

บทที่ 3

แรงและกฎการเคลื่อนที่

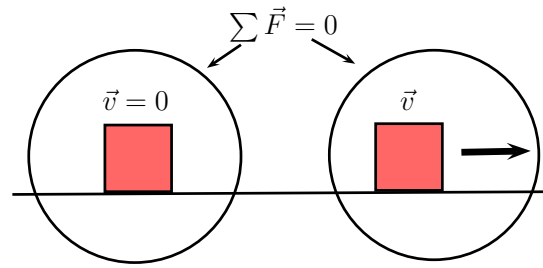
3.1 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

3.1.1 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน

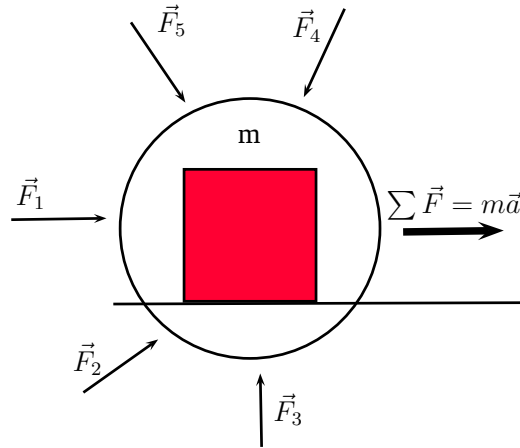
กฎข้อที่ 1 ของนิวตัน กล่าวว่าเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุวัตถุที่หยุดนิ่งก็จะหยุดนิ่งต่อไปและวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ก็จะเคลื่อนที่ต่อไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่นั่นคือวัตถุจะรักษาสภาพการเคลื่อนที่ตามเดิมตราบใดที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำหรือแรงลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ในสภาวะการณ์แบบนี้กล่าวได้ว่าวัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล และเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (3.1)$$

แนวโน้มของวัตถุในการต้านสภาพการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงภายนอกมากระทำเรียกว่าความเฉื่อย (Inertia) และมวลเป็นสมบัติของวัตถุที่บ่งบอกว่าวัตถุนั้นมีความเฉื่อยมากน้อยแค่ไหนซึ่งเป็นสมบัติที่ไม่ขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมและวิธีการวัด สำหรับการวัดในระบบมาตรฐานสากล (SI unit) มวลมีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg) ดังนั้นวัตถุใดที่มีมวลมากจะมีความเฉื่อยมาก นั่นหมายความว่าต้องใช้แรงมากเพื่อที่จะทำให้วัตถุมีการเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่และจากกฎข้อที่ 1 ถ้าแรงลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์กระทำต่อวัตถุวัตถุจะไม่มี ความเร่งหรือความเร่งเป็นศูนย์ ($\vec{a} = 0$) ในการบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุจะต้องมีกรอบอ้างอิง ที่เรียกว่ากรอบเฉื่อย (Inertia frame) ซึ่งเป็นกรอบอ้างอิงที่ไม่มีความเร่ง ดังนั้น กฎข้อที่ 1 ของนิวตันจึงเรียกอีกอย่างว่าเป็นกฎแห่งความเฉื่อย



รูปที่ 3.1: วัตถุหยุดนิ่งอยู่กับที่ ($\vec{v} = 0$) หรือ เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วคงตัว ($\vec{v} =$ ค่าคงที่)



รูปที่ 3.2: แรงลัพธ์ที่เกิดจากการรวมแบบเวกเตอร์ของแรงย่อย $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$ มีค่าไม่เป็นศูนย์กระทำต่อวัตถุทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยความเร่ง $\vec{a}$

3.1.2 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

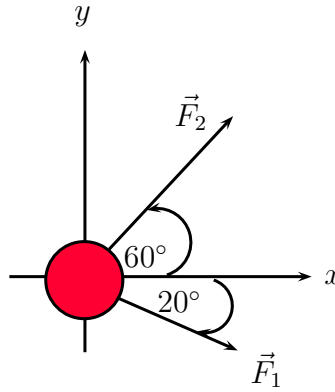
กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน กล่าวว่า เมื่อมีแรงลัพธ์ที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำกระทำวัตถุวัตถุจะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร่งโดยที่ความเร่งนั้นจะแปรผันตรงกับแรงลัพธ์ที่มากระทำและแปรผันผกผันกับมวลวัตถุ ดังสมการที่ 3.2 ความเร่งของวัตถุจะมีทิศทางเดียวกับทิศของแรงลัพธ์ ดังรูปที่ 3.2

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (3.2)$$

เมื่อ $\vec{a}$ คือ ความเร่ง และ m คือ มวลวัตถุและจากสมการที่ 3.2 อาจจะเขียนในรูปแบบของแรงองค์ประกอบตามแกน x, y และ z ได้ดังนี้

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z \quad (3.3)$$

ในระบบ SI แรงมีหน่วยเป็น นิวตัน (N) โดยที่ $1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m/s}^2$



รูปที่ 3.3: อนุภาคมวล m ถูกแรงสองแรงกระทำให้เคลื่อนที่ในระนาบ xy

ตัวอย่างที่ 1 อนุภาคอันหนึ่งมีมวล 0.3 kg ถูกแรงสองแรงกระทำดังรูป 3.3 แรง $\vec{F}_1$ มีขนาด 5.0 N และแรง $\vec{F}_2$ มีขนาด 8.0 N จงหาขนาดและทิศทางของความเร่งของอนุภาคนี้

วิธีทำ แรงลัพธ์ที่กระทำในแนวแกน x คือ

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos(-20^\circ) + F_2 \cos 60^\circ \\ &= (5.0)(0.940) + (8.0)(0.500) = 8.7 \text{ N}\end{aligned}$$

แรงลัพธ์ในแนวแกน y คือ

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin(-20^\circ) + F_2 \sin 60^\circ \\ &= (5.0)(-0.342) + (8.0)(0.866) = 5.2 \text{ N}\end{aligned}$$

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันในรูปแบบของแรงลัพธ์องค์ประกอบตามแกน x และ y ทำให้ได้ความเร่งองค์ประกอบตามแกนดังกล่าวเป็นดังนี้

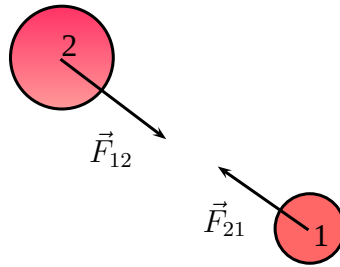
$$\begin{aligned}a_x &= \frac{\sum F_x}{m} = \frac{8.7}{0.30} = 29 \text{ m/s}^2 \\ a_y &= \frac{\sum F_y}{m} = \frac{5.2}{0.30} = 17 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

ดังนั้น ขนาดของความเร่งจึงมีค่าเป็น

$$a = \sqrt{(29)^2 + (17)^2} = 34 \text{ m/s}^2$$

และมีทิศเทียบกับแกน $+x$ คือ

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a_y}{a_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{17}{29} \right) = 30^\circ$$



