120 °C ค่าความจุของน้ำในช่วงกลายเป็นไอคือ 2.01×10^3 J/kg.°C ดังนั้นปริมาณความร้อนที่ใช้ในการเพิ่มอุณหภูมิของไอน้ำที่ 100.0°C ไปเป็นไอน้ำที่ 120.0°C คือ

$$Q = m_i c_i \Delta T = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(2.01 \times 10^6 \text{ J/kg.°C})(20.0°\text{C}) = 40.2 \quad \text{J}$$

ดังนั้นปริมาณความร้อนทั้งหมดที่ใช้ในการทำให้น้ำแข็งที่อุณหภูมิ -30.0 °C กลายเป็นไอน้ำที่อุณหภูมิ 120.0 °C มีค่าเท่ากับ 62.7 J+333 J+419 J+2.26×10^6 J+40.2 J = 3.11×10^3 J

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> มวลของไอน้ำในตอนเริ่มต้นที่อุณหภูมิ 130°C มีค่าเป็นเท่าใดเพื่อทำให้น้ำอุ่นจำนวน 200 g ที่บรรจุอยู่ในแก้วที่มีมวล 100 g มีอุณภูมิเปลี่ยนจาก 20.0°C เป็น 50.0°C กำหนดให้ ความร้อนแฝงของการกลายเป็นไอของน้ำ $= 2.26 \times 10^6$ J/kg ความจุความร้อนจำเพาะของน้ำ $= 4.19 \times 10^3$ J/kg.°C ความจุความร้อนจำเพาะของไอน้ำ $= 2.10 \times 10^3$ J/kg.°C และความ

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากไอน้ำสูญเสียพลังงานในสามขั้นตอนดังนี้
ขั้นที่ 1 ไอน้ำทำให้เย็นลงที่อุณหภูมิ 100° พลังงานที่ถ่ายเทในขั้นตอนนี้คือ

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_s c_s \Delta T = m_s(2.01 \times 10^3 \text{ J/kg.°C})(-30.0°\text{C}) \\ &= -m_s(6.03 \times 10^4 \text{ J/kg}) \end{aligned}$$

เมื่อ m_s คือ มวลของไอน้ำที่ไม่ทราบค่า
ขั้นที่ 2 ไอน้ำเปลี่ยนเป็นน้ำ เพื่อหาพลังงานที่ถ่ายเทในการเปลี่ยนสถานะนี้ เราใช้สมการ $Q = -mL_v$ เครื่องลบ แสดงให้เห็นว่าพลังงานไหลออกจากไอน้ำ นั่นคือ

$$Q_2 = -m_s(2.26 \times 10^6 \text{ J/kg})$$

ขั้นที่ 3 อุณหภูมิของน้ำเพิ่มขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิของไอน้ำลดลง 50°C พลังงานที่ใช้ในขั้นตอนนี้คือ

$$\begin{aligned} Q_3 &= m_s c_w \Delta T = m_s(4.19 \times 10^3 \text{ J/kg.°C})(-50.0°\text{C}) \\ &= -m_s(2.09 \times 10^5 \text{ J/kg}) \end{aligned}$$

พลังงานที่ถ่ายเททั้งหมดในทั้งสามขั้นตอนมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} Q_{hot} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= -m_s(6.03 \times 10^4 + 2.26 \times 10^6 + 2.09 \times 10^5) \text{ J/kg} \\ &= -m_s(2.53 \times 10^6) \text{ J/kg} \end{aligned}$$

พิจารณาในส่วนของและแก้วที่มีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น พลังงานที่ได้รับหาได้จาก

$$\begin{aligned} Q_{cold} &= (0.200\text{ kg})(4.19\times10^3\text{ J/kg.°C})(30.0°\text{C}) + (0.100\text{ kg})(837\text{ J/kg.°C})(30.0°\text{C}) \\ &= 2.77\times10^4\text{ J} \end{aligned}$$

เนื่องจากพลังงานที่ออกจากไอน้ำเท่ากับพลังงานที่ไหลเข้าในน้ำกับแก้วน้ำ นั่นคือจะได้

$$\begin{aligned} Q_{cold} &= -Q_{hot} \\ 2.77\times10^4\text{ J} &= -[-m_s(2.53\times10^6\text{ J/kg})] \\ m_s &= 1.09\times10^{-2}\text{ kg} = 10.9\quad\text{g} \end{aligned}$$

9.5 งานและความร้อนในกระบวนการเทอร์โมไดนามิกส์

ในวิชาเทอร์โมไดนามิกส์ สถานะ (state) ของสสารจะระบุด้วยตัวแปรสถานะ เช่น ปริมาตร (Volume, V) ความดัน(Pressure, P) อุณหภูมิ (Temperature, T) และพลังงานภายใน (Internal Energy, ΔE_{int}) จำนวนตัวแปรสถานะที่จำเป็นต้องใช้ในการวิเคราะห์สถานะของระบบใด ๆนั้นก็ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของระบบนั้น สำหรับสสารที่เป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous system) เช่น กาซบรรจุในภาชนะที่เป็นชนิดเดียวกันโดยปกติตัวแปรสถานะเพียงสองตัวแปรก็เพียงพอที่จะอธิบายระบบนี้

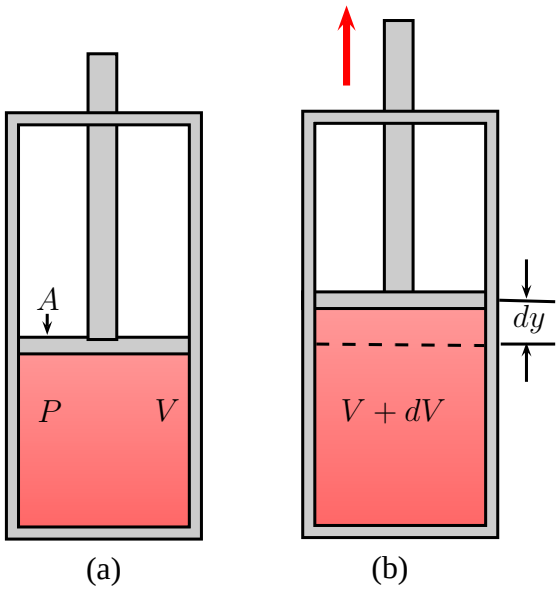
เรามาพิจารณาระบบของกาซที่บรรจุในภาชนะรูปทรงกระบอกที่มีลูกสูบที่สามารถเคลื่อนที่ได้ดังรูป 9.3(a) ที่มีพื้นที่หน้าตัดของฝาลูกสูบเป็น A ตอนเริ่มต้นภายในกระบอกสูบมีความดัน P ปริมาตร V เมื่อกาซขยายตัวเกิดแรงดันลูกสูบให้เคลื่อนที่ขึ้นไปอย่างช้า ๆโดยที่ระบบยังคงอยู่ในสมดุลเชิงความร้อนตลอดเวลา ได้ระยะ dy ทำปริมาตรภายในเพิ่มขึ้นเป็น $V + dV$ ดังรูป 9.3(b) ดังนั้นงานที่กาซกระทำต่อฝาลูกสูบคือ

$$dW = Fdy = PAdy = PdV \tag{9.20}$$

งานเนื่องจากการขยายตัวมีค่าเป็นบวกส่วนงานเนื่องจากการหดตัวมีค่าเป็นลบ ในทางเทอร์โมไดนามิกส์ งานเป็นบวก หมายถึงพลังงานที่ถ่ายเทออกจากระบบ ดังนั้นงานที่ได้จากการขยายตัวของกาซจากปริมาตร V_i ไปเป็นปริมาตร V_f คือ

$$W = \int_{V_i}^{V_f} PdV \tag{9.21}$$

ในการเปลี่ยนแปลงของระบบดังกล่าวจากสถานะหนึ่งไปสู่อีกสถานะหนึ่งงานที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นกับจุดสุดท้ายและขึ้นอยู่กับเส้นทางของการเปลี่ยนแปลงด้วยดังจะเห็น

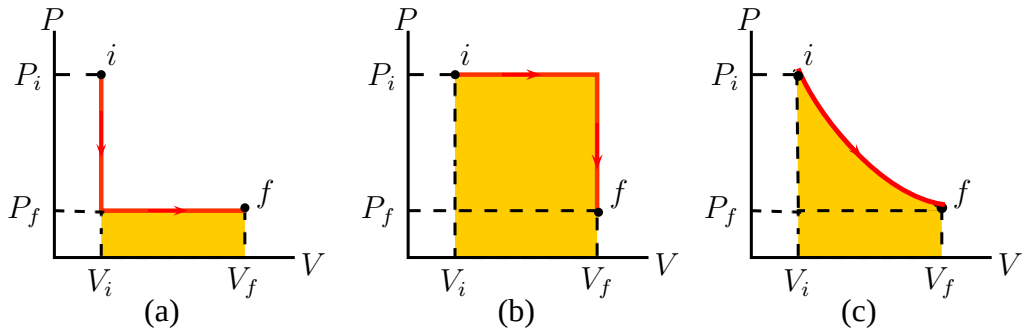


รูปที่ 9.3: กาซบรรจุในกระบอกสูบที่มีลูกสูบสามารถเคลื่อนที่ได้

ได้จากรูปที่ 9.4(a)-(c) จะเห็นว่างานที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนสถานะจากเริ่มต้นไปยังสถานะสุดท้ายตามเส้นทางแตกต่างกันทำให้ได้งานที่แตกต่างกันด้วยและงานดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของการเปลี่ยนสถานะตามเส้นทางนั้น ๆ

9.6 กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์

กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อน (Q) งาน (W) และพลังงานภายในระบบ (E_{int}) เนื่องจากการถ่ายเทพลังงานระหว่างระบบและสิ่งแวดล้อม



รูปที่ 9.4: งานที่ทำโดยกาซชนิดหนึ่งจากการเปลี่ยนสถานะเริ่มต้นไปยังสถานะสุดท้ายที่ขึ้นอยู่กับเส้นทาง

การเปลี่ยนแปลงของพลังงานภายในระบบ (ΔE_{int}) มีค่าเท่ากับผลต่างของความร้อนและงานที่เกิดขึ้น

$$\Delta E_{int} = Q - W \tag{9.22}$$

ถ้า Q มีค่าเป็นบวกหมายถึงพลังงานเข้าสู่ระบบหรือระบบดูดความร้อน แต่ถ้า Q เป็นลบหมายถึงพลังงานออกจากระบบหรือระบบคายความร้อน ส่วน W มีค่าเป็นบวกหมายถึงระบบทำงานแต่ถ้าW เป็นลบหมายถึงสิ่งแวดล้อมทำงานพิจารณาระบบปิด (isolated system) ซึ่งเป็นระบบที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนพลังงานกับสิ่งแวดล้อมจากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ทำให้ได้ว่า $Q = W = 0$ ดังนั้น $\Delta E_{int} = 0$ ด้วย นั่นหมายความว่าสำหรับระบบปิดใด ๆ พลังงานภายในระบบจะมีค่าคงที่

กรณีระบบที่ไม่ใช่ระบบปิด พลังงานมีการแลกเปลี่ยนระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อม และมีการเปลี่ยนแปลงตามกระบวนการครบรอบ (cyclic process) ซึ่งเป็นกระบวนการที่จุดเริ่มต้นกับจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกันนั่นคือในกรณีการเปลี่ยนแปลงของพลังงานภายในระบบมีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากความร้อนที่เข้าสู่ระบบจะเท่ากับงานที่ระบบทำต่อสิ่งแวดล้อม

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{และ} \quad Q = W$$

จากแผนภาพ PV ในรูป 9.4 จะเห็นว่าสำหรับกระบวนการครบรอบ งานสุทธิที่ทำโดยระบบในหนึ่งรอบเท่ากับพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นทางของการเปลี่ยนแปลงสถานะ กระบวนการทางเทอร์โมไดนามิกส์ที่สำคัญประกอบด้วย

