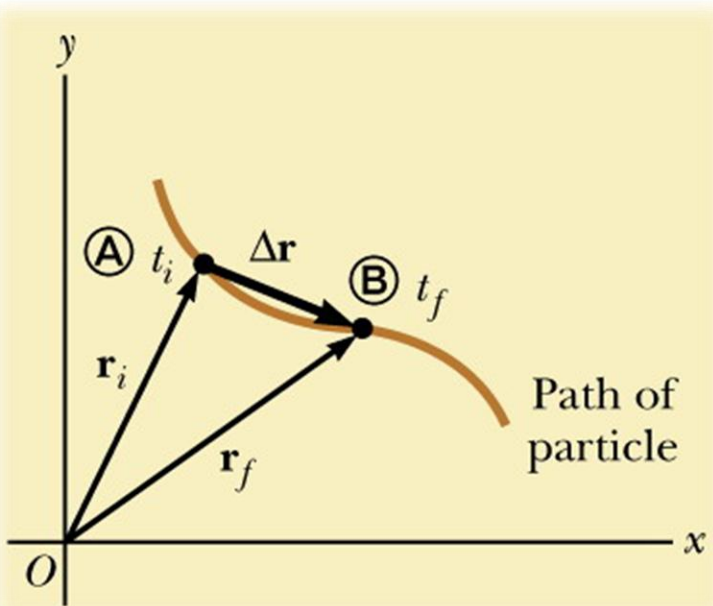


การเคลื่อนที่แบบสองมิติ

- การกระจัด ความเร็ว และ ความเร่ง
- การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์
- การเคลื่อนที่แบบวงกลม
- ความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์

การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง

2



วัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่ง A ไปยังตำแหน่ง B ซึ่งมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{r}_i$ และ $\vec{r}_f$ ตามลำดับ

การกระจัด คือ ผลต่างของเวกเตอร์บอกตำแหน่งทั้งสอง นั่นคือ

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (2.1)$$

ความเร็วเฉลี่ย คือ การเปลี่ยนแปลงการกระจัดต่อเวลา นั่นคือ $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.2)$

ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง คือ $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.3)$

ความเร่ง

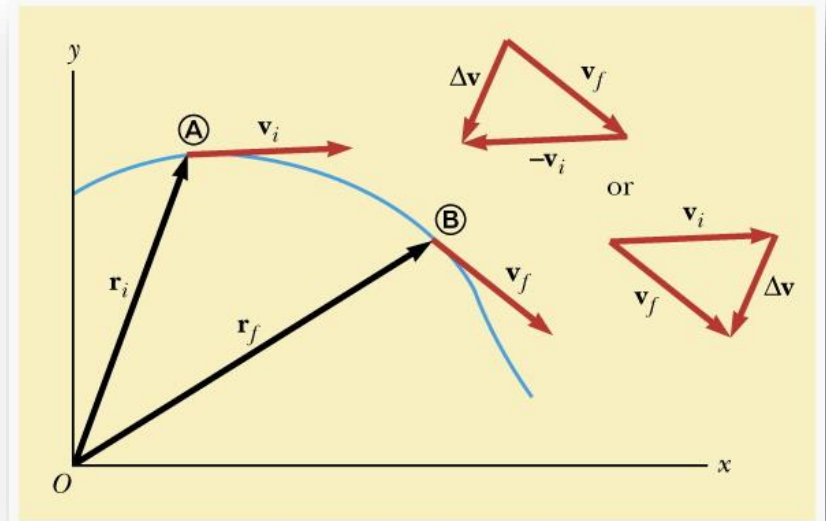
3

ความเร่งเฉลี่ย คือ อัตราการเปลี่ยนแปลง
ความเร็วต่อเวลา

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

ความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง คือ ความเร่งที่
พิจารณาในช่วงเวลาสั้นๆ นั่นคือ

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.5)$$



การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์

4

องค์ประกอบของความเร็วตอนเริ่มต้น
ตามแกน x และ y คือ

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i \quad \text{และ} \quad v_{yi} = v_i \sin \theta_i$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x