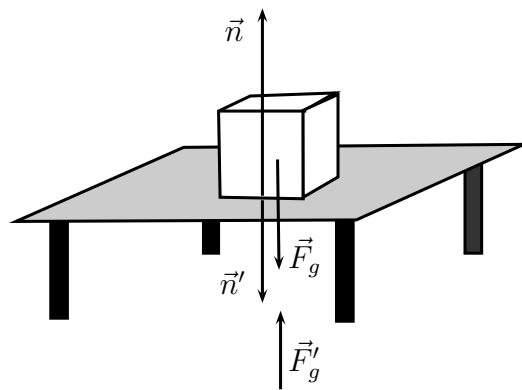
รูปที่ 3.4: วัตถุ 1 และวัตถุ 2 ออกแรงดึงดูดซึ่งกันและกันด้วยขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้าม

3.1.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน

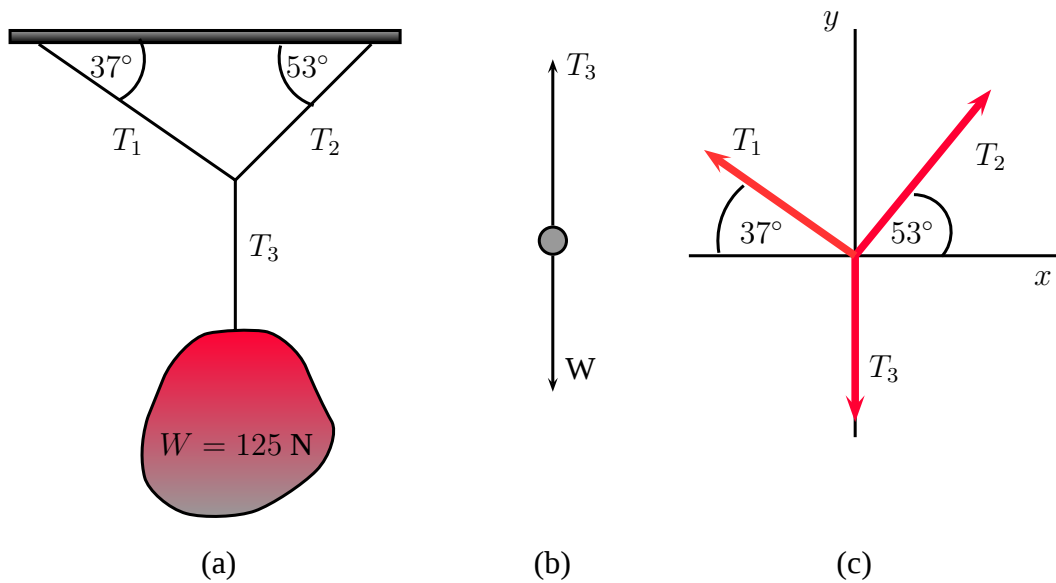
กฎข้อที่ 3 ของนิวตัน กล่าวว่า ถ้าวัตถุสองอันมีอันตรกิริยาต่อกัน แรงที่วัตถุ 1 กระทำต่อวัตถุ 2 ($\vec{F}_{12}$) มีขนาดเท่ากับแรงที่วัตถุ 2 กระทำต่อวัตถุ 1 ($\vec{F}_{21}$) แต่มีทิศตรงกันข้าม นั่นคือ

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.4)$$

เมื่อ $\vec{F}_{12}$ เป็นแรงกิริยา (Action force) และ $\vec{F}_{21}$ เป็นแรงปฏิกิริยา (Reaction force) แรงสองแรงนี้เป็นแรงคู่กิริยาซึ่งกระทำที่วัตถุคนละอันดังรูปที่ 3.4 พิจารณากล่องใบหนึ่งวางนิ่งอยู่บนโต๊ะดังรูปที่ 3.5 เราสามารถระบุแรงคู่กิริยาได้ดังนี้คือ แรงที่กล่องกดลงบนพื้นโต๊ะ ($\vec{n}$) จะมีแรงปฏิกิริยาเป็น แรงที่พื้นโต๊ะดันกล่อง ($\vec{n}'$) ในขณะที่แรงกิริยาที่โลกดึงดูดกล่องเข้าหา ($\vec{F}_g$) จะมีแรงปฏิกิริยาเป็นแรงที่กล่องดึงดูดโลกเข้าหา ($\vec{F}'_g$) แต่จะเห็นว่า แรง $\vec{n}$ กับแรง $\vec{F}_g$ ไม่ใช่แรงคู่กิริยา เพราะว่าแรงทั้งสองกระทำที่วัตถุอันเดียวกัน นั่นคือ $\vec{F}_g = -\vec{F}'_g$ และ $\vec{n} = \vec{n}'$



รูปที่ 3.5: แสดงแรงคู่กิริยาของกล่องลูกบาศก์ที่วางอยู่บนโต๊ะ



รูปที่ 3.6: (a) วัตถุหนัก 125 N แวนอยู่หนึ่งด้วยเส้นเชือกสามเส้น (b) และ (c) แสดงแผนภาพวัตถุอิสระที่แรงกระทำต่อกันวัตถุและจุดเชื่อมต่อของเส้นเชือกทั้งสามตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2 วัตถุก้อนหนึ่งหนัก 120 N แวนอยู่หนึ่งด้วยเส้นเชือกดังรูป 3.6 จงหาขนาดแรงดึงในเส้นเชือกทั้งสามเส้นนี้

วิธีทำ เมื่อวัตถุหยุดนิ่งแสดงว่าแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือวัตถุอยู่ในสมดุล ดังนั้นจากกฎข้อที่ 1 ของนิวตัน จะได้ว่า $\sum \vec{F} = 0$ หรือ

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

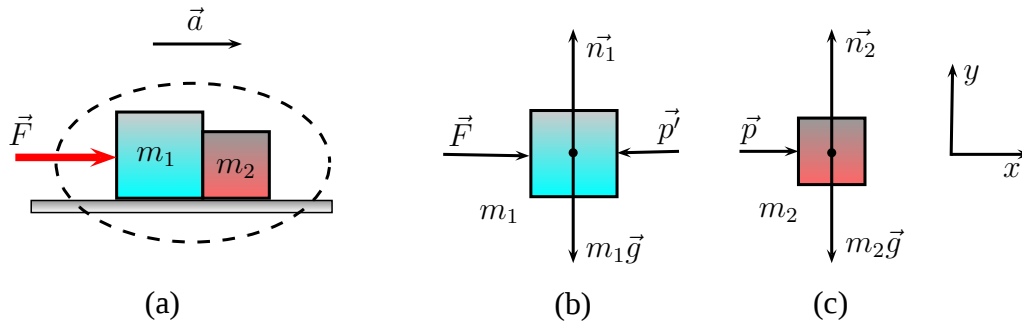
พิจารณาในรูป (b) จะได้ว่า

$$\sum F_y = T_3 = W = 125 \text{ N}$$

และในทำนองเดียวกัน จากรูป (c) จะได้

$$\sum F_x = -T_1 \cos 37^\circ + T_2 \cos 50^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = T_1 \sin 37^\circ + T_2 \sin 53^\circ - T_3 = 0 \quad (2)$$