- กระบวนการ Adiabatic คือ กระบวนการที่ไม่มีการส่งผ่านความร้อนเข้าหรือออกจากระบบขณะที่มีการเปลี่ยนสถานะหนึ่งไปสู่อีกสถานะหนึ่ง นั่นคือ $Q = 0$ โดยกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ทำให้ได้ว่า

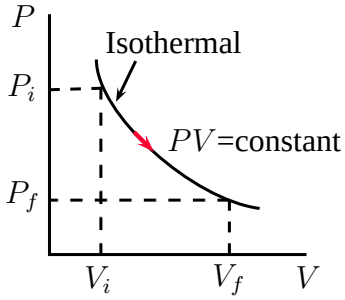
$$\Delta E_{int} = -W \quad \text{และ} \quad Q = 0$$

- กระบวนการ Isobaric คือ กระบวนการที่ระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้นไปยังสถานะสุดท้ายภายใต้ความดันคงที่ดังนั้นงานที่ได้จากกระบวนการนี้คือ

$$W = P(V_f - V_i)$$

- กระบวนการ Isovolumetric คือกระบวนการเปลี่ยนสถานะจากเริ่มต้นไปยังสถานะสุดท้ายภายใต้ปริมาตรที่คงที่ นั่นคือ

$$\Delta E_{int} = Q \quad \text{และ} \quad W = 0$$



รูปที่ 9.5: การขยายตัวของกาซอุดมคติผ่านกระบวนการ Isothermal

- กระบวนการ Isothermal คือ กระบวนการที่ระบบเปลี่ยนสถานะหนึ่งไปสู่อีกสถานะภายใต้อุณหภูมิคงที่ ทำให้พลังงานภายในระบบไม่เปลี่ยนแลง นั่นคือ

$$Q = W \quad \text{และ} \quad \Delta E_{int} = 0$$

พิจารณาการขยายตัวแบบ Isothermal ของกาซอุดมคติ ดังรูป 9.5 สำหรับกาซอุดมคติสมการสถานะของกาซ คือ

$$PV = nRT \tag{9.23}$$

เมื่อ $R = 8.315$ J/mol.K $n = \frac{m}{M}$ คือ จำนวนโมลของสสาร m คือ มวลของสสาร และ M คือมวลโมเลกุลของสสาร เช่นโมเลกุลของออกซิเจน (O_2) มีค่าเท่ากับ 32 g/mol เป็นต้น นอกจากนี้สมการสถานะของกาซอุดมคติอาจจะเขียนในอีกรูปแบบได้เป็น

$$PV = Nk_BT \tag{9.24}$$

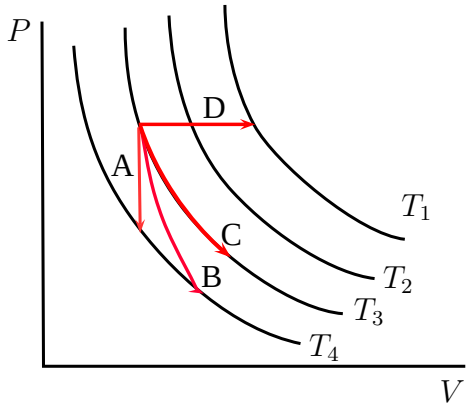
เมื่อ N คือ จำนวนโมเลกุลทั้งหมด N_A คือ Avogadro's number ซึ่งมีค่าเท่ากับ 6.02×10^{23} โมเลกุล และ $k_B = \frac{R}{N_A}$ คือค่าคงที่ของ Boltzmann มีค่าเท่ากับ 1.38×10^{-23} J/K

จากกราฟ PV ในรูป 9.5 งานที่ระบบทำจากการเปลี่ยนสถานะ i ไปสู่สถานะ f ภายใต้อุณหภูมิคงที่คือ

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_i}^{V_f} PdV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV \\ &= nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \\ W &= nRT \ln(\frac{V_f}{V_i}) \end{aligned} \tag{9.25}$$

<u>คำถาม?</u> ในรูปที่ 9.6 ซึ่งแสดงกราฟการเปลี่ยนแปลงสถานะตามกระบวนการของเทอร์โมไดนามิกส์แบบต่าง ๆ ตามเส้นทาง A, B, C และ D ตามลำดับ ให้ระบุว่าเส้นทางแต่ละเส้นว่า

มีกระบวนทางเทอร์โมไดนามิกส์อะไรบ้าง



รูปที่ 9.6: กราฟการเปลี่ยนสถานะผ่านทางกระบวนการเทอร์โมไดนามิกส์ กราฟแต่ละเส้นจะสัมพันธ์กับอุณหภูมิแต่ละค่า

ตัวอย่างที่ 5 กาซอุดมคติปริมาณ 1 โมล ถูกเก็บไว้ที่อุณหภูมิ 0.0°C ขยายตัวจากปริมาตร 3.0 ลิตร ไปเป็น 10.0 ลิตร จงหา
(ก) งานที่ทำโดยการขยายตัวของกาซ
(ข) พลังงานที่ถ่ายเทออกมาจากระบบ

วิธีทำ (ก) โดยใช้สมการ 9.25 ทำให้ได้งานของการขยายตัวสำหรับกาซอุดมคติเป็นดังนี้

$$W = nRT\ln(\frac{V_f}{V_i}) = (1.0\text{ mol})(8.31\text{ J/mol.K})(273.0\text{ K})\ln(\frac{10}{3})$$
$$W = 2.7\times10^3 \quad \text{J}$$

(ข) เนื่องจากการเปลี่ยนสถานะของระบบอยู่ภายใต้อุณหภูมิคงที่ นั่นคือพลังงานภายในระบบจะไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นจากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ จะได้ว่า

$$\Delta E_{int} = Q - W$$
$$0 = Q - W$$
$$W = Q = 2.7\times10^3 \quad \text{J}$$

ตัวอย่างที่ 6 น้ำมวล 1 g ถูกทำให้กลายเป็นไอโดยกระบวนการ isobaric มีความดันคงที่เท่ากับ1.013×10^5 Pa ปริมาตรของน้ำขณะที่เป็นของเหลวคือ 1.00 cm^3 และปริมาตรของ

ไอน้ำคือ 1671 cm^3 จงหางานที่ทำในการขยายตัวและพลังงานภายในระบบที่เปลี่ยนแปลงไป สมมติว่าไม่สนใจการผสมของไอน้ำกับอากาศที่อยู่รอบ ๆ

<u>วิธีทำ</u> งานที่เกิดขึ้นสำหรับกระบวนการ isobaric คือ

$$W = P(V_f - V_i) = (1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(1671 - 1.0) \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$= 169 \quad \text{J}$$

และความร้อนที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะจากน้ำไปเป็นไอน้ำหาได้จาก

$$Q = mL = (1 \times 10^{-3} \text{ kg})(2.26 \times 10^6 \text{ J/kg})$$
$$= 2260 \quad \text{J}$$

จากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ จะได้พลังงานภายในระบบที่เปลลี่ยนแปลงไปมีค่าเป็นดังนี้

$$\Delta E_{int} = Q - W = 2260 - 169 = 2.09 \quad \text{J}$$

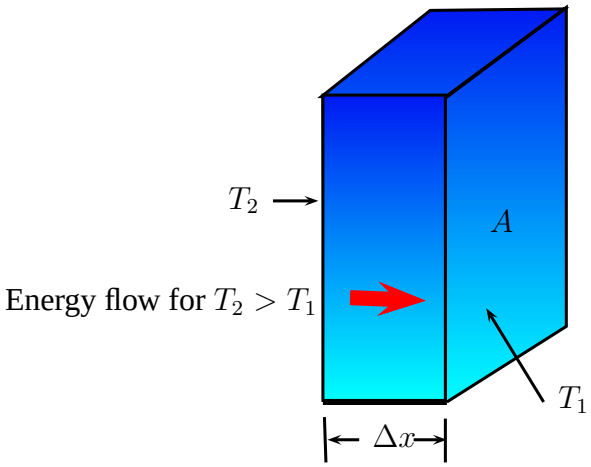
9.7 กลไกการขนส่งพลังงาน (energy transfer mechanism)

9.7.1 การนำความร้อน (thermal conduction)

กระบวนการเคลื่อนย้ายพลังงานที่เกี่ยวข้องกับความแตกต่างของอุณหภูมิคือ การนำความร้อน (thermal conduction) เช่น ถ้าเราจับปลายแท่งโลหะด้านหนึ่งไว้และปลายอีกด้านนำไปใส่ในเปลวไฟ เราจะรู้สึกได้ทันทีที่ว่าอุณหภูมิที่ปลายโลหะด้านที่เราจับกำลังเพิ่มขึ้น เนื่องจากการวัตถุมีการส่งผ่านพลังงานความร้อนจากปลายด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งเนื่องจากมีความแตกต่างของอุณหภูมิ อัตราการนำความร้อนจะขึ้นอยู่กับสมบัติของสสาร โดยทั่วไปโลหะถือว่าเป็นตัวนำความร้อนที่ดี เพราะว่าอิเล็กตรอนของโลหะนั้นสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระทำให้การส่งผ่านความร้อนได้ดีนั่นเอง

พิจารณาการส่งผ่านความร้อนของวัตถุที่มีความหนา Δx และมีพื้นที่หน้าตัดเป็น A ซึ่งที่ผิวด้านหน้าและด้านหลังมีอุณหภูมิเป็น T_2 และ T_1 ตามลำดับ ดังรูปที่ 9.7 ในการทดลองเราพบ พลังงานความร้อน Q จะถูกส่งผ่านในช่วงเวลา Δt จากด้านที่ร้อนที่สุดไปยังด้านที่เย็นที่สุด อัตราการส่งผ่านความร้อน $Q/\Delta t$ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับพื้นที่หน้าตัด A และผลต่างของอุณหภูมิ $\Delta T = T_2 - T_1$ และเป็นสัดส่วนผกผันกับความหนา Δx นั่นคือ

$$\frac{Q}{\Delta t} \propto A\frac{\Delta T}{\Delta x}$$



รูปที่ 9.7: การส่งผ่านความร้อนของแผ่นตัวนำที่มีความหนา Δx และมีพื้นที่หน้าตัด A

เพื่อความสะดวกเรากำหนดให้ P คือ อัตราการส่งผ่านความร้อน สำหรับวัสดุที่มีความหนาน้อย dx และมีความแตกต่างของอุณภูมิเป็น dT เราสามารถเขียนกฎการนำความร้อน (law of thermal conduction) ได้ดังนี้

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = kA\left|\frac{dT}{dx}\right| \tag{9.26}$$

เมื่อ k คือ สภาพการนำความร้อนของวัสดุ (thermal conductivity) จากสมการ 9.26 จะพบว่าหน่วยของอัตราการส่งผ่านความร้อนคือ จูลต่อวินาที (J/s) หรือ วัตต์ (W) ในกรณีแท่งตัวนำมีความยาวอย่างสม่ำเสมอ L และมีวัสดุกันความร้อนห่อหุ้มป้องกันการไหลออกด้านข้างของความร้อนยกเว้นตรงปลายทั้งสองด้านดังแสดงในรูป 9.8 ในกรณีนี้อุณหภูมิที่แต่ละจุดจะคงที่ตลอดเวลาดังนั้นทำให้ได้

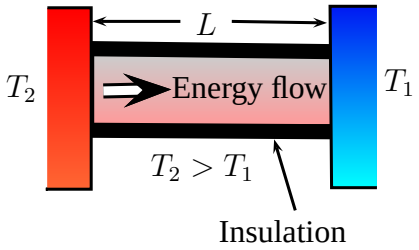
$$\left|\frac{dT}{dx}\right| = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

ดังนั้น อัตราการส่งผ่านความร้อนโดยการนำความร้อนของวัสดุนี้คือ

$$P = kA\frac{(T_2 - T_1)}{L} \tag{9.27}$$

และสำหรับตัวนำที่ประกอบด้วยวัสดุหลาย ๆชั้นโดยแต่ละชั้นมีความหนาเป็น $L_1, L_2, \cdots$ และมีค่าสภาพนำความร้อนเป็น $k_1, k_2, \cdots$ ดังนั้นอัตราการส่งผ่านพลังงานความร้อนของตัวนำที่มีหลายชั้นของวัสดุประกอบกันมีค่าดังนี้คือ

