

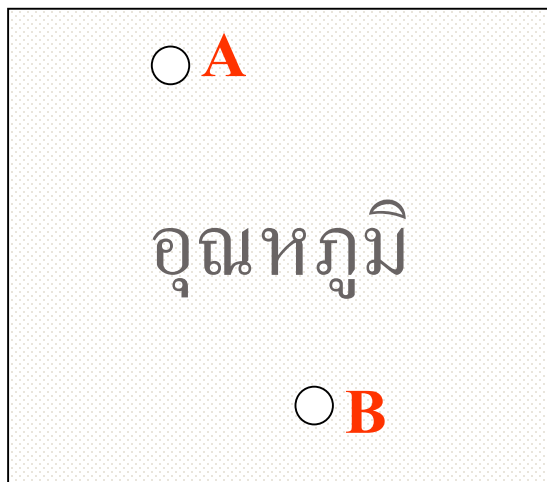
เวกเตอร์ (Vectors)

- บทนำ
- การรวมเวกเตอร์
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย
- การแยกเวกเตอร์
- ผลคูณสเกลาร์และเวกเตอร์
- ผลคูณสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

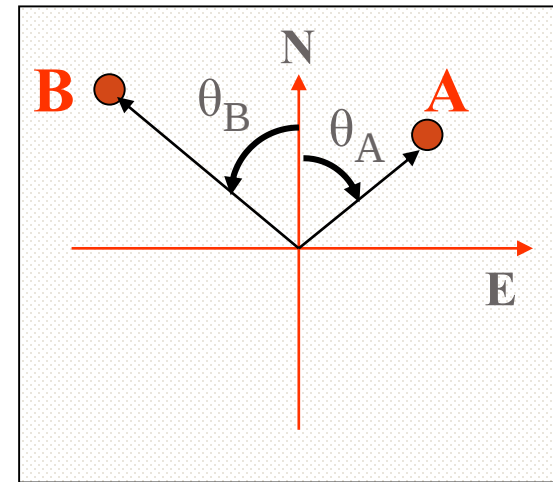
บทนำ (Introduction)

ปริมาณที่วัดในทางฟิสิกส์แบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

- ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) คือ ปริมาณที่ระบุขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น อุณหภูมิ, ปริมาตร, มวล, เวลา เป็นต้น
- ปริมาณเวกเตอร์ (vectors) คือ ปริมาณที่ต้องระบุทั้งขนาดและทิศทางพร้อมกัน เช่น การกระจัด, ความเร็ว, ความเร่ง, แรง, สนามแม่ไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก เป็นต้น



ปริมาณสเกลาร์



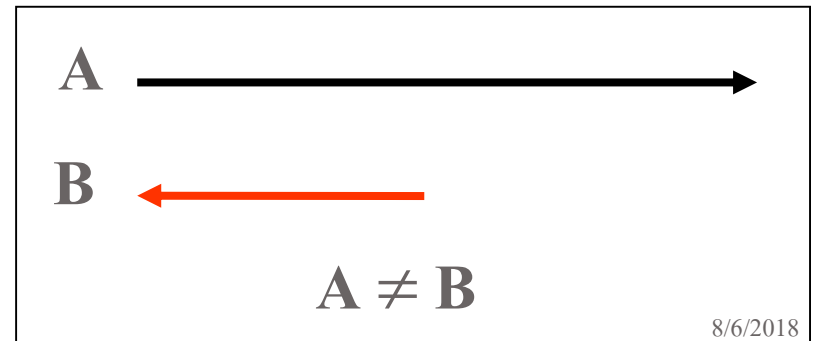
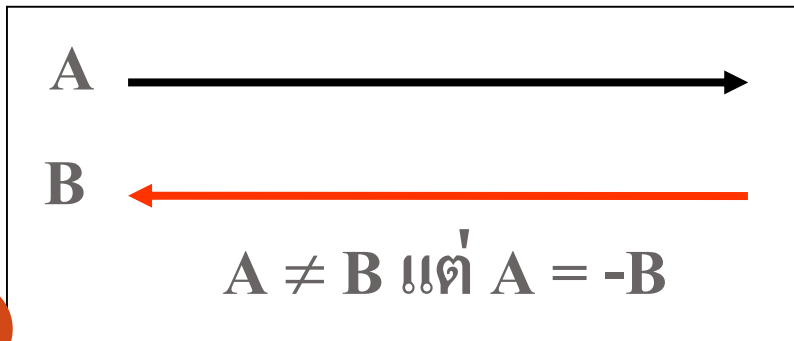
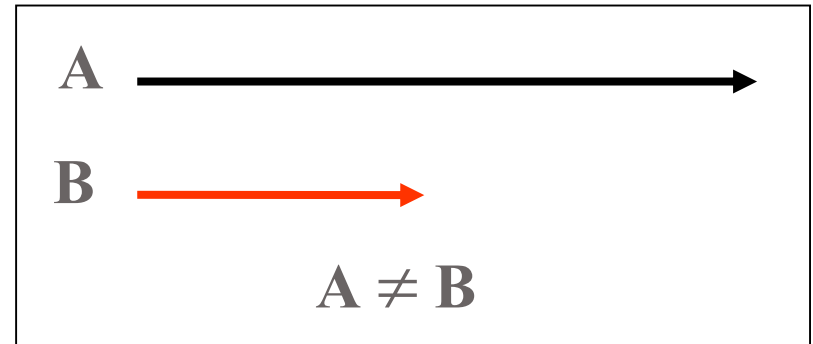
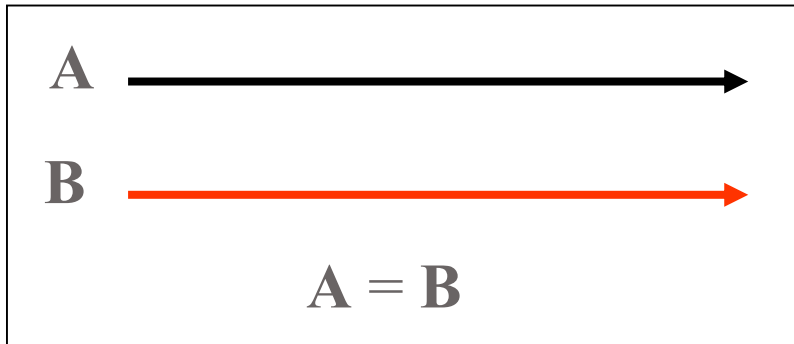
ปริมาณเวกเตอร์