รูปที่ 3.7: (a) วัตถุมวล m_1 และ m_2 ถูกผลักด้วยแรงที่คงที่ให้เคลื่อนไปตามแนวราบ (b) และ (c) แสดงแผนภาพของแรงกระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ

จากสมการ (1) หาค่า T_2 ในเทอม T_1 จากนั้นนำไปแทนลงในสมการ (2) เพื่อหา T_1 และ T_2 ดังนี้

$$T_2 = T_1 \left(\frac{\cos 37^\circ}{\cos 53^\circ} \right) = 1.33 T_1$$

$$T_1 \sin 37^\circ + 1.33 T_1 \sin 53^\circ - 125 = 0$$

$$T_1 = 75.1 \text{ N, และ } T_2 = 99.9 \text{ N}$$

ตัวอย่างที่ 3 มวล m_1 และ m_2 วางติดกันอยู่บนพื้นราบที่ไม่มีความเสียดทาน ถ้าออกแรงขนาดคงที่ F ผลักวัตถุออกไปตามแนวระดับดังรูป 3.7 จงหาขนาดความเร่งของวัตถุทั้งสอง และแรงกระทำระหว่างวัตถุ

วิธีทำ พิจารณาในรูป (a) ความเร่งของวัตถุทั้งสองเท่ากันเนื่องจากวัตถุทั้งสองเคลื่อนไปพร้อมกัน ดังนั้น จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้ว่า

$$\sum F_x(\text{system}) = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

ขนาดของแรงที่กระทำระหว่างวัตถุทั้งสองหาได้โดยการเขียนแผนภาพของแรงลงบนวัตถุแต่ละอันดังรูป (b) และ (c) ซึ่งจะเห็นว่าแรง p กับ p' เป็นแรงภายในระบบ โดยพิจารณาจากรูป (c) เราจะได้ว่า

$$\sum F_x = p = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F$$

และโดยกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน สองแรงนี้เป็นแรงคู่กิริยาซึ่งมีขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้าม นั่นคือ

$$p = p' = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F$$

ตัวอย่างที่ 4 วัตถุสองอันมีมวล m_1 และ m_2 แขวนด้วยเส้นเชือกและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืดดังรูป 3.8 จงหาขนาดของความเร่งของวัตถุทั้งสองและขนาดแรงตึงในเส้นเชือก

วิธีทำ จากรูป (a) วัตถุทั้งสองจะมีขนาดความเร่งเท่ากัน โดยใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตันกับการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_1 และมวล m_2 ได้ดังนี้ (ดูรูป (b) ประกอบ)

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y \quad (1)$$

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_y \quad (2)$$

นำสมการ (1) บวกกับสมการ (2) จะได้

$$\begin{aligned} -m_1 g + m_2 g &= m_1 a_y + m_2 a_y \\ a_y &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g \end{aligned} \quad (3)$$

แทนค่าความเร่งจากสมการ (3) ลงในสมการ (1) หรือสมการ (2) ทำให้ได้ค่าแรงตึงในเส้นเชือก

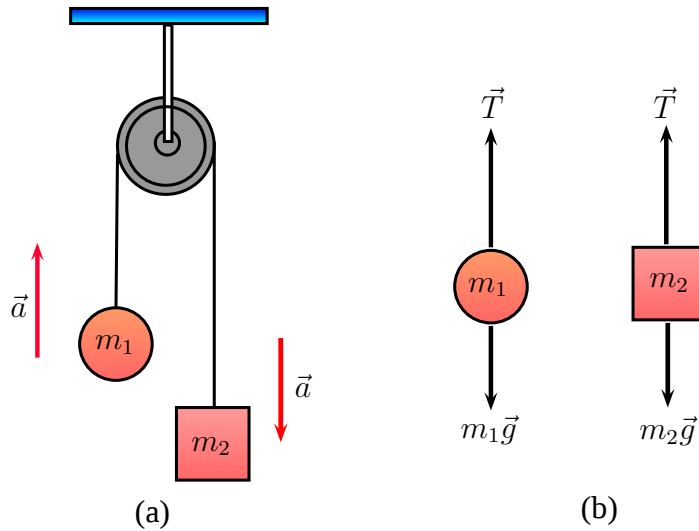
$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

ตัวอย่างที่ 5 วัตถุสองอันมีมวล m_1 และ m_2 ผูกติดกันด้วยเส้นเชือกมวลเบาและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืดปล่อยให้วัตถุมวล m_2 ไถลลงตามพื้นเอียงดังรูป 3.8 สมมติพื้นเอียงไม่มีความฝืด จงหาขนาดของความเร่งของวัตถุทั้งสองและขนาดแรงตึงในเส้นเชือก

วิธีทำ พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_1 จะได้ว่า

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a \quad (2)$$



รูปที่ 3.8: (a) วัตถุมวล m_1 และ m_2 ผูกติดกันด้วยเชือกมวลเบาและคล้องผ่านรอกในแนวดิ่ง (b) แสดงแผนภาพของแรงกระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_2 และใส่แกนพิกัดให้เหมาะสม (ในที่นี้เลือกให้แกน x' ขนานกับพื้นเอียง) ทำให้ได้

$$\sum F_{x'} = m_2 g \sin \theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a \quad (3)$$

$$\sum F_{y'} = n - m_2 g \cos \theta = 0 \quad (4)$$

จากสมการ (2) แก้สมการเพื่อหาค่า T และนำค่าที่ได้ลงไปแทนในสมการ (3) เราจะได้ขนาดของความเร่งดังนี้

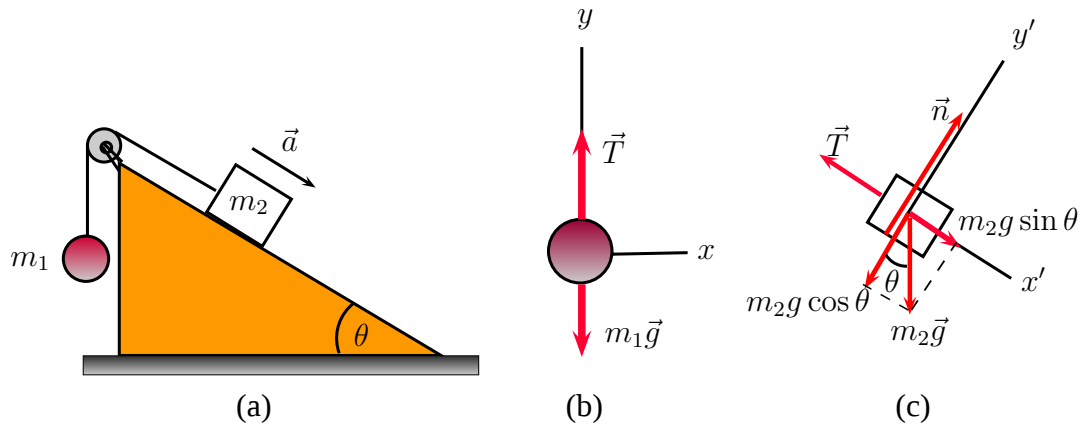
$$a = \frac{m_2 g \sin \theta - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