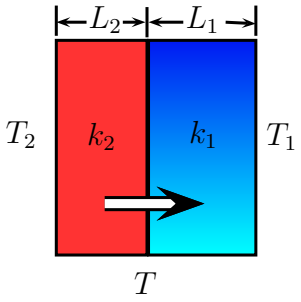
$$P = A\frac{(T_2 - T_1)}{\sum_i (L_i/k_i)} \tag{9.28}$$



รูปที่ 9.8: การนำความร้อนของแท่งตัวนำที่มีฉนวนกันความร้อนห่อหุ้มไว้

เมื่อ T_1 และ T_2 คืออุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของตัวนำ

ตัวอย่างที่ 7 วัสดุสองชนิดที่มีความหนาเป็น L_1 และ L_2 มีสภาพนำความร้อนเป็น k_1 และ k_2 นำมาสัมผัสกันดังรูป 9.9 อุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของวัสดุทั้งสองคือ T_1 และ T_2 โดยที่ $T_2 > T_1$ จงหาอุณหภูมิที่รอยต่อของผิววัสดุทั้งสองและหาค่าอัตราการส่งผ่านพลังงานความร้อน



รูปที่ 9.9: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 4

วิธีทำ ถ้าให้ T คือ อุณหภูมิตรงรอยต่อ แล้วอัตราการส่งผ่านพลังงานที่ชั้นวัสดุที่ 1 คือ

$$P_1 = \frac{k_1 A(T - T_1)}{L_1}$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราการส่งผ่านพลังงานที่วัสดุที่ 2 คือ

$$P_2 = \frac{k_2 A(T_2 - T)}{L_2}$$

ในสภาวะคงตัวอัตราการส่งผ่านพลังงานของทั้งสองวัสดุจะมีค่าเท่ากัน นั้นคือ

$$\frac{k_1 A(T - T_1)}{L_1} = \frac{k_2 A(T_2 - T)}{L_2}$$

$$T = \frac{k_1 L_2 T_1 + k_2 L_2 T_2}{k_1 L_1 + k_2 L_2}$$

และอัตราการส่งผ่านพลังงานระหว่างวัสดุทั้งสองคือ

$$P = \frac{A(T_2 - T_1)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)}$$

9.7.2 การพาความร้อน (convection)

การส่งผ่านความร้อนโดยการพาความร้อน จะใช้โมเลกุลของตัวกลางที่ได้รับความร้อนเป็นตัวพาความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงกว่าไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า เช่น เมื่อเราเอามืออังเหนือเตาไฟจะรู้สึกร้อน เพราะว่าโมเลกุลของอากาศที่ร้อนขยายตัวมีความหนาแน่นลดลงแล้วลอยตัวสูงขึ้นกระทบมือ จึงทำให้เรารู้สึกร้อน การพาความร้อนแบ่งตามชนิดการเคลื่อนที่ของโมเลกุลตัวกลางได้ 2 ชนิด คือ

- การพาความร้อนอย่างอิสระ (free convection) เป็นการพาความร้อนที่โมเลกุลของตัวกลางเคลื่อนที่ไปเพราะมีความหนาแน่นต่างกัน เช่น การเกิดลม และการระบายอากาศเสียของโรงงานทางปล่องไฟ เป็นต้น
- การพาความร้อนอย่างไม่อิสระ (forced convection) เป็นการพาความร้อนที่โมเลกุลของตัวกลางถูกทำให้เคลื่อนที่โดยแรงจากภายนอก เช่น การระบายความร้อนของหม้อน้ำรถยนต์ พัดลม และเครื่องทำความเย็น

9.7.3 การแผ่รังสี (radiation)

วัตถุทุกทั้งหมดจะปล่อยพลังงานอย่างต่อเนื่องในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic waves) อันเนื่องมาจากการสั่นของโมเลกุล และอัตราที่วัตถุปล่อยพลังงานออกมาเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าอุณหภูมิสัมบูรณ์ของวัตถุยกกำลังสี่ เรียกว่า กฎของเสเตฟาน (Stefan's law) และเขียนสมการได้ดังนี้

$$P = \sigma A e T^4 \tag{9.29}$$

เมื่อ P คือกำลังในหน่วยวัตต์ (W) ของการปลดปล่อยพลังงานของวัตถุ σ คือ ค่าคงที่ เท่ากับ 5.6696×10^{-8} W/m^2.K^4 A คือพื้นที่ของวัตถุ (m^2) e คือค่าคงที่การปลดปล่อย (emissivity constant) ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ขึ้นอยู่กับสมบัติของผิววัตถุและ T คืออุณหภูมิที่ผิว (K)

ขณะที่วัตถุแผ่รังสีความร้อนออกจะมีการดูดกลืนรังสีความร้อนของวัตถุอื่นที่แผ่มาด้วย ถ้าอัตราการแผ่มากกว่าอัตราการดูด วัตถุจะเย็นลง หรือถ้าอัตราการแผ่น้อยกว่าอัตราการดูด

วัตถุจะร้อนขึ้น และถ้าอัตราทั้งสองเท่ากันเมื่อใดวัตถุจะมีอุณหภูมิคงที่ ถ้ากำหนดให้ วัตถุมีอุณหภูมิ T และสิ่งแวดล้อมมีอุณหภูมิ T_0 อัตราการแผ่รังสีระหว่างวัตถุกับสิ่งแวดล้อมมีค่าเท่ากับผลต่างของอัตราการแผ่และอัตราการดูดรังสี จึงเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$P_{net} = \sigma A e(T^4 - T_0^4) \tag{9.30}$$

จากสมการดังกล่าวทำให้เรานิยามเกี่ยวกับ วัตถุที่ดูดกลืนพลังงานได้ทั้งหมดเมื่อมีรังสีตกกระทบที่ผิววัตถุนั้น เป็น ตัวดูดกลืนอุดมคติ (ideal absorber) สำหรับวัตถุแบบนี้จะมีค่า $e = 1$ ในบางครั้งเราเรียกว่า วัตถุดำ (black body) และในทางกลับกัน วัตถุที่ทำการสะท้อนรังสีทั้งหมดเมื่อมีรังสีตกกระทำผิว ($e = 0$) เรียกว่า ตัวสะท้อนอุดมคติ (ideal reflector) นั่นคือจะแผ่รังสีความร้อนออกทั้งหมด

9.8 ทฤษฎีจลน์ของกาซ

ในหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นว่าเราใช้ตัวแปรสถานะในระดับมหภาค (macroscopic variables) เช่น ความดัน ปริมาตร และอุณหภูมิ เพื่อหาสมบัติต่าง ๆของกาซอุดมคติ ในอีกด้านหนึ่งสมบัติของกาซเหล่านี้สามารถหาได้โดยการศึกษาพฤติกรรมของแต่ละอะตอมหรือโมเลกุลของกาซที่อยู่ในระบบนั้นโดยอาศัยหลักสถิติ ในการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของกาซในระดับจุลภาค (microscopic level) นั้นเราเรียกว่า ทฤษฎีจลน์ของกาซ (kinetic theory of gases)

9.8.1 แบบจำลองของกาซอุดมคติ

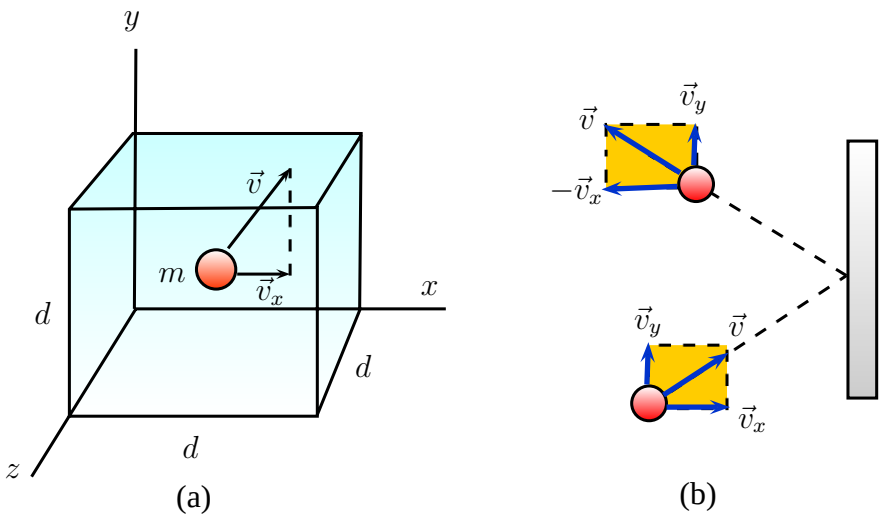
ข้อสมมติฐานที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองเชิงโมเลกุลของกาซอุดมคติมีดังนี้คือ

- โมเลกุลมีจำนวนมากและระยะห่างเฉลี่ยระหว่างโมเลกุลมากกว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของโมเลกุลนั่นคือปริมาตรของโมเลกุลน้อยมาก ๆเมื่อเทียบกับปริมาตรของภาชนะที่บรรจุ
- โมเลกุลประพฤติตัวเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน แต่เนื่องจากโมเลกุลทั้งหมดนั้นสามารถเคลื่อนที่ไปได้ทุกทิศทางด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน ซึ่งอาจจะกล่าวได้ว่าเป้นเคลื่อนที่แบบสุ่ม (random)
- การชนกันของโมเลกุลหรือการชนกับผนังภาชนะเป็นการชนแบบยืดหยุ่น นั่นคือทั้งโมเมนตัมและพลังงานจลน์มีค่าคงที่

- แรงระหว่างโมเลกุลมีเฉพาะในช่วงการชน หมายความว่าเป็นแรงระยะสั้น
- กาซที่พิจารณาเป็นสสารชนิดเดียว นั่นคือโมเลกุลของกาซทุกโมเลกุลมีลักษณะเหมือนกันทุกประการ

9.8.2 ความดันของกาซที่บรรจุในภาชนะลูกบาศก์

พิจารณากล่องลูกบาศก์ที่มีความยาวของแต่ละด้านเป็น d บรรจุกาซ N โมเลกุลดังรูป 9.10(a) พิจารณาการชนของหนึ่งอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ดังนั้นความเร็วในองค์ประกอบตามแกน x, y และ z คือ v_x, v_y และ v_z ตามลำดับ ขณะที่โมเลกุลชนกับผนังความเร็วในองค์ประกอบตามแกน x จะมีทิศตรงกันข้ามเนื่องจากการชนเป็นแบบยืดหยุ่น ในขณะที่ความเร็วในองค์ประกอบตามแกน y และ z ยังคงไม่เปลี่ยนแปลงดังรูป 9.10(b) เพราะว่า



รูปที่ 9.10: (a) กาซบรรจุในกล่องลูกบาศก์ (b) โมเลกุลของกาซชนกับผนังภาชนะแบบยืดหยุ่น

โมเมนตัมในองค์ประกอบตามแกน x ก่อนชนของโมเลกุลคือ mv_x และโมเมนตัมหลังชนคือ $-mv_x$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเนื่องจากการชนจึงมีค่าเป็น

$$\Delta p_x = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x$$

จากทฤษฎีการดล-โมเมนตัม ทำให้เราได้

$$F_1 \Delta t = \Delta p_x = -2mv_x$$

เมื่อ F_1 คือแรงเฉลี่ยที่โมเลกุลชนกับผนังในช่วงเวลา Δt และสำหรับโมเลกุลที่ชนสองครั้งที่ผนังด้านเดียวกันจะต้องใช้เวลาในการเคลื่อนที่ $2d$ ในแนวแกน x ดังนั้นช่วงเวลาระหว่างการชนสองครั้งที่ผนังด้านเดียวกันคือ $\Delta t = 2d/v_x$ ดังนั้นแรงเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในช่วงการชนมีค่าเป็นดังนี้

$$F_1 = \frac{-2mv_x}{\Delta t} = \frac{-2mv_x}{2d/v_x} = \frac{-mv_x^2}{d} \tag{9.31}$$