การรวมเวกเตอร์

สมบัติของเวกเตอร์

(1) การเท่ากันของสองเวกเตอร์

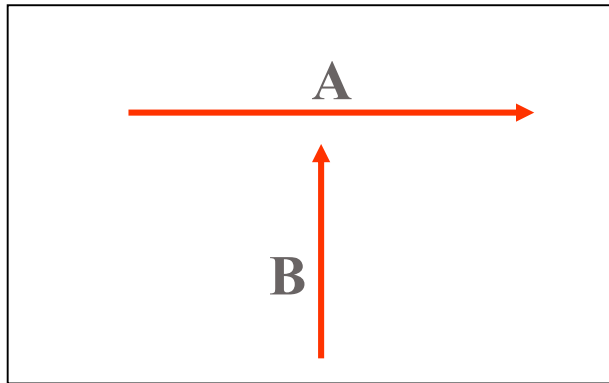
ถ้าเวกเตอร์ **A** และเวกเตอร์ **B** เท่ากัน จะต้องมีความยาวเท่ากัน ($A = B$) และมีทิศทางเดียวกันด้วย



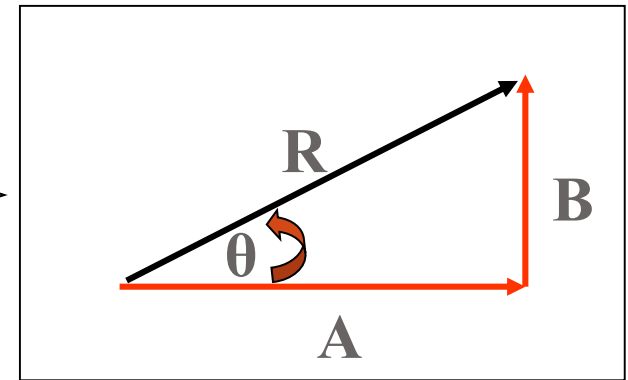
การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

(2) การบวกเวกเตอร์โดยใช้วิธีเรขาคณิต (geometric method)

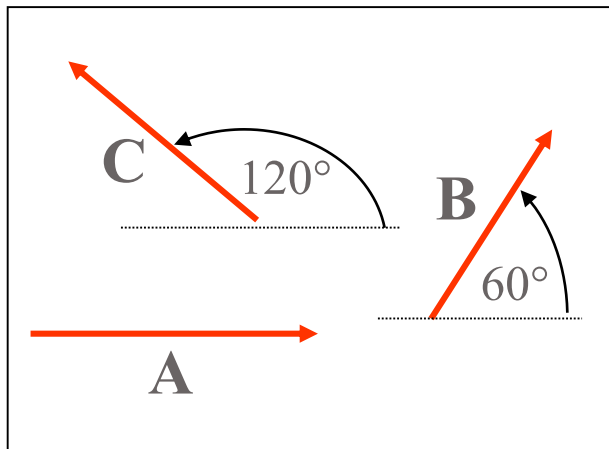
- การบวกสองเวกเตอร์



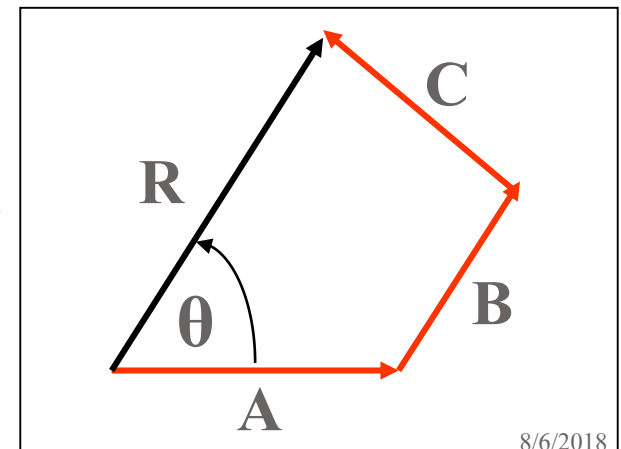
$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$