จากนั้นนำค่าความเร่งที่ได้แทนกลับลงในสมการ (2) จะได้ค่าแรงตึงในเส้นเชือก

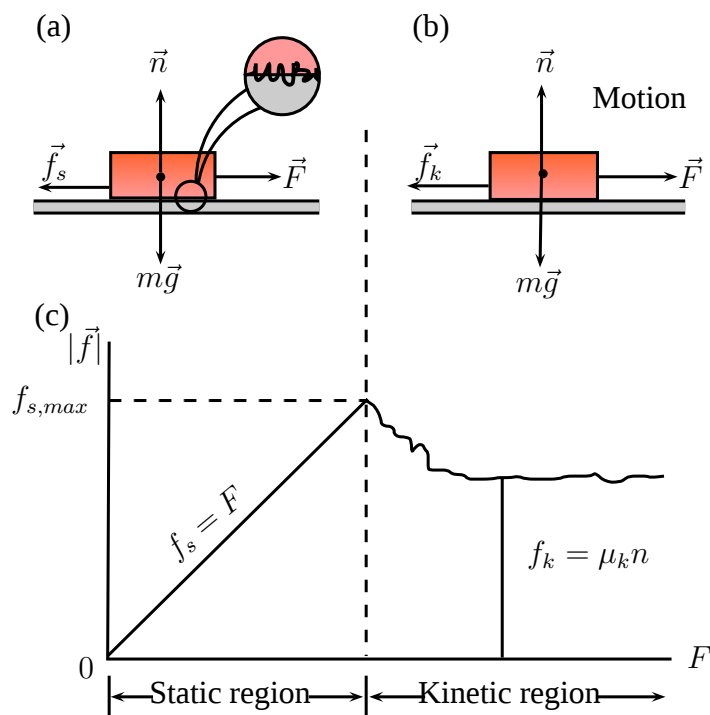
$$T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \theta + 1)}{m_1 + m_2}$$

3.2 แรงเสียดทาน (Forces of Friction)

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่บนพื้นผิวหรือเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่มีความหนืด เช่น อากาศ น้ำ เป็นต้น จะมีความต้านทานการเคลื่อนที่เกิดขึ้นเนื่องจากวัตถุมีอันตรกิริยากับสิ่งที่อยู่รอบๆ วัตถุ แรง



รูปที่ 3.9: (a) ระบบวัตถุมวล m_1 และ m_2 ที่ผูกติดกันด้วยเชือกมวลเบาและคล้องผ่านรอกซึ่งติดอยู่ที่ปลายด้านบนของพื้นเอียงและ (b) และ (c) แสดงแรงที่กระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ



รูปที่ 3.10: แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสอง (a) แรงเสียดทานสถิต (b) แรงเสียดทานจลน์ และกราฟแสดงผลการทดลองระหว่างแรงเสียดทานกับแรงจากภายนอก

ด้านที่เกิดขึ้นนี้ เรียกว่า แรงเสียดทาน (frictional force) ในกรณีของวัตถุที่เคลื่อนที่บนพื้นผิวใดๆ แรงเสียดทานนี้จะขึ้นอยู่กับผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสอง และมีทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่เสมอ สำหรับการเคลื่อนที่ใด แรงเสียดทานมี 2 ชนิด คือ แรงเสียดทานสถิต (static frictional force, $\vec{f}_s$) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อวัตถุหยุดนิ่ง และ แรงเสียดทานจลน์ (kinetic frictional force, $\vec{f}_k$) เป็นแรงที่เกิดขึ้นขณะที่วัตถุมีการเคลื่อนที่ ดังรูปที่ 3.10 และผลจากทดลองแสดงให้เห็นว่าแรงเสียดทานสถิตที่เกิดขึ้นจะแปรผันตรงกับการเพิ่มขึ้นของแรงภายนอก (Applied force, F) และเพิ่มขึ้นจนถึงค่าสูงสุดของแรงเสียดทานสถิต ($\vec{f}_{s,max}$) ซึ่ง ณ จุดนี้เองวัตถุจะเริ่มจะขยับที่จะเคลื่อนที่ และหลังจากจุดนี้ขนาดของแรงเสียดทานจะลดลงและคงที่ ในช่วงนี้วัตถุจะเคลื่อนที่ได้อยู่ภายใต้แรงเสียดทานจลน์ (ดูรูป 3.10(c) ประกอบ) และในการทดลองยังพบว่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุดและแรงเสียดทานจลน์จะแปรผันตรงกับความยาวของแรงตั้งฉาก (Normal force, $\vec{n}$) นั่นคือแรงเสียดทานสถิตสูงสุดมีค่าเท่ากับ

$$\vec{f}_{s,max} = \mu_s \vec{n} \quad (3.5)$$

และแรงเสียดทานจลน์มีค่าเท่ากับ

$$\vec{f}_k = \mu_k \vec{n} \quad (3.6)$$

เมื่อ μ_s และ μ_k คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตและค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ ตามลำดับ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสองนี้จะขึ้นอยู่กับธรรมชาติของผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสอง

ตัวอย่างที่ 6 วัตถุมวล m วางหยุดนิ่งอยู่ที่ปลายด้านบนพื้นเอียงดังรูป 3.11 พื้นเอียงมีความเสียดทาน จงหาว่ามุมเอียงจะมีค่าเป็นเท่าไรจึงจะทำให้วัตถุนี้เริ่มที่จะเคลื่อนที่

วิธีทำ ในขณะที่วัตถุหยุดนิ่ง จากกฎของนิวตันข้อที่ 1 จะได้ว่า

$$\sum F_x = mg \sin \theta - f_s = ma_x = 0 \quad (1)$$

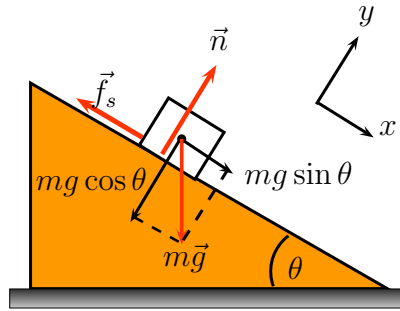
$$\sum F_y = n - mg \cos \theta = ma_y = 0 \quad (2)$$

จากสมการ (2) จะได้ $mg = \frac{n}{\cos \theta}$ และนำไปแทนลงในสมการ (1) ทำให้ได้

$$f_s = mg \sin \theta = \left(\frac{n}{\cos \theta} \right) \sin \theta = n \tan \theta \quad (3)$$