สอดคล้องกับกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตันคือว่าแรงเฉลี่ยที่โมเลกุลนั้นชนผนังจะมีขนาดเท่ากับแรงที่ผนังกระทำต่อทุกโมเลกุลแต่มีทิศตรงกันข้าม นั่นคือ

$$F_{1,\text{on wall}} = -F_1 = -\left(\frac{-mv_x^2}{d}\right) = \frac{mv_x^2}{d}$$

เนื่องจากแต่ละโมเลกุลกระทำต่อผนังด้วยแรง F_1 ดังนั้นแรงลัพธ์ที่กระทำต่อผนังของโมเลกุลทั้งหมดคือ

$$F = \frac{m}{d}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots)$$

เนื่องจากค่ากำลังสองของความเร็วเฉลี่ยสำหรับระบบที่ประกอบด้วยจำนวน N โมเลกุลคือ

$$\bar{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2}{N}$$

ดังนั้นแรงลัพธ์ที่กระทำต่อผนังเขียนใหม่ได้เป็น

$$F = \frac{Nm}{d}\bar{v_x^2}$$

เมื่อพิจารณาความเร็วของโมเลกุลทั้งสามองค์ประกอบตามแกน x, y และ z ทำให้ได้ว่า

$$\bar{v^2} = \bar{v_x^2} + \bar{v_y^2} + \bar{v_z^2}$$

เนื่องจากเป็นการเคลื่อนแบบสุ่มและมีความน่าจะเป็นในการเคลื่อนในแต่ละองค์ประกอบเท่ากันดังนั้นทำให้ได้ $\bar{v^2} = 3\bar{v_x^2}$ และทำให้เราสามารถหาแรงเฉลี่ยที่กระทำต่อผนังภาชนะได้เป็น

$$F = \frac{N}{3}\left(\frac{m\bar{v^2}}{d}\right)$$

ความดันของกาซ ที่กระทำต่อผนังภาชนะสามารถหาได้ดังนี้

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{d^3}m\bar{v^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{N}{V}m\bar{v^2}\right)$$

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{2}m\bar{v^2}\right) \tag{9.32}$$

จะเห็นว่าความดันของกาซเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรและเป็นสัดส่วนโดยตรงกับพลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่งเฉลี่ยของโมเลกุลกาซจากสมการ 9.32 แสดงให้เห็นถึงความเชื่อมโยงของความดันของกาซซึ่งเป็นปริมาณที่วัดในระดับมหภาคกับความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคแต่ตัวซึ่งเป็นปริมาณในระดับจุลภาค

9.8.3 การแปลความหมายในเชิงโมเลกุลของอุณหภูมิ

จากสมการสถานะของกาซอุดมคติ $PV = nRT = Nk_BT$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{2}m\bar{v^2}\right) = Nk_BT$$
$$T = \frac{2}{3k_B}\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right)$$

จากสมการจะเห็นว่าอุณหภูมิของกาซวัดได้โดยตรงจากค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ของโมเลกุลนั่นเอง หรืออาจจะเขียนพลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่งในเทอมของอุณหภูมิได้เป็นดังนี้

$$\frac{1}{2}m\bar{v^2} = \frac{3}{2}k_BT \tag{9.33}$$

เนื่องจากความเร็วมีองค์ประกอบตามแกน x, y และ z ทำให้เราเขียนพลังงานจลน์เฉลี่ยในแต่ละองค์ประกอบความเร็วได้ดังนี้

$$\frac{1}{2}m\bar{v_x^2} = \frac{1}{2}k_BT$$
$$\frac{1}{2}m\bar{v_y^2} = \frac{1}{2}k_BT$$
$$\frac{1}{2}m\bar{v_y^2} = \frac{1}{2}k_BT$$

พลังงานจลน์ของโมเลกุลจะถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆกันสำหรับในแต่ละองค์ประกอบของความเร็วตามแกน x, y และ z ซึ่งเรียกว่า ทฤษฎีการแบ่งเท่ากันพลังงาน (theorem of equipartition of energy) เมื่อพิจารณาทั้งระบบที่มีจำนวน N โมเลกุล จะได้ว่า พลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่งทั้งหมดคือ

$$E_{trans} = N\left(\frac{1}{2}m\bar{v^2}\right) = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{2}nRT \tag{9.34}$$

ค่ารากที่สองของ $\bar{v^2}$ เรียกว่า *อัตราเร็วรากที่สองของกำลังสองเฉลี่ย (root-mean square (rms) speed)* ซึ่งมีค่าดังนี้

$$v_{rms} = \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \tag{9.35}$$

เมื่อ M คือ มวลโมเลกุล (molar mass) จากสมการ 9.35 แสดงให้ว่าสำหรับอุณหภูมิค่าหนึ่ง อัตราเร็วของโมเลกุลจะขึ้นอยู่กับขนาดของมวลโมเลกุล โมเลกุลที่มีมวลน้อยกว่าก็จะมีอัตราเร็วสูงกว่าโมเลกุลที่มวลมาก

ตัวอย่างที่ 8 ถังบรรจุกาซฮีเลียมมีปริมาตร 0.300 m^3 มีกาซฮีเลียมบรรจุอยู่จำนวน 2 mol ที่อุณหภูมิ $20°$C สมมติว่ากาซฮีเลียมประพฤติตัวเหมือนกาซอุดมคติ จงหา

(ก) พลังงานจลน์ในการเลื่อนตำแหน่งของโมเลกุลกาซฮีเลียม

(ข) พลังงานจลน์เฉลี่ยต่อโมเลกุล

(ค) อัตราเร็วรากที่สองของกำลังสองเฉลี่ย

วิธีทำ

(ก) โจทย์กำหนด $n = 2$ mol และ $T = 20°\text{C} = 293$ K ดังนั้นพลังงานจลน์สำหรับการเลื่อนตำแหน่งมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} E_{trans} &= \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}(2)(8.31 \text{ J/mol.K})(293 \text{ K}) \\ &= 7.30 \times 10^3 \quad \text{J} \end{aligned}$$

(ข) พลังงานจลน์เฉลี่ยต่อโมเลกุลหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\bar{v^2} &= \frac{3}{2}k_BT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/k})(293 \text{ K}) \\ &= 6.07 \times 10^{-21} \quad \text{J} \end{aligned}$$

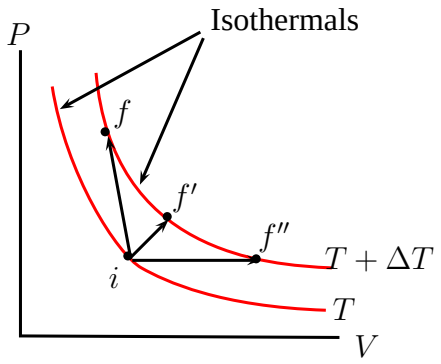
(ค) มวลโมเลกุลของกาซฮีเลียม (M) คือ 4.00×10^3 kg/mol ดังนั้น อัตราเร็วรากที่สองของกำลังสองเฉลี่ยคือ v_{rms} หาได้จาก

$$\begin{aligned} v_{rms} &= \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8.31 \text{ J/mol.K})(293 \text{ K})}{4.0 \text{ kg/mol}}} \\ &= 1.35 \times 10^3 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

9.9 ความร้อนจำเพาะโมลาร์ของกาซอุดมคติ

พิจารณาการเปลี่ยนสถานะตอนเริ่มต้นไปยังสถานะสุดท้ายของกาซอุดมคติ ในหลาย ๆกระบวนการภายใต้จากเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ $\Delta T = T_f - T_i$ ดังแสดงในรูป 9.11 จะเห็นว่าในแต่ละ

เส้นทางของการเปลี่ยนแปลง ΔT มีค่าเท่ากัน และทำให้พลังงานภายในระบบ (ΔE_{int}) ที่เปลี่ยนไปมีค่าเท่ากันด้วย จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ $Q = \Delta E_{int} + W$ งานที่ทำในแต่ละเส้นทางมีค่าแตกต่างกัน ดังนั้นทำให้ความร้อนมีค่าไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับเส้นทางการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นในการนิยาม ความร้อนจำเพาะโมลาร์ (molar specific heat) จึงพิจารณาจากสองกระบวนการที่เกิดขึ้นเสมอ ๆ นั้นคือ กระบวนการที่ปริมาตรคงที่ และ กระบวนการที่ความดันคงที่ ดังสมการ



รูปที่ 9.11: การเปลี่ยนสถานะของกาซอุดมคติจากอุณหภูมิ T ไปยัง $T + \Delta T$ ในสามเส้นทาง

$$Q = nC_V\Delta T \qquad \text{(constant volume)} \tag{9.36}$$

$$Q = nC_P\Delta T \qquad \text{(constant pressure)} \tag{9.37}$$

เมื่อ C_V และ C_P คือ ค่าความร้อนจำเพาะโมลาร์ที่ปริมาตรคงที่และที่ความดันคงที่ตามลำดับ

เมื่อพลังงานความร้อนเข้าสู่ระบบ โดยที่ปริมาตรไม่เปลี่ยนแปลง ระบบไม่มีการทำงาน ($W = \int PdV = 0$) ดังนั้นจากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ จะได้

$$Q = \Delta E_{int} \tag{9.38}$$

หรือพูดอีกนัยหนึ่งก็คือ พลังงานความร้อนที่เข้าสู่ระบบจะถูกเปลี่ยนไปเป็นพลังงานภายในทั้งหมด (อุณหภูมิของระบบเพิ่มขึ้น) และทำให้ได้ว่า

$$\Delta E_{int} = nC_V\Delta T \tag{9.39}$$

ถ้าความร้อนจำเพาะโมลาร์มีค่าคงที่ เราสามารถแสดงได้ว่าพลังงานภายในของกาซมีค่าเป็นดังนี้

$$E_{int} = nC_V T \tag{9.40}$$

เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ นั่นคือ $T \to T + dT$ และ $E_{int} \to dE_{int}$ ทำให้เราเขียนสมการความร้อนจำเพาะโมลาร์ได้ใหม่เป็น

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dE_{int}}{dT} \tag{9.41}$$

สำหรับกาซอุดมคติชนิดอะตอมเดียว (monatomic ideal gas) พลังงานภายในทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $E_{int} = \frac{3}{2}nRT$ เมื่อแทนลงสมการ 9.41 ทำให้ได้

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12.5 \quad \text{J/mol.K} \tag{9.42}$$

ในตอนนี้เรากลับมาที่การเปลี่ยนแปลงตามกระบวนการที่ความดันคงที่ จะได้ว่าพลังงานความร้อนที่ไหลเข้าสู่ระบบคือ $Q = nC_P\Delta T$ เนื่องจากปริมาตรมีค่าเพิ่มขึ้นงานที่กาซกระทำในการขยายตัวคือ $W = P\Delta V$ จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ จะได้ว่า

$$\Delta E_{int} = Q - W = nC_P\Delta T - P\Delta V \tag{9.43}$$

เพราะว่าการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในระบบขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเท่านั้น ดังนั้น เมื่อแทนค่า $\Delta E_{int} = nC_V\Delta T$ และ $P\Delta V = nR\Delta T$ ลงในสมการ 9.43 ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่าง C_V และ C_P ดังนี้

$$nC_V\Delta T = nC_P\Delta T - nR\Delta T$$
$$C_P - C_V = R \tag{9.44}$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่า ความร้อนจำเพาะโมลาร์ที่ความดันคงที่ (C_P) มีค่ามากกว่าความร้อนจำเพาะโมลาร์ที่ปริมาตรคงที่ (C_V) เท่ากับค่าคงตัวสากลของกาซ (R) สำหรับกาซชนิดอะตอมเดียว $C_V = \frac{3}{2}R$ และ $C_P = \frac{5}{2}R$ อัตราส่วนของค่าทั้งสองนี้กำหนดโดย

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{(5/2)R}{(3/2)R} = \frac{5}{3} = 1.67 \tag{9.45}$$