- การบวกเวกเตอร์ที่มีมากกว่าสองเวกเตอร์ขึ้นไป

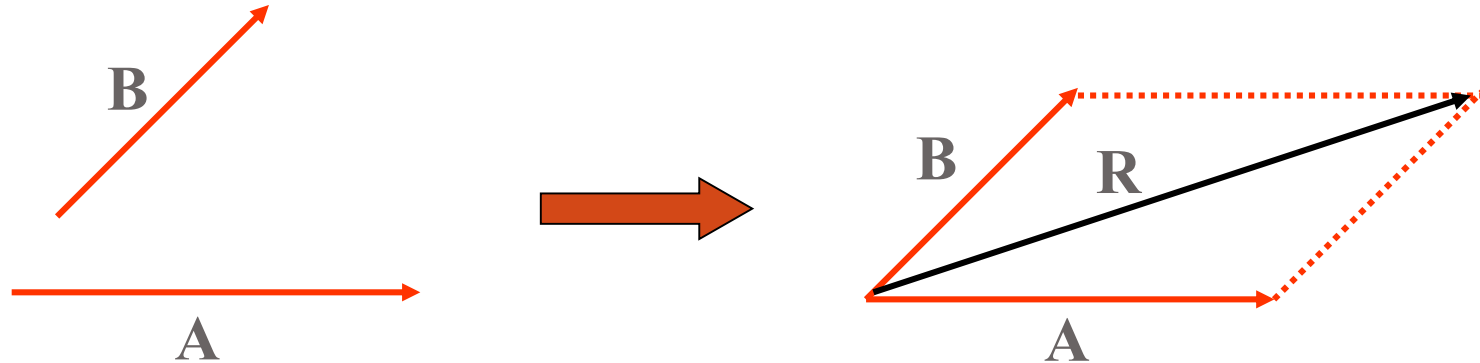


$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$$



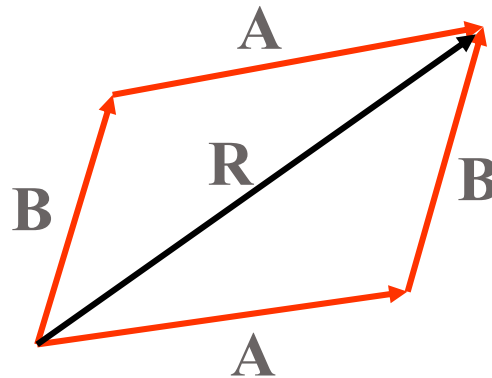
การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

การบวกของสองเวกเตอร์สามารถเขียนในอีกแบบหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าการบวกเวกเตอร์แบบสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram)



(3) การสลับที่ของการบวก (commutative law of addition)

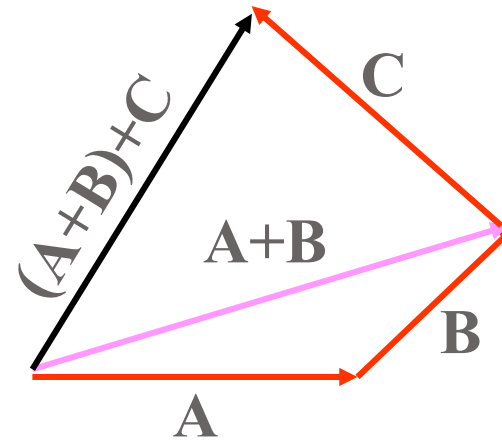
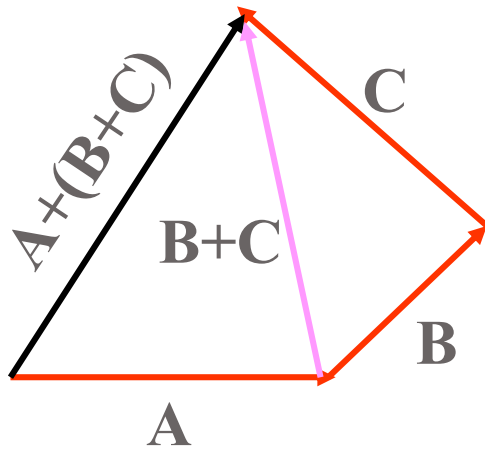
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$



การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

(4) การเปลี่ยนกลุ่มของการบวก (associative law of addition)

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$



(5) เวกเตอร์ที่ติดลบ (Negative of a vector)

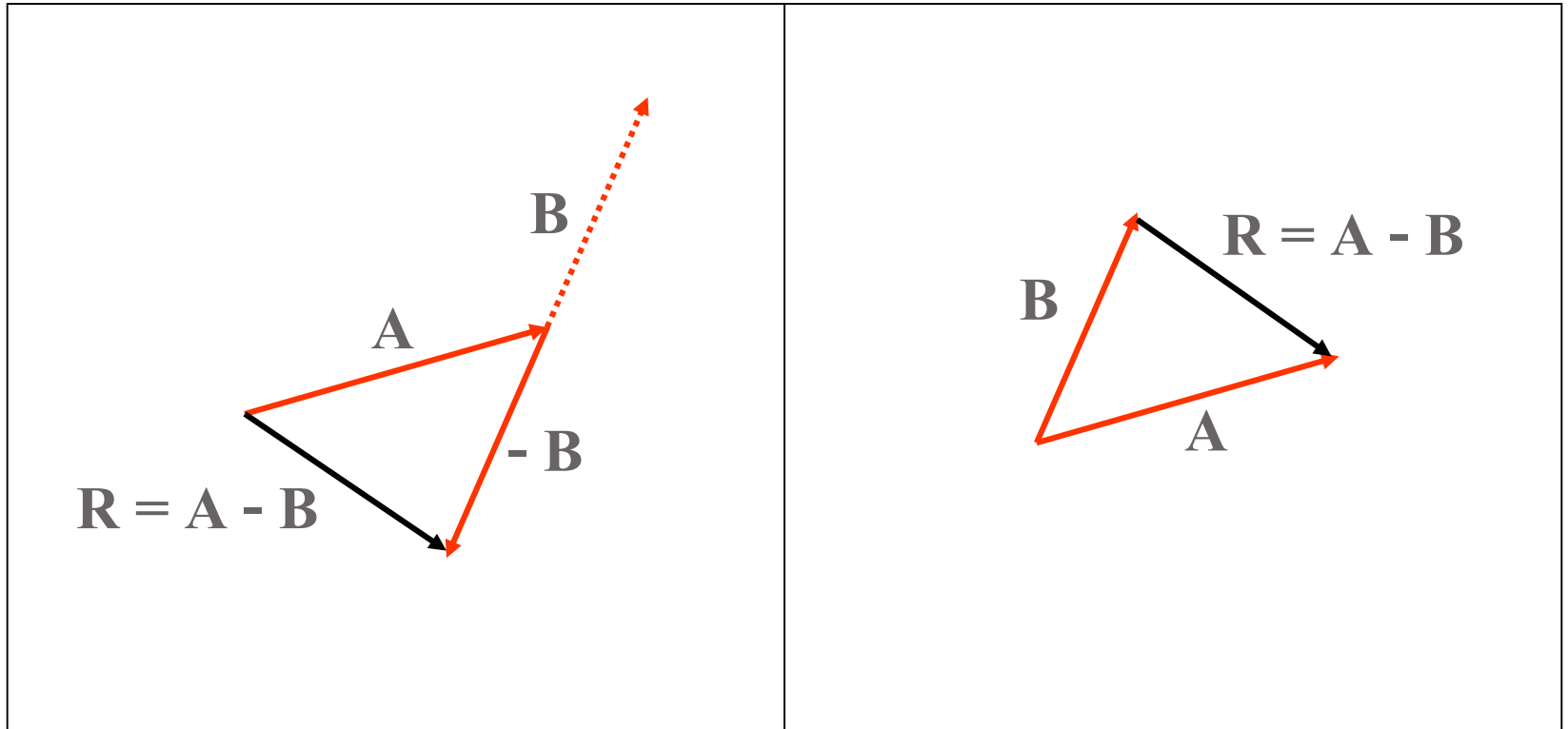
$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \text{เวกเตอร์ } \mathbf{A} \text{ และ } -\mathbf{A} \text{ มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศตรงข้าม}$$