เมื่อวัตถุเริ่มจะเคลื่อนที่แสดงว่าขนาดของแรงเสียดทานสถิตมีค่าสูงสุด นั่นคือ

$$f_s = f_{s,max} = \mu_s n$$



รูปที่ 3.11: วัตถุมวล m เริ่มจะเคลื่อนที่ตามพื้นเอียงที่มีความเสียดทาน

จากสมการที่ (3) ทำให้ได้มุมเอียงที่จะทำให้วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ (θ_c) ดังนี้

$$f_{s,max} = \mu_s n = n \tan \theta_c$$

$$\mu_s = \tan \theta_c$$

$$\theta_c = \tan^{-1}(\mu_s)$$

ตัวอย่างที่ 7 มวล m_1 วางอยู่บนพื้นที่มีความเสียดทาน นำมาผูกด้วยเชือกและคล้องผ่านรอกที่ไม่มีความฝืด ปลายอีกด้านของเชือกผูกติดกับวัตถุมวล m_2 เมื่อออกแรงดึงวัตถุ m_1 ขนาด F นิวตันทำมุม θ กับแนวระดับดังรูปที่ 3.12 จงหาขนาดความเร่งของวัตถุทั้งสอง สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานจลน์ระหว่างผิววัตถุ m_1 กับพื้นมีค่าเท่ากับ μ_k

วิธีทำ พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m_1 ในแนวแกน x และแกน y จะได้ว่า

$$\sum F_x = F \cos \theta - f_k - T = m_1 a_x = m_1 a \quad (1)$$

$$\sum F_y = n + F \sin \theta - m_1 g = 0 \quad (2)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับการเคลื่อนที่ของมวล m_2 จะได้ว่า

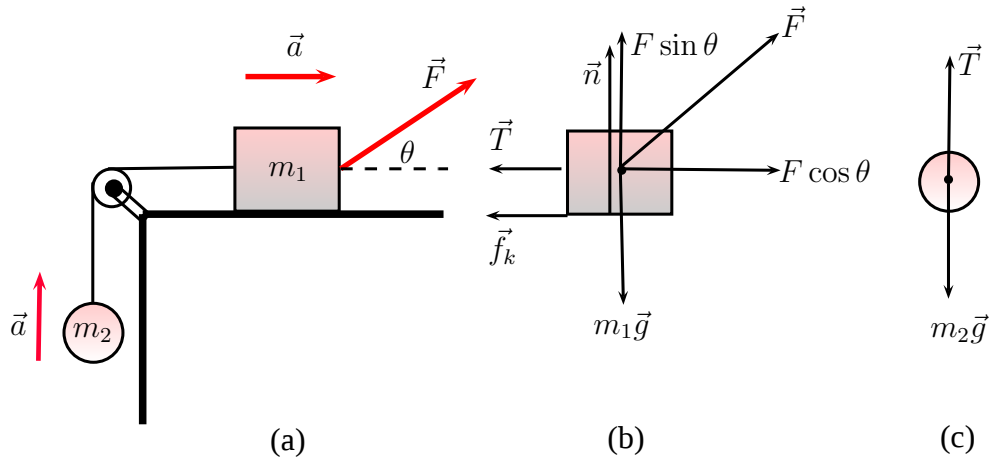
$$\sum F_x = m_2 a_x = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = m_2 a \quad (4)$$

จากสมการ (4) ทำให้ได้ $T = m_2(a + g)$ และจากแรงเสียดทานจลน์ $f_k = \mu_k n$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ (1) ทำให้ได้

$$F \cos \theta - \mu_k n - m_2(a + g) = m_1 a$$

$$F \cos \theta - \mu_k(m_1 g - F \sin \theta) - m_2(a + g) = m_1 a \quad (5)$$



รูปที่ 3.12: (a) ออกแรงดึงมวล m_1 ให้เคลื่อนที่บนพื้นที่มีความเสียดทานและ มวล m_1 ผูกต่อกับมวล m_2 ด้วยเส้นเชือกมวลเบา (b) และ (c) แสดงแผนภาพของแรงที่กระทำต่อวัตถุแต่ละอันตามลำดับ

โดยการแก้สมการ (5) เพื่อหาค่าความเร่งของวัตถุทั้งสองทำให้ได้เป็นดังนี้

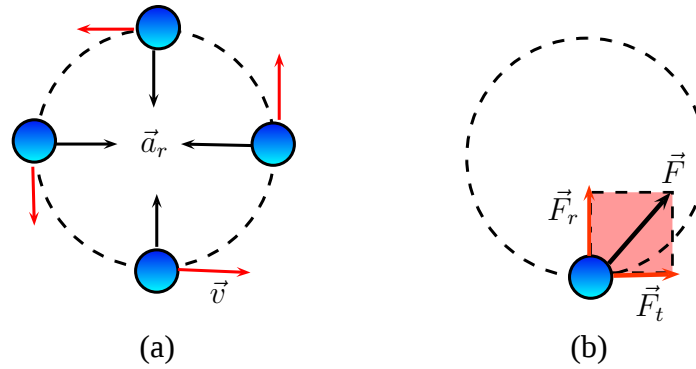
$$a = \frac{F(\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - g(m_2 + \mu_k m_1)}{m_1 + m_2}$$

3.3 แรงและการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

3.3.1 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ จะเกิดความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของวงกลม เนื่องจากวัตถุมีการเปลี่ยนทิศทางของความเร็วตลอดการเคลื่อนที่ เราเรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration, a_r) ดังรูป 3.13 (a) และจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 2 จะได้ขนาดของแรงลัพธ์ในแนวรัศมีเท่ากับผลคูณของมวลกับความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางนี้ นั่นคือ

$$\sum F_r = ma_r = m \frac{v^2}{r} \quad (3.7)$$



รูปที่ 3.13: การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ (a) และด้วยอัตราเร็วที่ไม่คงที่ (b)

3.3.2 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วไม่คงที่

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วไม่คงที่ คือมีการเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางของความเร็ว ทำให้เกิดความเร่งสองส่วนคือ ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสกับการเคลื่อนที่ (tangential acceleration, a_t) และความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง ดังนั้นแรงลัพธ์ที่เกิดขึ้นจึงเป็นผลรวมแบบเวกเตอร์ของแรงย่อยทั้งสองแนวดังรูป 3.13(b)

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_t = m(\vec{a}_r + \vec{a}_t) \quad (3.8)$$

ตัวอย่างที่ 8 วัตถุมวล m ถูกแขวนด้วยเชือกยาว L ถ้าวัตถุนี้ถูกทำให้เคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวระดับด้วยอัตราเร็วคงที่ v และเส้นเชือกทำมุมกับแนวตั้งเป็นมุม θ ดังรูป 3.14 จงหาค่าอัตราเร็วของวัตถุนี้