9.10 กระบวนการ Adiabatic สำหรับกาซอุดมคติ

ในรูป 9.12 กระบวนการเปลี่ยนแปลงของกาซอุดมคติจากสถานะหนึ่ง ที่มีอุณหภูมิ T_i ไปสู่อีกสถานะหนึ่งที่มีอุณหภูมิ T_f โดยที่ไม่มีพลังงานความร้อนเข้าหรือออกจากระบบ เรียกว่ากระบวนการ Adiabaic (Adiabatic process) จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ $\Delta E_{int} = Q - W$ เมื่อ $Q = 0$ และเนื่องจากพลังงานภายขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเท่านั้น ดังนั้นเราจะได้ว่าสำหรับการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ

$$dE_{int} = nC_V dT = -PdV$$

จากสมการของกาซอุดมคติ $PV = nRT$ ทำการหาอนุพันธ์ทั้งหมด จะได้

$$PdV + VdP = nRdT$$

จากสองสมการข้างต้น ทำการกำจัดตัวแปร dT แล้วจัดเทอมใหม่ ทำให้

$$PdV + VdP = -\frac{R}{C_V}PdV$$

แทนค่า $R = C_P - C_V$ และหารด้วย PV ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = (\frac{C_P - C_V}{C_V})\frac{dV}{V} = (1-\gamma)\frac{dV}{V}$$
$$\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$$

ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการนี้จะได้

$$\ln P + \gamma \ln V = C$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$PV^\gamma = C$$

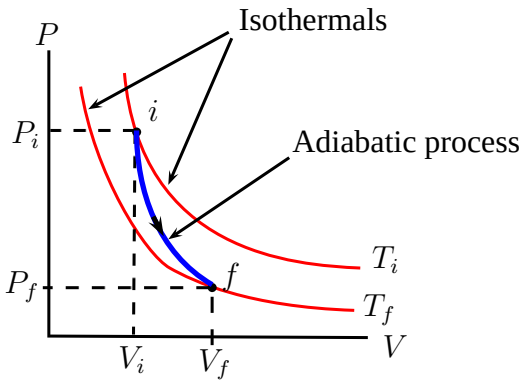
เมื่อ C คือ ค่าคงที่ใด ๆ ในการเปลี่ยนสถานะเริ่มต้นไปยังสถานะสุดท้ายภายใต้กระบวน adiabatic ทำให้สามารถเขียนความสัมพันธ์ของปริมาณ P และ V ได้เป็น

$$P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \tag{9.46}$$

ตัวอย่างที่ 9 อากาศในกระบอกลูกสูบของเครื่องยนต์ดีเซลมีอุณหภูมิ 20°C ถูกอัดจากความดันเริ่มต้นที่ 1 atm ปริมาณ 800.0 cm^3 ไปสู่ปริมาตร 60.0 cm^3 สมมติว่า กาซนี้ประพฤติตัวเหมือนกาซอุดมคติและมีค่า $\gamma = 1.4$ และในการอัดตัวของกาซนี้เป็นแบบ adiabatic จงหาความดันและอุณหภูมิของกาซที่สถานะดังกล่าวนี้

วิธีทำ จากสมการที่ 9.46 จะได้ ความดันสุดท้ายเป็น

$$P_f = P_i\frac{V_i}{V_f}^\gamma = (1.00 \text{ atm})\frac{800.0 \text{ cm}^3}{60.0 \text{ cm}^3}^{1.40}$$
$$= 37.6 \quad \text{atm}$$



รูปที่ 9.12: การเปลี่ยนสถานะของกาซอุดมคติจากอุณหภูมิ T_i ไปยัง T_f ตามกระบวนการ adiabatic

และจากสมการ

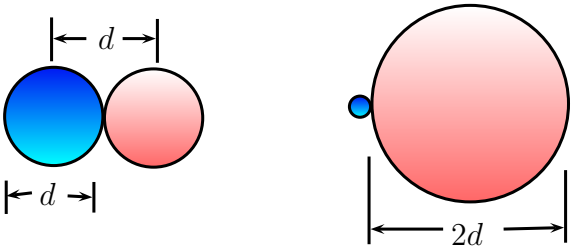
$$\frac{P_iV_i}{T_i} = \frac{P_fV_f}{T_f}$$

$$T_f = \frac{P_fV_f}{P_iV_i}T_i = \frac{(37.6)(60.0)}{(1.00)(800)}(293)$$

$$T_f = 826 \quad \text{K} = 553^{\circ}\text{C}$$

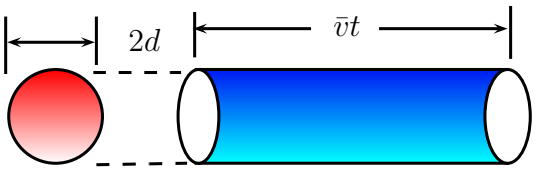
9.11 วิถีอิสระเฉลี่ย (mean free path)

การเคลื่อนที่ของโมเลกุลของกาซซึ่งบรรจุในภาชนะปิด เมื่อเราทำให้ระบบมีพลังงานภายในเพิ่มขึ้น โดยการใส่ความร้อนหรือโดยการทำงานกับระบบจากแรงภายนอก เช่นทำการอัดกาซในกระบอกสูบ การที่ทำให้พลังงานภายในเพิ่มขึ้นทำให้โมเลกุลของกาซมีอัตราเร็วเพิ่มขึ้นด้วย ในระหว่างการเคลื่อนที่จะมีการชนกันเองหรือชนกับผนังภาชนะที่บรรจุ ดังนั้นโมเลกุลของกาซแต่ละตัวจะมีระยะทางอิสระก็ที่จะชนกับโมเลกุลอื่น ๆ ที่เราเรียกว่า วิถีอิสระ (free path) ถ้ามีการชนกันต่อไปเรื่อย ๆ ระยะทางเฉลี่ยที่โมเลกุลของกาซเคลื่อนที่ได้ระหว่างการชน เรียกว่า *วิถีอิสระเฉลี่ย (mean free path)* เขียนแทนด้วย ℓ ในการคำนวณหาค่าวิถีอิสระเฉลี่ยของกาซ เราจะสมมติว่าโมเลกุลเป็นทรงกลมมีเส้นผ่าศูนย์กลาง d และการชนกันจะเกิดขึ้นเมื่อจุดศูนย์กลางของโมเลกุลทั้งสองอยู่ห่างกันเป็นระยะ d ดังแสดงในรูป 9.13(a) ในกรณีนี้เราคิดเหมือนกับมีโมเลกุลหนึ่งขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเป็น $2d$ ชนกับโมเลกุลที่มีขนาดเป็นจุดซึ่งหยุดนิ่ง ดังแสดงในรูป 9.13(b) ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยเป็น $\bar{v}$ ในช่วงเวลา t โมเลกุลนี้เดินทางได้ระยะ $\bar{v}t$ ตลอดระยะทางที่เคลื่อนที่ไปโมเลกุลนี้จะเคลื่อนกวาดปริมาตรเป็นรูปทรงกระบอกดังแสดงในรูป 9.14 ดังนั้น ปริมาตรของทรงกระบอกนี้มีค่าเป็น $\pi d^2\bar{v}t$



รูปที่ 9.13: (a) สองโมเลกุลของกาซที่สมมติเป็นทรงกลมที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางเป็น d และ (b) การคิดเสมือนว่าโมเลกุลที่มีขนาด $2d$ ชนกับอีกโมเลกุลที่เป็นจุด

ถ้ากำหนดให้ n_V คือจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (ความหนาแน่นของกาซ) ดังนั้น จำนวนโมเลกุลที่มีอยู่ปริมาตรนี้มีจำนวนเท่ากับ $(\pi d^2 \bar{v} t)(n_V)$ วิถีอิสระเฉลี่ย จึงเท่า



รูปที่ 9.14: โมเลกุลของกาซที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $2d$ เคลื่อนกวาดปริมาตรเป็นรูปทรงกระบอกในช่วงเวลา t

กับระยะทางเฉลี่ยที่ใช้ในการเคลื่อนที่ในเวลา t หารด้วยจำนวนครั้งของการชนที่เกิดขึ้นในช่วงเวลานั้น

$$\ell = \frac{\bar{v}t}{(\pi d^2 \bar{v} t) n_V}$$

เพราะว่าจำนวนครั้งของการชนในช่วงเวลา t คือ $(\pi d^2 \bar{v} t) n_V$ ดังนั้นจำนวนครั้งของการชนต่อหนึ่งหน่วยเวลาก็คือ ความถี่ของการชน (collision frequency,f) นั่นคือ

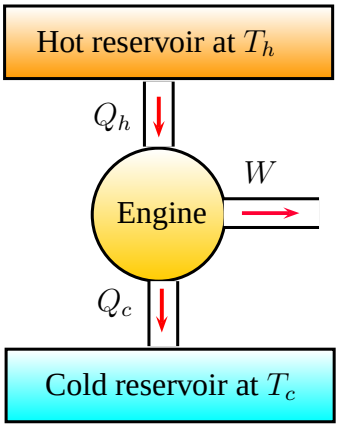
$$f = \pi d^2 \bar{v} n_V$$

และส่วนกลับของความถี่ก็คือเวลาเฉลี่ยระหว่างการชน ที่เราเรียกว่า *เวลาอิสระเฉลี่ย (mean free time)* จากสมการของวิถีอิสระเฉลี่ย จะพบว่า ค่า ℓ จะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับสมบัติของกาซ เช่น ความหนาแน่น ถ้ากาซมีความหนาแน่นมากโมเลกุลของกาซมีโอกาสชนกันถี่ขึ้นทำให้ระยะวิถีอิสระเฉลี่ยของกาซสั้นลง หรือขึ้นอยู่กับพื้นหน้าตัดของโลเลกุลของกาซ ถ้าโมเลกุลใหญ่โอกาสที่จะมีการชนก็จะมากตามไปด้วย

9.12 เครื่องจักรความร้อนและกฎข้อที่สองของเทอร์โมไดนามิกส์

เครื่องจักรความร้อน (heat engine) คือ อุปกรณ์ที่เปลี่ยนพลังงานภายในระบบให้เป็นพลังงานกล ตัวอย่างเช่น เครื่องผลิตไฟฟ้าซึ่งใช้ความร้อนที่ได้จากการเผาไหม้เชื้อเพลิง ได้แก่ ถ่านหิน หรือน้ำมันเชื้อเพลิงอื่น ๆเพื่อทำให้น้ำเดือดจนกลายเป็นไอน้ำหลังจากนั้นไอน้ำจะถูกส่งไปเพื่อขับเคลื่อนใบพัดของเครื่องผลิตกระแสไฟฟ้าให้หมุน และอีกตัวอย่างของเครื่องจักรความร้อนคือ เครื่องยนต์ในยานพาหนะซึ่งความร้อนที่ได้จากการเผาไหม้ของน้ำมันเชื้อเพลิงจะถูกนำไปใช้ในการผลักดันให้ระบบกลไกของเครื่องยนต์มีการหมุนทำให้รถยนต์สามารถเคลื่อนที่ไปได้

ในการทำงานของเครื่องจักรความร้อนนั้นจะต้องมีสสารที่ทำงาน (working substance) ผ่านกระบวนการครบรอบ นั่นคือ (1) สสารที่ทำงานจะดูดพลังงานจากแหล่งพลังงานที่มีอุณหภูมิสูง (2) เครื่องจักรทำงาน และ(3) พลังงานจะถูกขับออกมาโดยเครื่องจักรไปยังแหล่งพลังงานที่มีอุณหภูมิต่ำ จะเห็นว่าในตัวอย่างแรก สสารที่ทำงานคือ น้ำ และในตัวอย่างที่สองสสารที่ทำงานคือ น้ำมัน แผนผังการทำงานของเครื่องจักรความร้อนแสดงดังรูป 9.15 จากรูปเครื่องจักรดูดพลังงานความร้อน Q_h จากแหล่งพลังงานที่มีอุณหภูมิสูง T_h และเครื่องจักร