เมื่อ $x_i = 0$; $a_x = 0$ จะพบว่า

$$x_f = v_{xi} t = (v_i \cos \theta_i) t \quad (2.5)$$

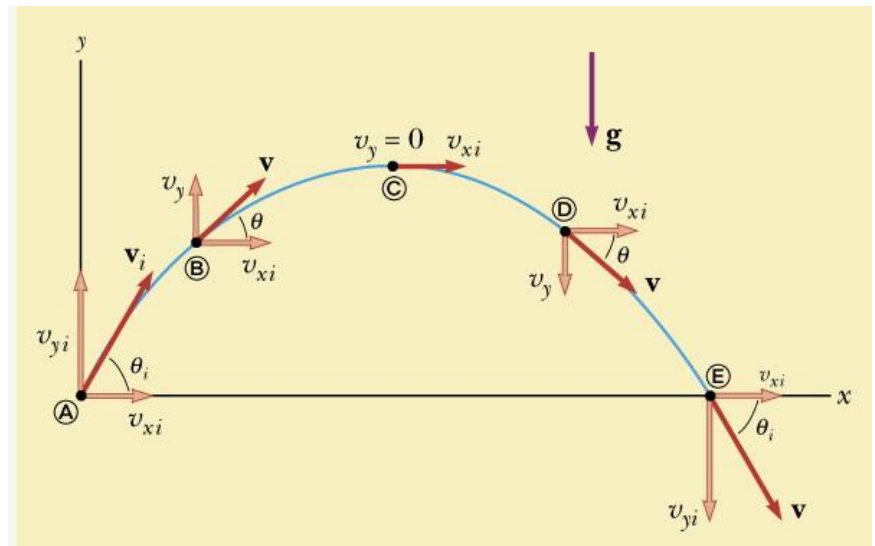
$$v_{xi} = v_{xf} = v_i \cos \theta_i = \text{ค่าคงที่}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวแกน y

$$y_i = 0; \quad a_y = -g \quad \text{ดังนั้น}$$

$$y_f = v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_i \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.6)$$

Projectile's Motion



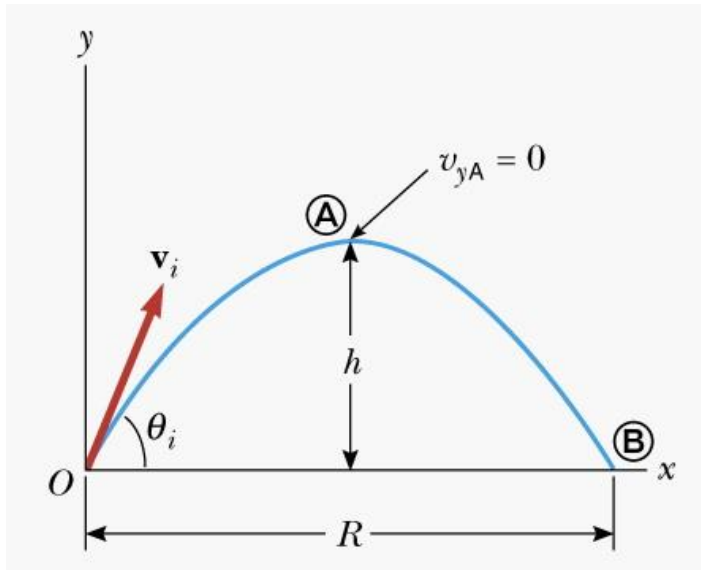
$$\text{จาก } t = \frac{x_f}{v_i \cos \theta_i} \quad \text{ทำให้ได้}$$

$$y = (\tan \theta_i) x - \left(\frac{g}{2v_i^2 \cos^2 \theta_i} \right) x^2 \quad (2.7)$$

8/6/2018

ระยะพิสัยและระยะสูงสุดของการเคลื่อนแบบโปรเจกไทล์

5



ระยะพิสัย (Horizontal Range: R)

$$\begin{aligned} R &= v_{xi} t_B = (v_i \cos \theta_i) 2t_A \\ &= (v_i \cos \theta_i) \frac{2v_i \sin \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{g} \end{aligned}$$

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \dots\dots\dots(2.9)$$

ระยะสูงสุด (Maximum Height: h)

$$v_{yf} = v_{yi} - gt \Rightarrow 0 = v_i \sin \theta_i - gt_A$$

$$t_A = \frac{v_i \sin \theta_i}{g}$$

จากสมการที่ 2.6 และแทนค่า t ลงในสมการจะได้

$$h = (v_i \sin \theta_i) \frac{v_i \sin \theta_i}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g} \dots\dots\dots(2.8)$$

ระยะพินัยมากที่สุดจะเกิดเมื่อไร ...?