วิธีทำ พิจารณาองค์ประกอบของแรงในแนวตั้ง จะได้ว่า

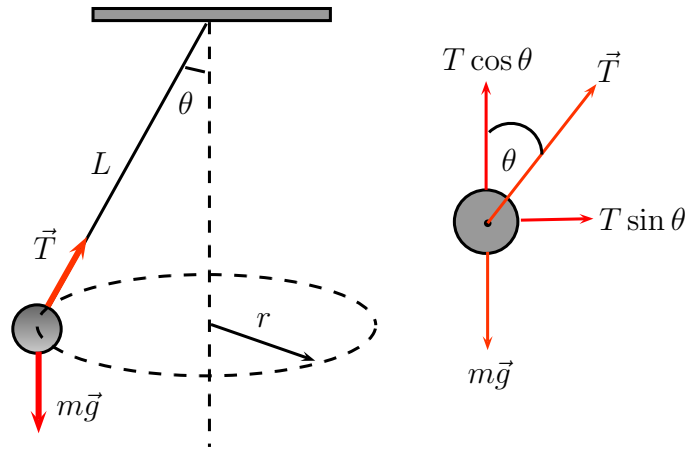
$$\begin{aligned} \sum F_y &= T \cos \theta - mg = 0 \\ T \cos \theta &= mg \end{aligned} \quad (1)$$

และพิจารณาองค์ประกอบของแรงในแนวราบ จะได้ว่า

$$\sum F_x = T \sin \theta = ma_r = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

นำสมการ (2) หาด้วยสมการ (1) ทำให้ได้

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{v^2}{rg} \\ v &= \sqrt{rg \tan \theta} \end{aligned}$$



รูปที่ 3.14: การแกว่งแบบกรวยของลูกตุ้มนาฬิกาและแผนภาพของแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล m

และจากความสัมพันธ์ $r = L \sin \theta$ ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุจึงมีค่าเท่ากับ

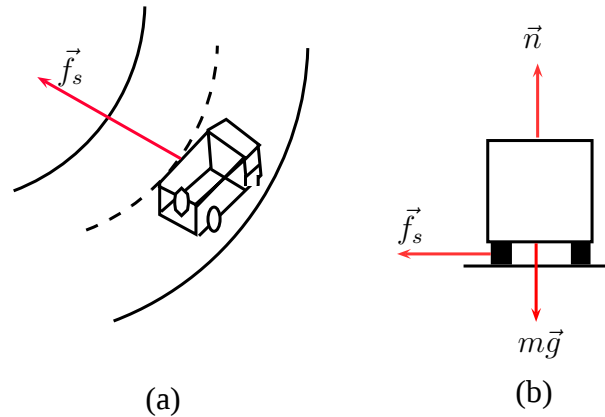
$$v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$$

ตัวอย่างที่ 9 รถยนต์มวล 1500 กิโลกรัม กำลังวิ่งบนทางโค้งในแนวราบซึ่งมีรัศมีความโค้งเป็น 35 เมตร ดังรูป 3.15 ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตระหว่างยางรถกับพื้นถนนคือ 0.5 จงหาอัตราเร็วสูงสุดของรถยนต์ ที่ยังคงวิ่งบนทางโค้งได้อย่างปลอดภัยโดยไม่ไถลออกนอกเส้นทาง

วิธีทำ โดยการเขียนแผนภาพของแรงที่กระทำต่อรถยนต์ดังรูป (b) จะเห็นว่าแรงเสียดทานสถิตที่เกิดขึ้นนี้จะมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางความโค้ง และแรงนี้ทำให้รถยนต์เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางความโค้ง และจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ทำให้ว่า

$$f_s = ma_r = m \frac{v^2}{r}$$

$$n = mg$$



รูปที่ 3.15: (a) แรงเสียดทานสถิตในทิศทางพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางความโค้งเพื่อบังคับให้รถเคลื่อนที่บนทางโค้งราบและ (b) แผนภาพวัตถุอิสระของรถยนต์

และอัตราเร็วสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อแรงเสียดทานสถิตมีค่าสูงสุด นั่นคือ

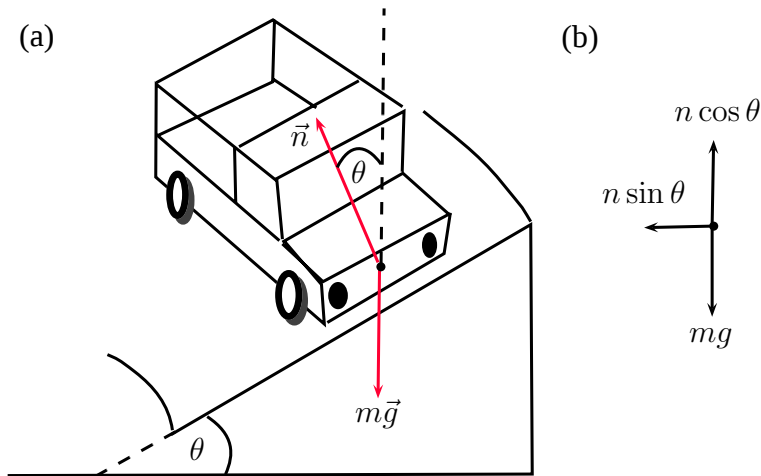
$$\begin{aligned}
 f_{s,max} &= \mu_s n = m \frac{v_{max}^2}{r} \\
 v_{max} &= \sqrt{\frac{\mu_s m g r}{m}} = \sqrt{\mu_s g r} \\
 v_{max} &= \sqrt{(0.5)(9.8 \text{ m/s}^2)(35 \text{ m})} \\
 v_{max} &= 13.1 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 วิศวกรออกแบบถนนโค้งให้มีความเอียงโดยให้ขอบถนนด้านนอกสูงกว่าขอบด้านใน เมื่อรถยนต์แล่นเลี้ยวโค้งด้วยขนาดความเร็วพอดีตามที่วิศวกรออกแบบไว้ และถ้าไม่คิดความเสียดทานระหว่างยางรถยนต์กับถนน ดังรูป 3.16 กำหนดให้อัตราเร็วในการเคลื่อนที่บนทางโค้งนี้เท่ากับ 13.4 m/s และรัศมีความโค้งเท่ากับ 50 m ถนนควรจะมีมุมเอียงด้วยมุมเท่าไร?

วิธีทำ เมื่อพิจารณาจากแผนภาพวัตถุอิสระ จะเห็นว่าองค์ประกอบของแรงปฏิกิริยาที่พื้นถนนกระทำต่อรถยนต์ $\vec{n}$ ในแนวราบทำให้เกิดความเร่งความสู่ศูนย์กลาง นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 \sum F_r &= m a_r \\
 n \sin \theta &= m \frac{v^2}{r}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= 0 \\
 n \cos \theta &= m g
 \end{aligned} \tag{2}$$



รูปที่ 3.16: รถยนต์กำลังวิ่งบนถนนโค้งที่มีความเอียงเป็นมุม θ (a) และแผนภาพวัตถุอิสระของรถยนต์ (b)

สมการ (1) หาคด้วยสมการ (2) จะได้

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{(13.4)^2}{(50)(9.8)} \right] = 20.1^\circ$$

ตัวอย่างที่ 11 นักบินมวล m กำลังขับเครื่องบินไอพ่นเป็นวงกลมในแนวตั้งด้วยอัตราเร็วคงที่ 225 m/s รัศมีวงโคจร 2.70 km ดังรูปที่ 3.17 จงหาแรงที่เบาะนั่งกระทำต่อนักบินคนขับที่ตำแหน่ง