รูปที่ 9.15: แผนผังการทำงานของเครื่องจักรความร้อน

ทำงาน W และให้พลังงานความร้อน Q_c ไปยังแหล่งพลังงานที่มีอุณหภูมิต่ำ T_c เนื่องจากสสารทำงานผ่านกระบวนการครบรอบ (cyclic process) ดังนั้นพลังงานภายในระบบตอนเริ่มต้นและตอนสุดท้ายเท่ากัน หรือ $\Delta E_{int} = 0$ จากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ $\Delta E_{int} = Q - W$ ทำให้ได้ว่างานสุทธิที่ทำโดยเครื่องจักรนี้มีค่าเท่ากับพลังงานความร้อนสุทธิ Q_{net} ที่ไหลผ่านเครื่องจักรนี้นั่นคือ

$$W = Q_{net} = Q_h - Q_c \tag{9.47}$$

ประสิทธิภาพเชิงความร้อน (thermal efficiency, e) ของเครื่องจักรความร้อน คือ อัตราส่วนของงานสุทธิที่ทำโดยเครื่องจักรในหนึ่งรอบต่อพลังงานความร้อนที่ดูดเข้ามา นั่นคือ

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \tag{9.48}$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่าในทางปฏิบัติแล้วไม่มีเครื่องจักรความร้อนใด ๆมีประสิทธิภาพในการเปลี่ยนพลังงานความร้อนไปเป็นพลังงานกลได้ 100 % ($e = 1$) และจากผลที่ได้นี้จึงเป็นที่มาของกฎข้อที่สองของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวไว้ว่า *เป็นไปไม่ได้ที่จะสร้างเครื่องจักรความร้อนที่ซึ่งดำเนินการผ่านกระบวนครบรอบโดยการเปลี่ยนพลังงานความร้อนที่ดูดจากแหล่งพลังงานที่มีอุณหภูมิสูงไปใช้ในการทำงานทั้งหมดโดยไม่มีการสูญเสียพลังงานความร้อนในขณะที่ทำงาน* คำกล่าวในกฎข้อที่สองของเทอร์โมไดนามิกส์นั้นหมายความว่าในระหว่างเครื่องจักรความร้อนดำเนินการนั้นพลังงานความร้อนที่ถูกใช้โดยเครื่องจักรจะเปลี่ยนไปเป็นงานแค่เพียงบางส่วนและที่เหลือจะถูกปลดปล่อยออกจากระบบสู่สิ่งแวดล้อม

สำหรับกฎข้อที่ 2 ของเทอร์โมไดนามิกส์ นั้นอาจจะกล่าวได้ว่าเป็นกำหนดว่ากระบวนการเปลี่ยนแปลงของระบบแบบไหนจะเกิดขึ้นได้จริงในธรรมชาติ หรือไม่สามารถเกิดขึ้นได้เลย ยกตัวอย่างเช่น

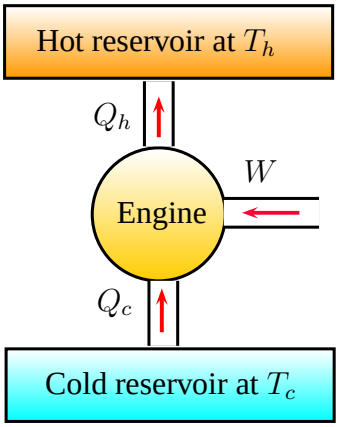
- เมื่อวัตถุสองอันมีอุณหภูมิต่างกันถูกนำมาสัมผัสกัน พลังงานความร้อนจะถ่ายเทจากวัตถุที่มีอุณหภูมิสูงกว่าไปยังวัตถุที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าเสมอ แต่จะไม่มีการถ่ายเทพลังงานความร้อนจากที่เย็นกว่าไปยังที่ร้อนกว่า
- ปล่อยลูกเทนนิสให้ตกกระทบพื้นและกระดอนขึ้นหลาย ๆครั้งจนกระทั่งหยุดนิ่ง แต่ลูกบอลที่อยู่นิ่งกลับพื้นจะไม่มีทางที่จะกระดอนขึ้นมา

จากตัวอย่างข้างต้น เราพอจะเห็นแล้วว่า กระบวนการเปลี่ยนแปลงนี้เกิดขึ้นในทิศทางเดียวและไม่สามารถเกิดย้อนกลับได้ (irrevesible) ดังนั้นกฎข้อที่สองของเทอร์โมไดนามิกส์จึงเกี่ยวข้องกับกระบวนการที่ไม่สามารถย้อนกลับในทิศทางเดิมได้เมื่อเราเชื่อมโยงกฎข้อที่สองกับตัวอย่างของเครื่องจักรความร้อน ก็เห็นว่า ความร้อนไม่อาจเปลี่ยนไปเป็นงานได้ทั้งหมด แต่ขณะที่งานอาจเปลี่ยนไปเป็นความร้อนได้ทั้งหมด ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการผันกลับไม่ได้ในทางธรรมชาติ

9.12.1 เครื่องทำความเย็น

ตู้เย็น (refrigerator) คือ เครื่องจักรความร้อนที่ทำงานย้อนกลับ โดยทั่วไปเครื่องจักรจะเปลี่ยนพลังงานความร้อนบางส่วนจากแหล่งที่มีอุณหภูมิสูงให้เป็นงานกล แล้วคายความร้อนที่เหลือ

ออกในที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า (ดูแผนภาพการทำงานของเครื่องจักรความร้อนประกอบ) แต่ตู้เย็นจะดูดความร้อนออกจากที่มีอุณหภูมิต่ำโดยการทำงานกลของเครื่องอัด (compressor) ภายในตู้เย็น แล้วคายความร้อนที่เป็นผลรวมของพลังงานความร้อนและพลังงานกลออกมาในที่มีอุณหภูมิสูงกว่า แผนภาพการทำงานของตู้เย็นแสดงดังรูป ?? สมมติให้ Q_c คือ ความร้อนที่



รูปที่ 9.16: แผนผังการทำงานของเครื่องทำความเย็น

ดูดออกจากภายในตู้เย็น W คือ งานที่มอเตอร์กระทำ และ Q_h คือ ความร้อนที่ระบายออกมาภายนอก เมื่อมอเตอร์ทำงานครบรอบจากกฎข้อที่ 1 ทางเทอร์โมไดนามิกส์ จะได้ว่า

$$Q_h = Q_c + W$$

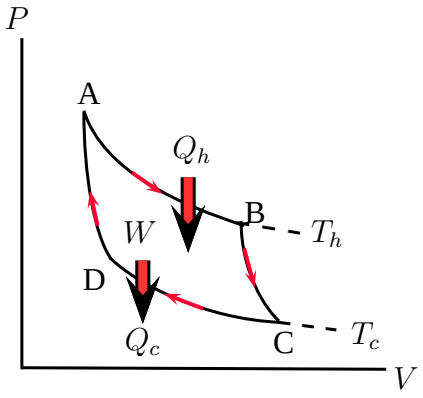
ในที่นี้ ค่า Q และ W กำหนดให้มีค่าเป็นบวก สำหรับการคำนวณเกี่ยวกับเครื่องจักรความร้อน สำหรับตู้เย็นที่ทำงานได้ประหยัดพลังงานที่สุด คือ ตู้เย็นที่ดูดความร้อน Q_c ได้มากที่สุด โดยทำงาน W น้อยที่สุด ดังนั้นเราสามารถกำหนดค่า สัมประสิทธิ์การทำงาน (coefficient of performance, COP) มีค่าเป็นดังนี้

$$\text{COP} = \frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} = \frac{1}{1 - \frac{Q_h}{Q_c}} \tag{9.49}$$

9.13 วัฏจักรคาร์โนท์

เครื่องจักรในทางทฤษฎี คือ เครื่องจักรคาร์โนท์ (Carnot engine) ซึ่งกล่าวไว้ว่า *ไม่มีเครื่องจักรความร้อนจริงใด ๆที่ปฏิบัติการระหว่างแหล่งพลังงานสองแหล่งแล้วได้ประสิทธิภาพกว่ากว่าเครื่องจักรคาร์โนท์* จะเห็นว่า เครื่องจักรคาร์โนท์เป็นเครื่องจักรในอุดมติ ซึ่งประสิทธิภาพ (e) ของการทำงานของเครื่องจักรใด ๆในทางปฏิบัติแล้วจะมีค่าน้อยกว่าประสิทธิภาพของ

เครื่องจักรคาร์โนท์ (e_C) สาเหตุที่ทำให้เครื่องจักรเหล่านี้มีประสิทธิภาพน้อยกว่าเครื่องจักรคาร์โนท์ เนื่องงจากการทำงานไม่ได้ผ่านวัฏจักรที่ผันกลับได้ เพื่อให้เข้าหลักการทำงานของเครื่องจักรคาร์โนท์ พิจารณาการทำงานของวัฏจักรคาร์โนท์ (Carnot cycle) ดังแสดงในรูป 9.17 สมมติว่า สารทำงาน คือ กาซอุดมคติที่บรรจุอยู่ในกระบอกสูบที่มีลูกสูบสามารถ



รูปที่ 9.17: แผนภาพแสดงวัฏจักรคาร์โนท์

เคลื่อนได้ จากแผนภาพ PV ในรูป 9.17 วัฏจักรคาร์โนท์ ประกอบด้วย สองกระบวนการ adiabatic และ สองกระบวนการ isothermal และทุกกระบวนการสามารถผันกลับได้ เราเริ่มต้นด้วยกระบวนการดังต่อไปนี้

1. **กระบวนการ A → B (Adiabatic process)** คือ การขยายตัวของกาซที่อุณหภูมิคงที่ T_h กาซสัมผัสความร้อนกับแหล่งพลังงานความร้อนที่มีอุณหภูมิ T_h จะดูดเอาความร้อน Q_h เข้ามาทางด้านล่างของกระบอกสูบและกาซขยายตัวทำงาน W_{AB} ยกลูกสูบขึ้น

2. **กระบวนการ B → C (Isothermal process)** พื้นด้านล่างลูกจะถูกกั้นด้วยฉนวนกันความร้อน กาซขยายตัวโดยไม่มีการคายความร้อน อุณหภูมิของกาซจะลดลงจาก T_h ไปเป็น T_c เนื่องจากกาซทำงาน W_{BC} ในการยกลูกสูบ

3. **กระบวนการ C → D (Isothermal process)** กาซนำไปสัมผัสความร้อนกับแหล่งพลังงานความร้อนที่มีอุณหภูมิ T_c และอัดลูกสูบโดยที่อุณหภูมิคงที่ ในช่วงนี้ กาซจะคายพลังงานความร้อนออกมา Q_c ให้กับแหล่งพลังงานภายนอก และลูกสูบทำงาน W_{CD}

4. **กระบวนการ D → A (adiabatic process)** พื้นด้านล่างของกระบอกสูบจะถูกกั้นด้วยฉนวนกันความร้อน และกาซถูกอัดตัวโดยไม่มีพลังงานความร้อนไหลเข้าหรือออกจากระบบอุณหภูมิของกาซเพิ่มขึ้นเป็น T_h และงานที่ทำโดยลูกสูบคือ W_{DA}

งานสุทธิ (W) ที่ทำในกระบวนการครบรอบและผันกลับได้นี้มีค่าเท่าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นทาง $ABCD$ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในมีค่าเป็นศูนย์ ($\Delta E_{int} = 0$) ดังนั้นงานสุทธิที่ได้จึงเท่ากับพลังงานความร้อนสุทธิที่ไหลเข้าและออกจากระบบ $Q_h - Q_c$ สัมประสิทธิ์ของการทำงานของเครื่องจักรคาร์โนท์มีค่าเป็น

$$e_C = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \tag{9.50}$$

ตัวอย่างที่ 10 จงแสดงให้เห็นว่าประสิทธิภาพของเครื่องจักรความร้อนที่ปฏิบัติตามวัฏจักรคาร์โนท์โดยใช้กาซอุดมคติมีค่าเป็นตามสมการ 9.50