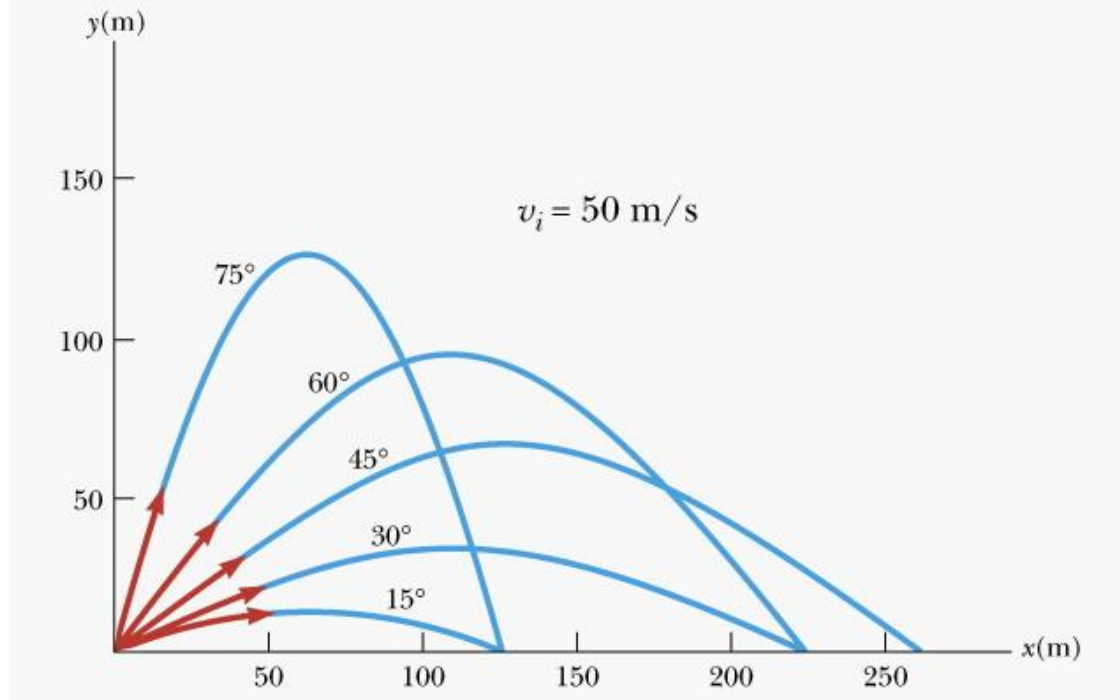
6

จากสมการที่ 2.9 จะเห็นว่า

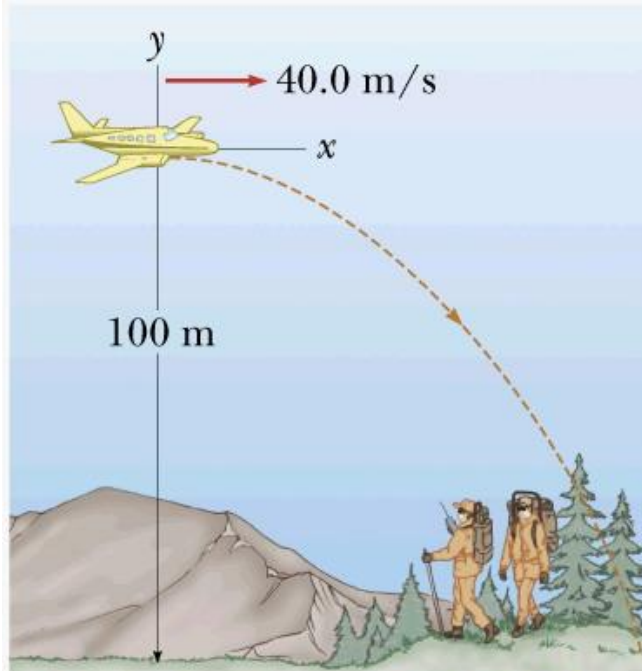
$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

$$R = R_{\max} \Rightarrow \theta_i = 45^\circ$$

$$R_{\max} = \frac{v_i^2}{g}$$



ตัวอย่างที่ 1 เครื่องบินเคลื่อนที่ไปในแนวระดับด้วยความเร็ว 40 m/s และบินอยู่สูงเหนือระดับพื้นดิน 100 m ถ้าโยนวัตถุลงมาจากเครื่อง วัตถุจะตกลงพื้นที่ตำแหน่งใดเทียบกับจุดที่ปล่อยวัตถุ ลงมา ดังรูป



ความเร็วต้นของวัตถุ = ความเร็วของเครื่องบิน

$$v_{xi} = 40 \text{ m/s}$$

$$x_f = v_{xi}t = 40t \dots\dots(1)$$

หาเวลาจากการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง

$$y_f - y_i = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{yi} = 0, \quad y_i = 0 \Rightarrow y_f = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$-100 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 \Rightarrow t = \frac{2(100)}{9.8}$$

$$t = 4.52 \text{ s}$$

แทนค่า t ลงในสมการ (1) จะได้ระยะทางตามแนวนอนเป็น $x_f = (40)(4.52) = 181 \text{ m}$