- (ก) ด้านล่างสุดของวงกลม
- (ข) ด้านบนสุดของวงกลม

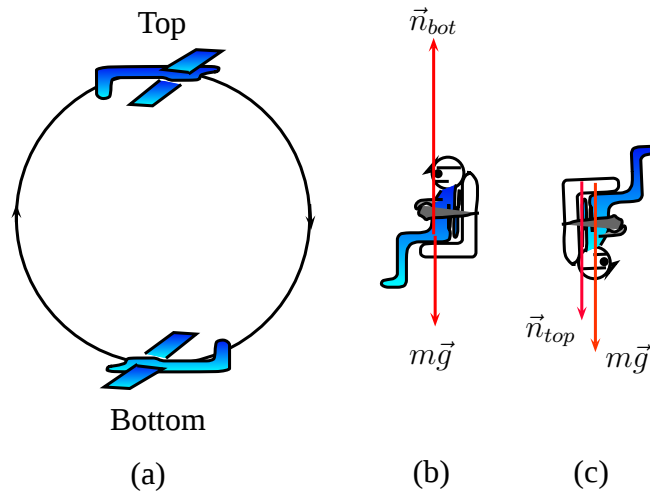
วิธีทำ พิจารณาที่ตำแหน่งด้านล่างสุดของวงกลมจะได้แรงที่เบาะนั่งกระทำต่อนักบินเป็นดังนี้

$$\sum F_r = n_{bot} - mg = m \frac{v^2}{r}$$

$$n_{bot} = mg + m \frac{v^2}{r} = mg \left(1 + \frac{v^2}{rg} \right)$$

$$n_{bot} = mg \left[1 + \frac{(225)^2}{(2.7 \times 10^3)(9.8)} \right]$$

$$n_{bot} = 2.91mg$$



รูปที่ 3.17: นักบินขับเครื่องบินให้เคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงตัว (a) และแผนภาพวัตถุอิสระของนักบินที่ตำแหน่งล่างสุดของวงกลม (b) และที่ตำแหน่งบนสุดของวงกลม (c)

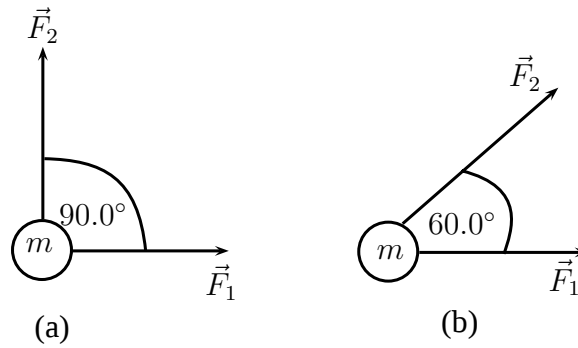
ในทำนองเดียวกันที่ตำแหน่งด้านบนสุดของวงกลมจะได้

$$\begin{aligned}\sum F_r &= n_{top} + mg = m \frac{v^2}{r} \\ n_{top} &= m \frac{v^2}{r} - mg = mg \left(\frac{v^2}{rg} - 1 \right) \\ n_{top} &= mg \left[\frac{(225)^2}{(2.7 \times 10^3)(9.8)} - 1 \right] \\ n_{top} &= 0.91mg\end{aligned}$$

ผลที่ได้เราจะเห็นว่าแรงที่เบาะนั่งกระทำต่อนักบินที่ตำแหน่งด้านล่างจะมากกว่าด้านบนสุดของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวดิ่ง และในตำแหน่งอื่นๆก็สามารถวิเคราะห์หาได้ในลักษณะเดียวกันนี้

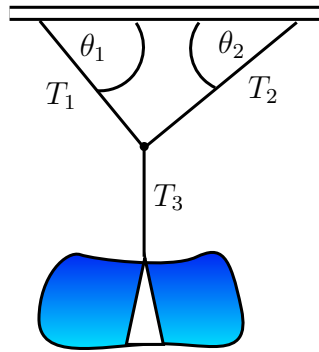
3.4 แบบฝึกหัด

1. แรงสองแรงคือ $F_1 = 20 \text{ N}$ และ $F_2 = 15 \text{ N}$ กระทำต่อมวลขนาด 5 kg จงหาขนาดและทิศทางความเร่งในรูป 3.18 (a) และ (b)
2. ถูंपูนซีเมนต์น้ำหนัก 325 N แขนงด้วยเส้นเชือกดังแสดงในรูป 3.19 โดยเชือกสองเส้นทำมุมกับแนวระดับคือ $\theta_1 = 60$ องศา และ $\theta_2 = 25$ องศา เมื่อระบบอยู่ในสมดุล