(6) การคูณปริมาณสเกลาร์(m) กับเวกเตอร์

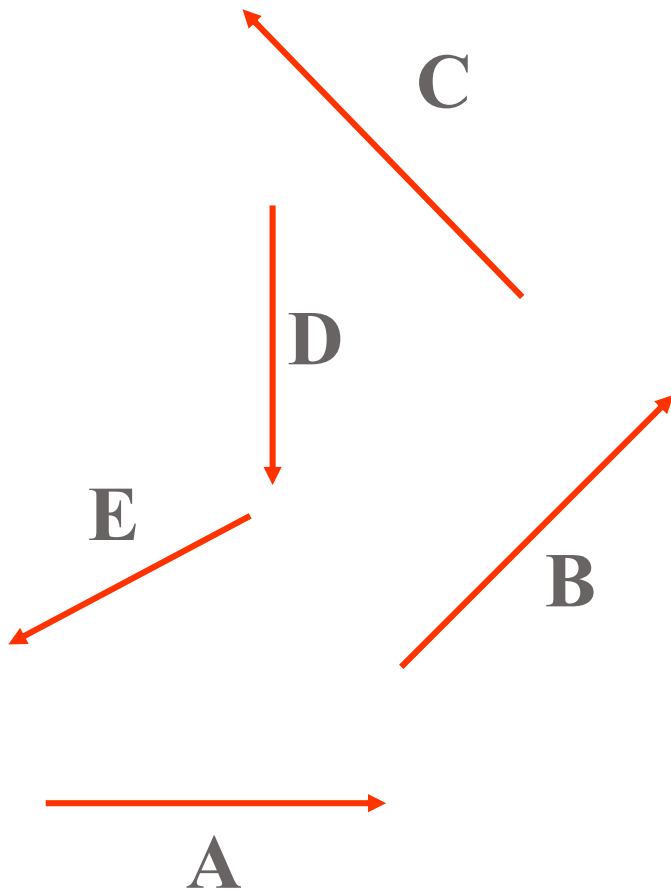
$$\mathbf{B} = m\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \text{เวกเตอร์ } \mathbf{B} \text{ ยาวเป็นจำนวน } m \text{ เท่าของเวกเตอร์ } \mathbf{A}$$

การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

(7) การลบเวกเตอร์ $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

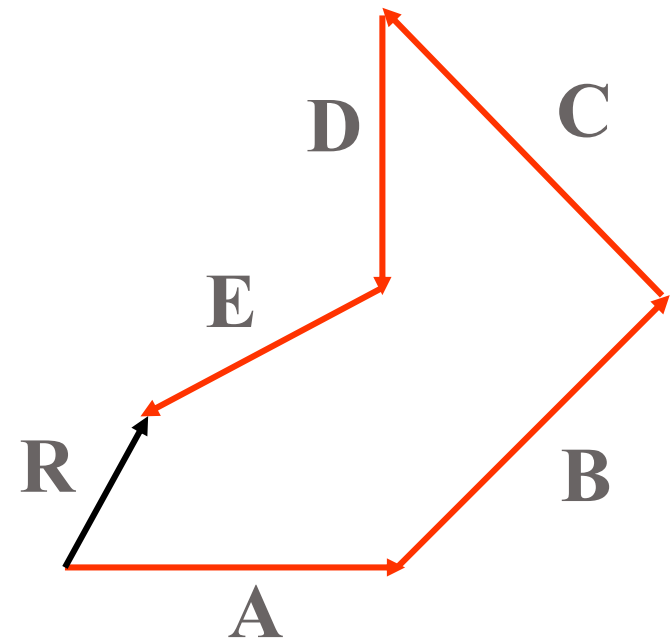


คำถาม (question)?

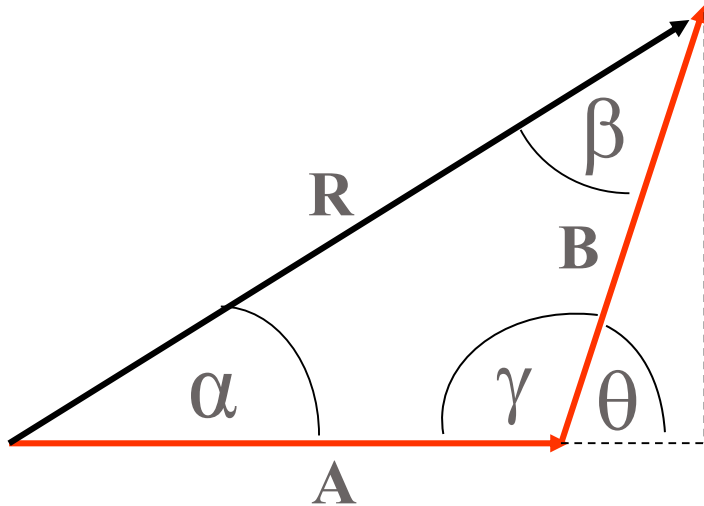


จงหาเวกเตอร์ลัพธ์

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E}$$



การหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



ทิศของเวกเตอร์ลัพธ์

$$\tan \alpha = \frac{B \sin \theta}{A + B \cos \theta}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{B \sin \theta}{A + B \cos \theta} \right) \quad (1.3)$$

ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

$$R^2 = (A + B \cos \theta)^2 + (B \sin \theta)^2$$

$$R^2 = A^2 + 2AB \cos \theta + B^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \quad (1.2)$$