วิธีทำ จากแผนภาพในรูป 9.17 และสมการของกาซอุดมคติ $PV = nRT$ สำหรับกระบวนการ Isothermal จาก A $\rightarrow$ B จะได้ว่า

$$Q_h = W_{AB} = nRT_h \ln \frac{V_B}{V_A}$$

ในทำนองเดียวกันพลังงานความร้อนที่คายออกจากการเปลี่ยนแปลง C $\rightarrow$ D คือ

$$Q_c = |W_{CD}| = nRT_c \ln \frac{V_C}{V_D}$$

ดังนั้น โดยหาอัตราส่วนระหว่างสองสมการนี้ ทำให้ได้

$$\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c}{T_h} \frac{\ln(V_C/V_D)}{\ln(V_B/V_A)} \tag{(1)}$$

จากความสัมพันธ์ $PV^\gamma = C_1$ เมื่อ C_1 คือ ค่าคงที่ หรือ $\frac{nRT}{V} V^\gamma = C_1$ หรือเขียนใหม่ได้เป็น $TV^{\gamma-1} = \frac{C_1}{nR} = C$ จะเห็นว่าค่าคงที่ nR ถูกรวมเข้าไว้ในค่าคงที่ตัวใหม่คือ C โดยการประยุกต์สมการนี้กับกระบวนการ adiabatic จาก B $\rightarrow$ C และ จาก D $\rightarrow$ A จะได้ว่า

$$T_h V_B^{\gamma-1} = T_c V_C^{\gamma-1}$$
$$T_h V_A^{\gamma-1} = T_c V_D^{\gamma-1}$$

โดยหารสมการแรกด้วยสมการที่สอง เราจะได้

$$(V_B/V_A)^{\gamma-1} = (V_C/V_D)^{\gamma-1}$$
$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \tag{(2)}$$

แทนค่าสมการ (2) ลงในสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c}{T_h}$$

ดังนั้นจากนิยามของ ประสิทธิภาพของเครื่องจักรคาร์โนท์ $e_c = 1 - Q_c/Q_h$ ทำให้ได้ว่า

$$e_C = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

9.14 เอนโทรปีและกฎข้อที่ 2 ของเทอร์โมไดนามิกส์

ที่ผ่านมาเราเห็นแล้วว่ากฎข้อที่ศูนย์ของเทอร์โมไดนามิกส์จะเกี่ยวข้องกับอุณหภูมิ T ส่วนกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์จะเกี่ยวข้องพลังงานภายในระบบ ΔE_{int} ซึ่งทั้ง T และ ΔE_{int} เป็นฟังก์ชันสถานะ (state function) นั่นคือ มันใช้ในการบรรยายสถานะทางเทอร์โมไดนามิกส์ของระบบ สำหรับกฎข้อที่สองทางเทอร์โมไดนามิกส์ ก็จะเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันสถานะ ที่เรียกว่า *เอนโทรปี (entropy)* เขียนแทนด้วย S สำหรับในหัวข้อนี้จะนิยาม เอนโทรปี ในมุมมองระดับมหาภาค ซึ่งถูกเสนอครั้งแรกโดย Clausius ในปี 1865 ซึ่งแสดงไว้ดังนี้

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \tag{9.51}$$

เมื่อ dQ_r คือ พลังงานความร้อนที่มีการถ่ายเทเมื่อระบบมีการเปลี่ยนระหว่างสถานะตามเส้นทางที่ผันกลับได้ นั่นคือ ระบบเปลี่ยนจากสภาวะสมดุลหนึ่งไปยังสภาวะสมดุลอื่นโดยที่กระบวนการเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย ในระหว่างกระบวนการ อุณหภูมิมีค่าที่ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของเอนโทรปี dS จึงขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายแต่จะไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทาง จากสมการ 9.51 เมื่อระบบดูดความร้อนเข้าสู่ระบบ (dQ_r มีค่าเป็นบวก) เอนโทรปีของระบบเพิ่มขึ้น และเมื่อระบบคายความร้อนออกไป (dQ_r มีค่าเป็นลบ) เอนโทรปีของระบบลดลง

เมื่อระบบผ่านสถาวะหนึ่ง i ไปยังสถานะหนึ่ง f โดยกระบวนการผันกลับได้ การเปลี่ยนแปลงของเอนโทรปี คือ

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \tag{9.52}$$

ในกรณีการเปลี่ยนแปลงแบบ adiabatic คือ $dQ = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\Delta S = 0$$

นั่นคือสำหรับกระบวนการ adiabatic ที่ผันกลับได้นั้น เอนโทรปีของระบบมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง

แนวคิดดั้งเดิมของเอนโทรปีมาจากการพัฒนาทฤษฎีทางวิชากลศาสตร์เชิงสถิติ (statistical mechanics) เพื่อจะบรรยายพฤติกรรมของอะตอมหรือโมเลกุลของสสาร ว่าจะมีลักษณะอย่างไรเมื่อการเปลี่ยนแปลงเอนโทรปีของระบบเพิ่มขึ้นหรือลดลง หนึ่งในหลาย ๆผลการ

ศึกษาโดยใช้แนวคิดนี้ คือว่า ระบบโดดเดี่ยวมีแนวโน้มที่อยู่สภาวะที่ไร้ระเบียบ (disorder) และการเปลี่ยนแปลงเอนโทรปีของระบบนี้ก็คือการวัดความไร้ระเบียบ ตัวอย่างเช่น พิจารณาโมเลกุลของกาซในอากาศภายในห้อง ถ้าเราสามาถมองเห็นโมเลกุลของกาซ ก็จะพบทุกโมเลกุลจะเคลื่อนที่แบบสุ่ม (เคลื่อนที่ไปทุกทิศทุกทางด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน) และเกิดการชนกัน ทำให้อัตราเร็วของโมเลกุลเปลี่ยนไปหลังจากการชน บางตัวมีอัตราเร็วสูงขึ้น และอีกบางตัวมีอัตราเร็วลดลง สถาวะแบบนี้เราจะพบว่ามีความไร้ระเบียบสูง เมื่อเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างกฎข้อที่สองกับเอนโทรปี เราอาจกล่าวได้ว่า *กระบวนการใด ๆในธรรมชาติที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด (เกิดขึ้นได้จริง) คือกระบวนการที่ทำให้เอนโทรปีเพิ่มขึ้นหรือมีค่าคงตัว* นั่นคือ

$$\Delta S \geq 0 \tag{9.53}$$

เมื่อ $\Delta S = 0$ สำหรับกระบวนการผันกลับได้ และ $\Delta S \geq 0$ สำหรับกระบวนการที่ผันกลับไม่ได้

9.15 แบบฝึกหัด

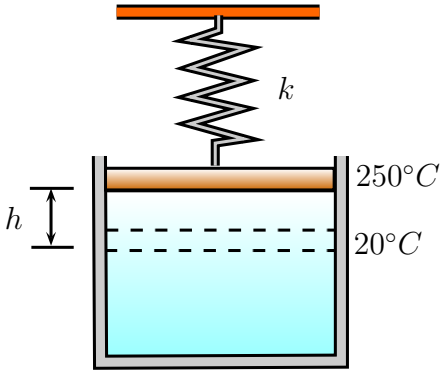
1. แท่งอลูมิเนียมทรงลูกบาศก์มีปริมาตร 1.00 m^3 ที่อุณหภูมิ 20°C จงหาอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปในกาทำให้แท่งอลูมิเนียมมีปริมาตรเพิ่มขึ้นจากเดิมเป็น 100 cm^3

2. แหวนทองคำมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในเป็น 2.168 cm ที่อุณหภูมิ 15°C จงคำนวณหาเส้นผ่านศูนย์กลางภายในของแหวนทองคำนี้ที่อุณหภูมิ 100°C
(กำหนดให้ $\alpha_{gold} = 1.42 \times 10^{-5}$ °C^{-1})

3. กาซบรรจุในภาชนะปริมาตร 8.0 ลิตร ที่อุณหภูมิ 20 °C และความดัน 9.0 atm. จงหา (ก) จำนวนโมลของกาซในภาชนะ และ (ข) จำนวนโมเลกุลของกาซ

4. กระบอกสูบที่มีลูกสูบเคลื่อนที่ได้บรรจุกาซที่อุณหภูมิ 27.0 ° ปริมาตร 1.50 m^3 ความดัน 0.200×10^5 Pa จงหาอุณหภูมิสุดท้ายของกาซขณะที่กาซถูกอัดให้มีปริมาตร0.70 m^3 และความดัน 0.80×10^5 Pa

5. ลูกสูบสามารถขยายตัวได้ที่ฝาปิดด้านบนยึดติดกับสปริงดังรูป ?? ซึ่งมีค่าคงที่สปริง 2.0×10^3 N/m ลูกสูบบรรจุกาซปริมาตร 5.0 ลิตร ที่ความดัน 1.0 atm. และอุณหภูมิ 20.0 °C
(ก) ถ้าฝาปิดมีพื้นที่หน้าตัด 0.010 m^2และมีมวลน้อยมาก ฝาปิดจะยกสูงไปได้เท่าไหร่เมื่ออุณหภูมิถูกทำให้เพิ่มขึ้นเป็น 250 °C
(ข) ความดันของกาซที่อุณหภูมิ 250 °C



รูปที่ 9.18: สำหรับโจทย์ข้อ 5

6. แท่งอะลูมิเนียมยาว 20 cm ที่อุณหภูมิ 20°C มีมวล 350 g ถ้าให้พลังงานความร้อนกับแท่งอะลูมิเนียมขนาด 10000 J ความยาวของแท่งอะลูมิเนียมจะเปลี่ยนไปเท่าใด

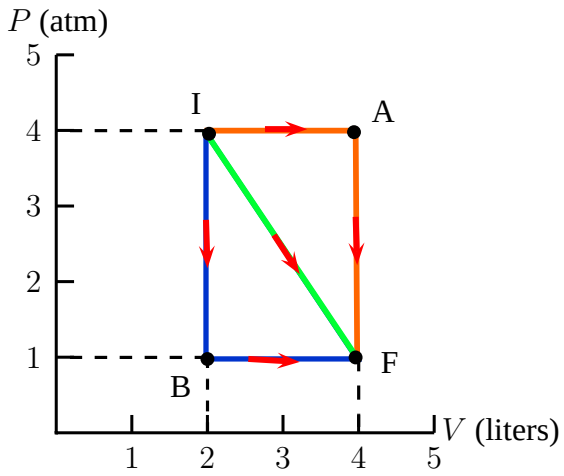
7. ถ้วยอะลูมิเนียมมวล 200 g บรรจุน้ำ 800 g อยู่ในสมดุลความร้อนกับถ้วยอะลูมิเนียมที่อุณหภูมิ 80°C หลังจากนั้นทั้งถ้วยและน้ำถูกทำให้เย็นลงอย่างสม่ำเสมอโดยที่อุณหภูมิลดลงที่ 1.5 °C ต่อนาที จงหาอัตราการส่งผ่านพลังงานมีค่าเป็นเท่าไหร่

8. ก้อนน้ำแข็งมวล 40 g ทำให้เย็นที่อุณหภูมิ -78°C และหลังจากนั้นเติมลงไปในน้ำมวล 560 g ในภาชนะทองแดงมวล 80 g ที่อุณหภูมิ 25°C จงหาอุณหภูมิสุดท้ายของระบบที่ประกอบด้วย ก้อนน้ำแข็ง น้ำและภาชนะที่บรรจุ (ถ้าน้ำแข็งยังไม่หลอมละลายหมดทั้งก้อน จำนวนน้ำแข็งเหลืออยู่เท่าไหร่) ข้อสังเกตุคือว่าน้ำแข็งจะต้องถูกทำให้อุ่นขึ้นก่อนอันดับแรกที่อุณหภูมิ 0°C แล้วค่อยละลายและหลังจากนั้นก็กลายเป็นน้ำอุ่น ๆ ถ้าค่าความจุความร้อนจำเพาะของน้ำแข็ง 0.500 cal/g°C = 2090 J/kg°C

9. กล่องใบหนึ่งมีพื้นที่ผิวทั้งหมด 1.20 m^2 และผนังมีความหนา 4.0 cm ทำมาจากวัสดุกันความร้อนเครื่องทำความร้อนขนาด 10.0 W อยู่ภายในกล่องเพื่อทำให้อุณหภูมิภายในมีค่าเป็น 15 °C มากกว่าอุณหภูมิด้านนอกจงหาค่าความนำความร้อน k ของวัสดุกันความร้อนนี้