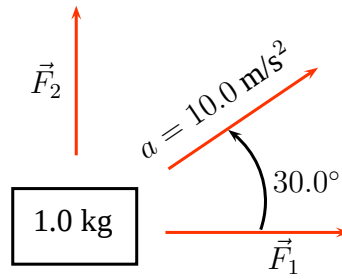
รูปที่ 3.18: โจทย์ปัญหาข้อ 1

จงหาขนาดแรงดึงในเส้นเชือก T_1 , T_2 และ T_3

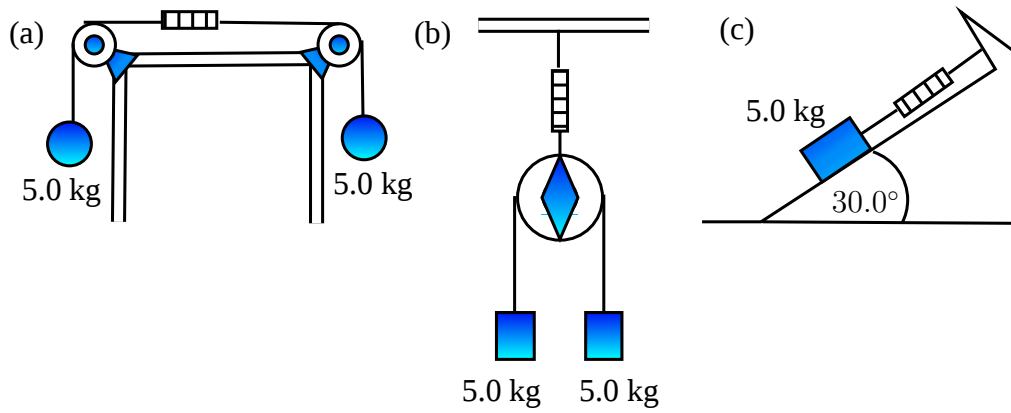


รูปที่ 3.19: สำหรับโจทย์ปัญหาข้อ 2

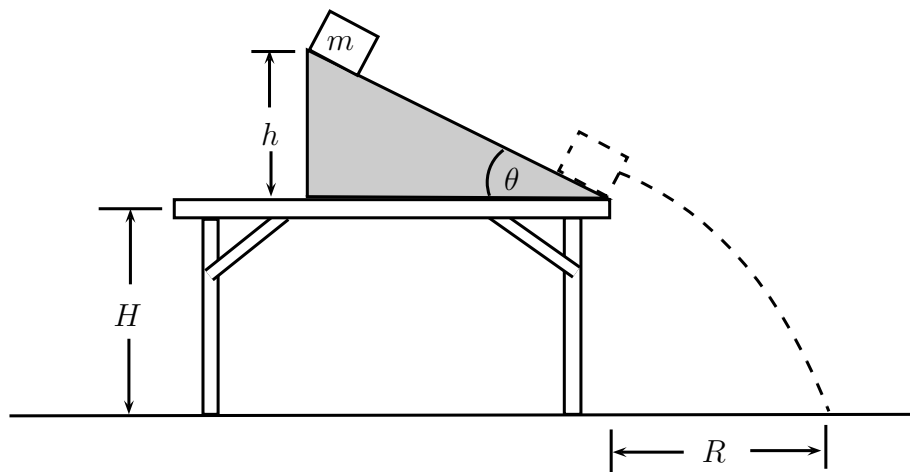
3. มวล 1 kg มีความเร่งขนาด 10 m/s^2 ในทิศทำมุม 30 องศา กับแนวแรง F_1 ดังรูป 3.20 ถ้าแรง $F_2 = 5.0 \text{ N}$ จงหาขนาดของ F_1
4. ระบบที่แสดงในรูปที่ 3.21 (a), (b) และ (c) อยู่ในสถานะสมดุล ถ้าเสกกลบนสปริงถูกปรับให้อ่านค่าในหน่วยของนิวตัน จงหาว่า ค่าที่อ่านได้บนสปริงในทั้งสามระบบมีค่าเท่าใด
5. กล้องมวล $m = 2.0 \text{ kg}$ ถูกปล่อยจากหยุดหนึ่งที่ตำแหน่งความสูงจากพื้นโต๊ะ $h = 0.50 \text{ m}$ และปล่อยให้ไถลลงมาจากหยุดนี้ตามพื้นเอียงซึ่งมีมุมเอียง $\theta = 30$ องศา ดังรูปที่ 3.22 พื้นเอียงไม่มีความเสียดทานที่ถูกต้องตรงกับพื้นโต๊ะโดยที่พื้นโต๊ะสูงจากพื้นดิน $H = 2.00 \text{ m}$ จงหาค่าต่อไปนี้
 - (ก) ความเร่งของกล้องขณะที่ไถลลงมาตามพื้นเอียง
 - (ข) ความเร็วของกล้องที่หลุดออกจากขอบด้านล่างสุดของพื้นเอียง



รูปที่ 3.20: สำหรับโจทย์ปัญหาข้อ 2



รูปที่ 3.21: โจทย์ปัญหาข้อ 4



รูปที่ 3.22: โจทย์ปัญหาข้อ 5

- (ค) เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ตั้งแต่เริ่มต้นจนตกถึงพื้นดิน
 (ง) ตำแหน่งที่ตกพื้นของกล่องไบน้อยู่น้อยห่างจากขาโต๊ะเท่าใด (R)

6. มวลขนาด 2.0 kg วางอยู่บนมวลขนาด 5 kg สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างผิววัตถุมวล 5 kg กับพื้นคือ 0.2 เมื่อออกแรงดึงวัตถุมวล 5 kg ไปทางขวามือดังรูป 3.23

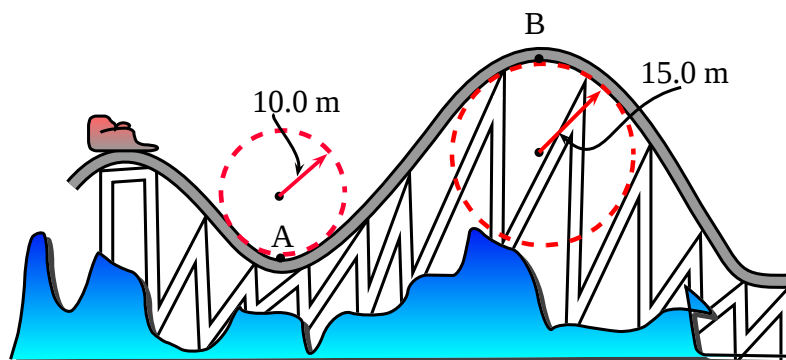
- (ก) จงหาขนาดของแรงที่จำเป็นต้องใช้เพื่อผลักให้วัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร่ง 3.0 m/s^2
 (ข) จงหาค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิตที่น้อยที่สุดระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสองซึ่งจะทำให้วัตถุมวล 2 kg ไม่ไถลไปภายใต้ความเร่งขนาด 3.0 m/s^2



รูปที่ 3.23: โจทย์ปัญหาข้อ 6

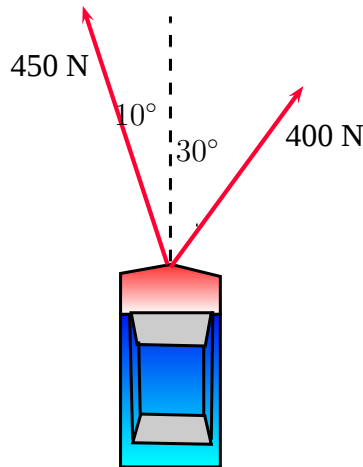
7. รถรางมีมวล 500 kg เมื่อบรรทุกผู้โดยสารจนเต็มและกำลังเคลื่อนที่บนรางโค้ง ดังแสดงในรูป 3.24

- (ก) ถ้ารถรางมีอัตราเร็ว 20 m/s ที่จุด A แรงที่รางกระทำต่อรถเป็นเท่าไร
 (ข) อัตราเร็วสูงสุดขณะที่รถรางอยู่ที่จุด B และยังคงเคลื่อนที่อยู่บนรางได้โดยที่ไม่หลุดออกนอกเส้นทาง



รูปที่ 3.24: โจทย์ปัญหาข้อ 7

8. ระยะห่างระหว่างเสาโทรศัพท์เท่ากับ 50.0 m เมื่อมีนกตัวหนึ่งบินมาเกาะที่สายโทรศัพท์ ตรงกึ่งกลางระหว่างเสาทั้งสองทำให้สายหย่อนลงไปเป็นระยะ 0.2 m ให้เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของขนาดของแรงดึงในสายโทรศัพท์ที่นกกระทำมีค่าเป็นเท่าไร (ไม่คิดน้ำหนักของสายโทรศัพท์)
9. จากรูป 3.25 แรงสองแรงที่กระทำกับรถยนต์คันหนึ่งเพื่อจะให้เคลื่อนที่ไป จงหาขนาดของแรงลัพธ์และถ่วงรถยนต์มวล 3000 kg ความเร่งของรถยนต์มีขนาดเป็นเท่าไร (ไม่คิดแรงเสียดทาน)



รูปที่ 3.25: โจทย์ปัญหาข้อ 9

10. วัตถุมวล 2.0 kg เริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งไถลลงตามพื้นเอียงที่มีความยาวตามพื้นเอียง 80 cm ในเวลา 0.5 วินาที แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุไปตามพื้นเอียงมีค่าเป็นเท่าไร