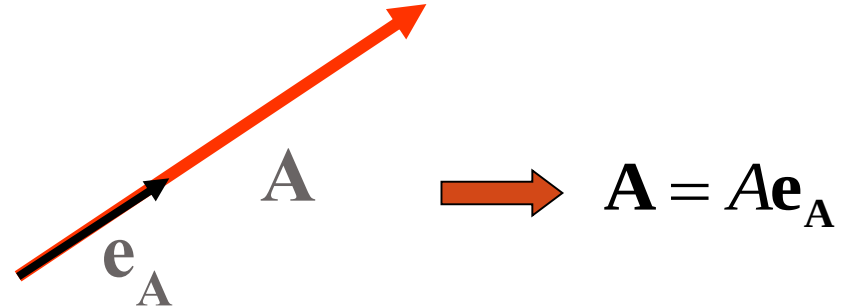
สมการที่ 1.2 และ 1.3 เรียกว่า กฎของโคไซน์ (cosine's law) นอกจากนี้ยังสามารถหาค่าเหล่านี้ได้โดยใช้กฎของไซน์ (sine's law)

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{A}{\sin \beta} = \frac{B}{\sin \alpha} \quad (1.4)$$

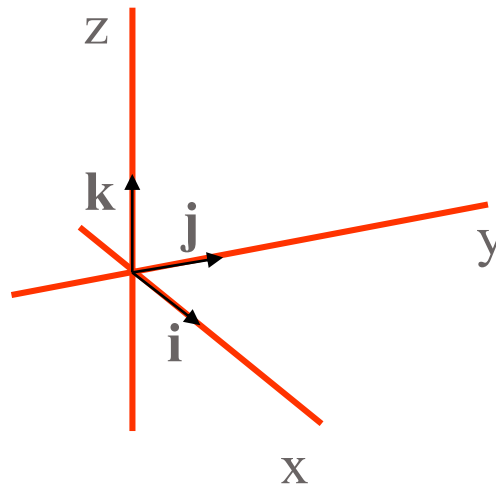
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vectors) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1.1)$$



ในระบบพิกัดแบบคาทีเซียน (cartesian coordinates system) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y, และ z แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ตามลำดับ



การแตกเวกเตอร์

เวกเตอร์ใดสามารถแตกเป็นองค์ประกอบที่ตั้งฉากกัน สำหรับระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียนจะได้ว่า

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

จากรูปจะเห็นว่า $A_x = A \sin \theta \cos \phi$

$$A_y = A \sin \theta \sin \phi$$

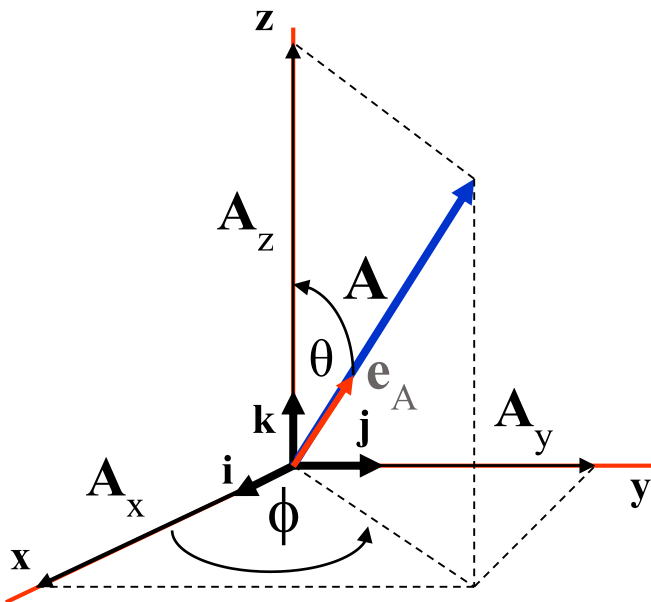
$$A_z = A \cos \theta$$

ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

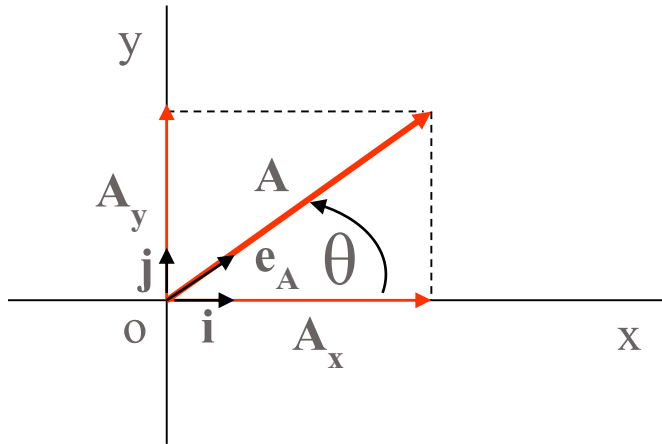
และมีเวกเตอร์หน่วย $\mathbf{e}_A$

$$\mathbf{e}_A = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$$



การแตกเวกเตอร์ (ต่อ)