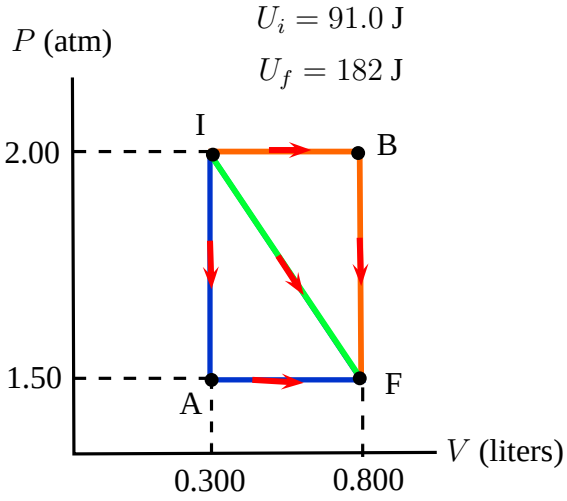
10. กาซชนิดหนึ่งขยายตัวจากตำแหน่ง I ไปยังตำแหน่ง F ตามเส้นทาง 3 เส้นทางดังรูป 9.19 จงคำนวณหางานที่ทำต่อกาซตามเส้นทาง (ก) IAF, (ข) IF และ (ค) IBF

11. กาซถูกอัดที่ความดันคงที่ 0.8 atm จากปริมาตร 9.0 ลิตรไปเป็น 2.0 ลิตร ในกระบวนการนี้ พลังงานความร้อนที่ปล่อยออกมา 400 J (ก) งานที่ทำต่อกาซเป็นเท่าไหร่ และ (ข) พลังงานภายในระบบเปลี่ยนไปเท่าใด



รูปที่ 9.19: สำหรับโจทย์ข้อ 10

12. กาซหนึ่งโมลในตอนเริ่มต้นอยู่ที่ความดัน 2.0 atm และปริมาตร 0.30 ลิตร มีพลังงานภายในระบบเท่ากับ 91.0 J ในสถานะสุดท้าย กาซมีความดัน 1.50 atm และปริมาตร 0.80 ลิตร มีพลังงานภายในระบบเท่ากับ 180.0 J สำหรับแต่เส้นทาง IAF, IBF, และ IF ในรูปที่ 9.20 จงคำนวณหา
(ก) งานที่ทำต่อกาซ
(ข) พลังงานความร้อนที่ส่งผ่านในกระบวนนี้



รูปที่ 9.20: สำหรับโจทย์ข้อ 12

ภาคผนวก ก

ค่าคงที่ทางฟิสิกส์

ชื่อค่าคงที่	สัญลักษณ์	ค่าในหน่วย SI
ค่าคงที่ในกฎการโน้มถ่วง	G	$6.6725985 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$
ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่ผิวโลก	g	9.80665 $\mathrm{m/s^2}$
ค่าประจุของอิเล็กตรอน	e	$1.60217733 \times 10^{-19}$ C
เลขอาโวกาโดร	N_A	6.0221367×10^{23} $\mathrm{mol^{-1}}$
ค่าคงที่ของกาซสากล	R	8.314510 J/mol.K
ค่าคงที่ของโบลทซมันน์	k_B	1.380658×10^{-23} J/K
มวลของอิเล็กตรอน	m_e	$9.1093897 \times 10^{-31}$ kg
มวลของโปรตอน	m_p	1.672623×10^{-27} kg
มวลของนิวตรอน	m_n	$1.6749286 \times 10^{-27}$ kg

ภาคผนวก ข

ตัวย่อและสัญลักษณ์สากลสำหรับหน่วยวัด

สัญลักษณ์	หน่วย
J	จูล (joule)
K	เคลวิน (kelvin)
kcal	กิโลแคลรอรี (kilocalorie)
kg	กิโลกรัม (kilogram)
°C	องศาเซลเซียส (degree Celsius)
kmol	กิโลโมล (kilomole)
cal	แครอรี (calorie)
m	เมตร (meter)
°F	องศาฟาเรนไฮต์ (deegree Fahrenheit)
min	นาที (minute)
g	กรัม (gram)
mol	โมล (mol)
h	ชั่วโมง (hour)
N	นิวตัน (newton)
Hz	เฮิร์ทซ (hertz)
Pa	พาสคาล (pascal)
s	วินาที (second)
W	วัตต์ (watt)

บรรณานุกรม

[1] Raymond, A. S., Robert, J. B., and John, W. J., *Physics for Scientists and Engineers 5th Edition*, Saunders College Publishing, 2000.

[2] Hugh, D. Y., and Roger, A. F., *University Physics with Modern Physics 12th Edition*, Pearson Addison-Wesley, 2008.

[3] ทบวงมหาวิทยาลัย, *ฟิสิกส์ เล่ม 1*, ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2527.

[4] ภาควิชา ฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, *ฟิสิกส์ 1*, สำนักพิมพ์ แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549.

[5] วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ์, *ฟิสิกส์ (กลศาสตร์)*,โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน, 2552.

ดรรชนี

กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์, 187
กฎลูกโซ่, 6
กฎการนำความร้อน, 192
กฎของกาซอุดมคติ, 181
กฎของชาร์ล, 180
กฎของบอยส์, 180
กฎของพาสคาล, 160
กฎของฮุกค์, 68
กฎข้อที่ 1 ของนิวตัน, 43
กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน, 44
กฎข้อที่ 3 ของนิวตัน, 46
กฎข้อที่สองของเทอร์โมไดนามิกส์, 206
กฎมือขวา, 20
กรอบอ้างอิง, 38
กรอบเฉื่อย, 43
กระบวนการครบรอบ, 188, 205
กระบวนการผันกลับไม่ได้, 206
กระบวนการอะไดบาติก, 188
กระบวนการไอโซบาริค, 188
กระบวนการไอโซวอลูเมตริค, 188
กระบวนการไอโซเทอร์มอล, 189
กาซอุดมคติ, 179
การขยายตัวเชิงความร้อน, 178
การคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น, 87
การคูณเวกเตอร์, 19
การชนแบบ 2 มิติ, 93
การตกอย่างอิสระ, 28
การนำความร้อน, 191
การบวกเวกเตอร์, 14
การพาความร้อน, 194
การลบเวกเตอร์, 16
การออสซิลเลตแบบมีแรงกระตุ้น, 151
การเคลื่อนที่แบบ 2 มิติ, 31
การเคลื่อนที่แบบวงกลม, 37, 54
การแผ่รังสี, 194
การกระจัด, 20
การกระจัดเชิงมุม, 104
การกลิ้ง, 119
การกำทอน, 152
การคูณแบบสเกลาร์, 19
การคูณแบบเวกเตอร์, 19
การชนแบบยืดหยุ่น, 90
การชนแบบไม่ยืดหยุ่น, 91
การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์, 91
การดล, 89
การสั่น, 137
การส่าย, 127
การหมุน, 119
การอนุรักษ์พลังงานเชิงกล, 77
การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม, 124
การออสซิลเลตแบบมีความหน่วง, 148
การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกส์, 137
การเคลื่อนที่แบบมีความหน่วง, 137
การเคลื่อนที่แบบออสซิลเลต, 137
การเลื่อนตำแหน่ง, 119
กำลัง, 73, 118
กำลังเฉลี่ย, 73

ของไหล, 157

ความร้อนแฝง, 182
ความเร่ง, 24
ความคลาดเคลื่อน, 2
ความจุความร้อน, 182
ความชัน, 25
ความถี่, 139
ความถี่กำทอน, 152
ความถี่ธรรมชาติ, 149
ความถี่เชิงมุม, 138
ความร้อน, 177, 181
ความร้อนจำเพาะ, 182
ความร้อนจำเพาะโมลาร์, 200
ความร้อนแฝงของการกลายเป็นไอ, 183
ความร้อนแฝงของการหลอมเหลว, 183
ความหนาแน่น, 158
ความเฉื่อย, 43
ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง, 22
ความเร็วสัมพัทธ์, 38
ความเร็วเฉลี่ย, 21
ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย, 104
ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง, 37, 55
ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ย, 104
ความเร่งโน้มถ่วง, 28
ความเร่งในแนวเส้นสัมผัส, 55
ความไร้ระเบียบ, 211
ความดัน, 157
ความดันของกาซ, 197
ความดันของไหล, 159
ความดันบรรยากาศ, 158
ความดันสัมบูรณ์, 161
ความดันเกจ, 161
คาบ, 138
ค่าคงมุมเฟส, 138
ค่าคงตัวของกาซสากล, 181
ค่าคงที่ของการปลดปล่อย, 194
ค่าคงที่ของสปริง, 137
ค่าคงที่ของโบลต์ซมันท์, 181

งาน, 65, 118

จลศาสตร์, 13
จุดศูนย์กลางมวล, 95
จุดศูนย์กลางมวล, 98

ทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์, 69
ทฤษฎีจลน์ของกาซ, 195
ทฤษฎีการแบ่งเท่ากันพลังงาน, 198
ทฤษฎีแกนขนาน, 109
ทอร์ค, 113

บารอมิเตอร์, 161

ประสิทธิภาพเชิงความร้อน, 206

พลวัติของไหล, 166
พลังงานจลน์ของการหมุน, 107
พลังงานศักย์ยืดหยุ่น, 76
พลังงานเชิงกล, 76
พลังงานจลน์, 70, 90
พลังงานภายในระบบ, 182
พลังงานศักย์, 75
พลังงานศักย์โน้มถ่วง, 76

มวลโมลาร์, 179
มาโนมิเตอร์, 161

ระบบ, 181
ระบบอนุภาค, 98
ระบบโดดเดี่ยว, 99
ระบบปิด, 188
ระยะวิถีอิสระ, 203
ระยะทาง, 21
ระยะทางเชิงมุม, 103
ระยะพิสัย, 33

ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย, 144

ลูกตุ้มฟิสิคัล, 146

วัฏจักรคาร์โนท์, 208
วัตถุดำ, 195
วัตถุแข็งเกร็ง, 103

สเกลาร์, 13
สภาพการนำความร้อน, 192
สภาวะสมดุล, 43
สมการความต่อเนื่อง, 167
สมการแบร์นูลลี, 168
สมการความต่อเนื่อง, 168
สมการสถานะ, 179, 189
สมดุลสถิต, 128
สมดุลเชิงความร้อน, 177
สัมประสิทธิ์การทำงาน, 207
สัมประสิทธิ์ของการขยายตัว, 178
สัมประสิทธิ์ของความหน่วง, 148
สัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน, 52
สัมผัสเชิงความร้อน, 177
สายกระแส, 167
สิ่งแวดล้อม, 182

หลักของอาคีมีดีส, 163

อนุพันธ์, 5
อัตราการไหล, 168
อัตราเร็วเฉลี่ย, 21
อัมปลิจูด, 137, 138
อินทิกรัล, 7
อินทิกรัล, 109
อุณหภูมิ, 177

เครื่องทำความเย็น, 206
เครื่องจักรความร้อน, 205
เทอร์โมไดนามิกส์, 177
เลขนัยสำคัญ, 2
เลขอาโวกาโดร, 179

เวกเตอร์, 13
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย, 17
เวกเตอร์บอกตำแหน่ง, 31
เอนโทรปี, 210

แบบจำลองของกาซอุดมคติ, 195
แฟคเตอร์คุณภาพ, 152
แรงเสียดทาน, 50, 70
แรงกิริยา, 46
แรงดึงกลับ, 76
แรงดึงกลับของสปริง, 137
แรงปฏิกิริยา, 46
แรงภายนอก, 99
แรงภายใน, 99
แรงลอยตัว, 163
แรงอนุรักษ์, 77
แรงเสียดทานจลน์, 52
แรงเสียดทานสถิต, 52
แรงไม่อนุรักษ์, 77

โปรเจกไทล์, 32
โมเมนตัมเชิงเส้น, 87
โมเมนตัมเชิงมุม, 122
โมเมนต์ความเฉื่อย, 107

ไจโรสโคป, 127
ไดเมนชันส์, 3