ในกรณีที่แตกเวกเตอร์บนระนาบ (2 มิติ) จะได้



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$$

โดยที่

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ เวกเตอร์หน่วย

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2},$$

$$\mathbf{e}_A = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

การรวมเวกเตอร์ด้วยวิธีแยกองค์ประกอบ

จากรูปจะเห็นว่า

$$\mathbf{A}_1 = A_{1x} \mathbf{i} + A_{1y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{A}_2 = -A_{2x} \mathbf{i} + A_{2y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{A}_3 = -A_{3x} \mathbf{i} - A_{3y} \mathbf{j}$$

ดังนั้นเวกเตอร์ลัพธ์ของสามเวกเตอร์คือ

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$$

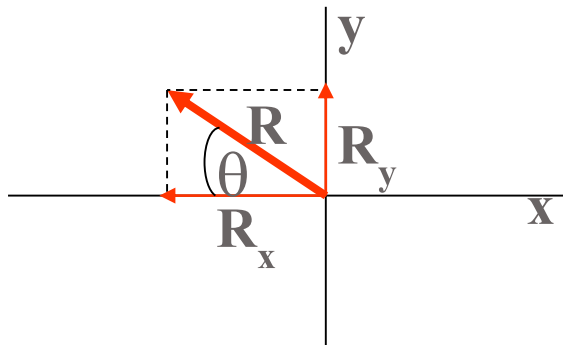
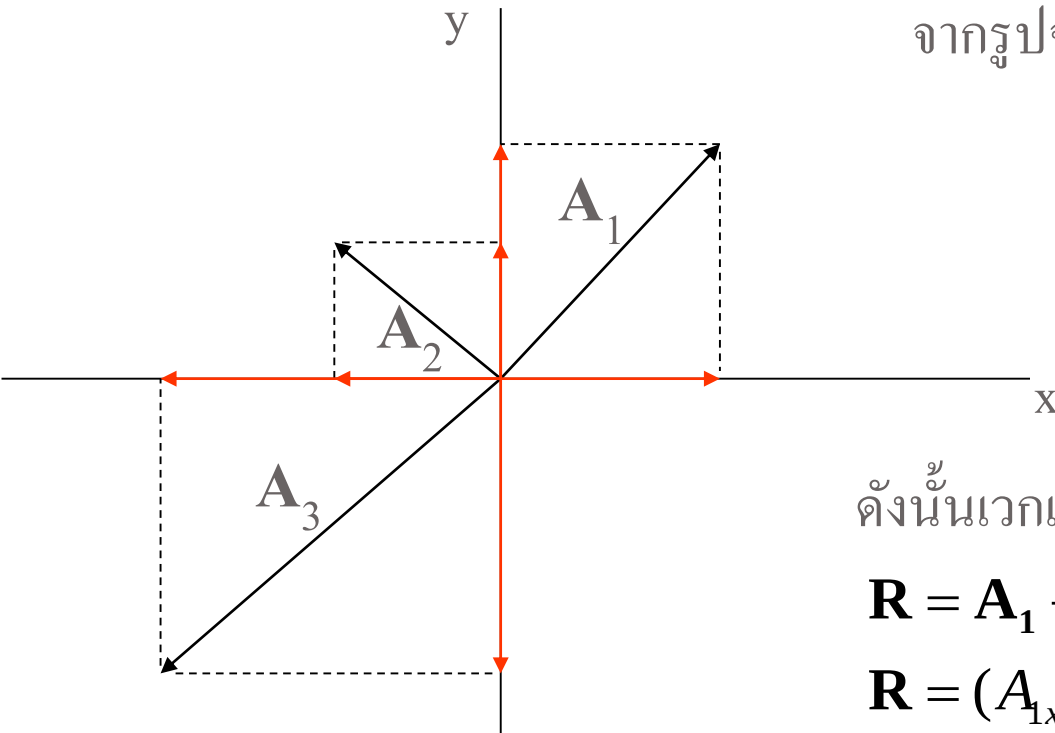
$$\mathbf{R} = (A_{1x} - A_{2x} - A_{3x})\mathbf{i} + (A_{1y} + A_{2y} - A_{3y})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

ขนาดและทิศทางของ $\mathbf{R}$ คือ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$



การรวมเวกเตอร์ด้วยวิธีแยกองค์ประกอบ

ถ้ามีเวกเตอร์จำนวนมาก การรวมเวกเตอร์ในแต่ละองค์ประกอบจะเป็นดังนี้

$$R_x = \sum_{i=1}^N R_{ix}$$



ผลบวกแบบพีชคณิตของเวกเตอร์องค์ประกอบตามแกน x

$$R_y = \sum_i R_{iy}$$



ผลบวกแบบพีชคณิตของเวกเตอร์องค์ประกอบตามแกน y

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

ตัวอย่าง 1

กำหนดให้ $\mathbf{A}_1 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

จงหา (1) $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$
(2) $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$

วิธีทำ

(1)

$$\mathbf{R} = (3+1)\mathbf{i} + (5-4)\mathbf{j} + (-1+3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$R = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

(2)

$$\mathbf{R} = (3-1)\mathbf{i} + (5-(-4))\mathbf{j} + (-1-3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

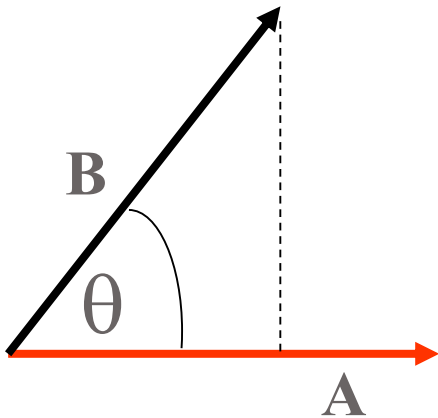
$$R = \sqrt{2^2 + 9^2 + (-4)^2} = \sqrt{101}$$

ผลคูณสเกลาร์และเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์มี 2 แบบ คือ

- การคูณแบบสเกลาร์ (scalar product) $\longrightarrow$ ปริมาณสเกลาร์
- การคูณแบบเวกเตอร์ (vector product) $\longrightarrow$ ปริมาณเวกเตอร์

ผลคูณแบบสเกลาร์



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1.2)$$

โดยที่

$$0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

ผลคูณสเกลาร์และเวกเตอร์ (ต่อ)

สมบัติการคูณแบบสเกลาร์

$$(1) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$(2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$(3) m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m$$

$$(4) \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$(5) \mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

$$(6) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ if } \mathbf{A} \neq 0, \mathbf{B} \neq 0 \text{ then } \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$$

ตัวอย่าง 2

จงแสดงให้เห็นว่า $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ และ $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

วิธีทำ

จากนิยามของการคูณแบบสเกลาร์ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$

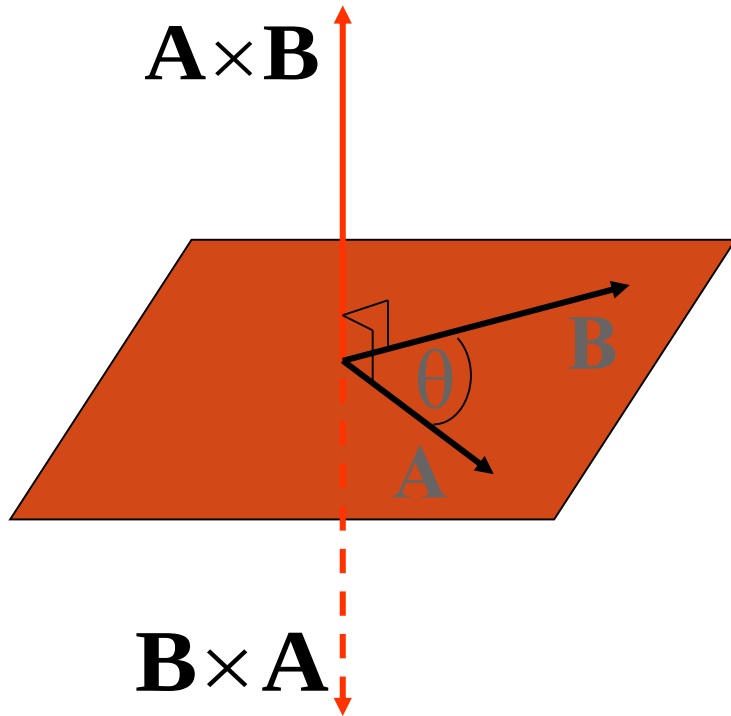
เนื่องจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ ทำมุมตั้งฉากกันคือ $\theta = 90^\circ$

ดังนั้น $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = ij \cos 90 = 0$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = jk \cos 90 = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = ki \cos 90 = 0$

ส่วน $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ เนื่องจากเวกเตอร์มีทิศเดียวกัน

ผลคูณสเกลาร์และเวกเตอร์ (ต่อ)

ผลคูณแบบเวกเตอร์



$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ อ่านว่า “A cross B”

โดยมีขนาดเป็น

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta \quad (1.3)$$

จากรูปแสดงให้เห็นว่า

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

ผลคูณสเกลาร์และเวกเตอร์ (ต่อ)

สมบัติการคูณแบบเวกเตอร์

$$(1) \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$(2) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

$$(3) m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$$

$$(4) \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$(5) \mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}$$

การคูณของสามเวกเตอร์

การคูณของสามเวกเตอร์มี 2 แบบ คือ

- การคูณสามชั้นแบบสเกลาร์ (scalar triple product)
- การคูณสามชั้นแบบเวกเตอร์ (vector triple product)

การคูณสามชั้นแบบสเกลาร์ได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

การคูณสามชั้นแบบเวกเตอร์ได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.5)$$

คำถาม?

กำหนดให้

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{C} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

จงหา

- (1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- (2) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
- (3) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- (4) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$