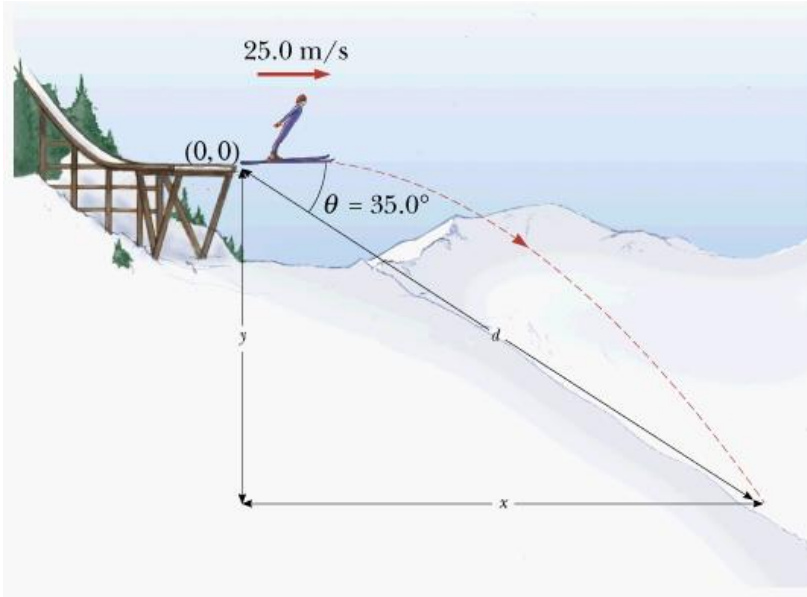
องค์ประกอบของความเร็วในแนวนอนและแนวตั้งของวัตถุเป็นเท่าใด ก่อนที่จะกระทบพื้น

$$v_{xf} = v_{xi} = 40 \text{ m/s}$$

$$v_{yf} = v_{yi} - gt = 0 - (9.8)(4.52) = -44.3 \text{ m/s}$$

8/6/2018

ตัวอย่างที่ 2 นักสกีเคลื่อนที่พุ่งออกจากรางสกีตามแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 25 m/s ดังรูป นักสกีจะกระทบพื้นผิวที่มีความลาดชันที่ตำแหน่งใด



$$x_f = v_{xi}t = (25)t \quad \text{.....(1)}$$

$$y_f = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 \quad \text{.....(2)}$$

หา t จากความสัมพันธ์นี้

$$x_f = d \cos 35^\circ ; \quad y_f = -d \sin 35^\circ$$

$$d \cos 35^\circ = (25)t \quad \text{.....(3)}$$

$$-d \sin 35^\circ = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 \quad \text{.....(4)}$$

จากสมการ (3) และ (4) ทำให้ได้

$$\tan(35^\circ) = \frac{9.8}{2(25)}t \Rightarrow t = \frac{(50)(\tan 35^\circ)}{9.8} = 3.57 \text{ s}$$

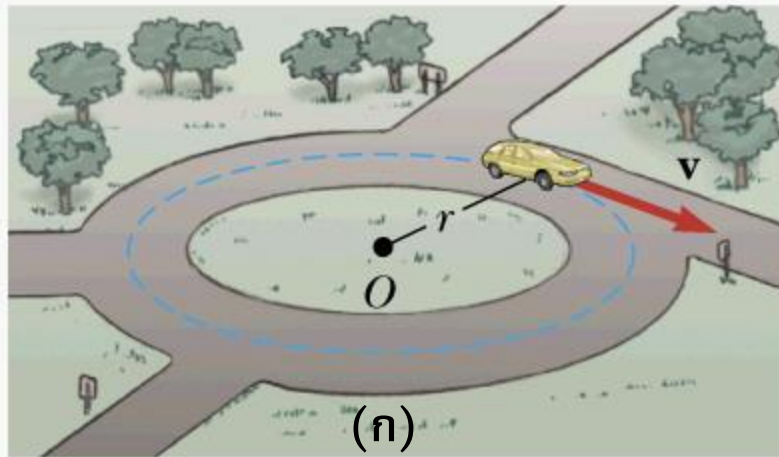
$$d = \frac{(25)(3.57)}{\cos 35^\circ} = 109 \text{ m}$$

$$x_f = d \cos 35^\circ = (109)\cos 35^\circ = 89.3 \text{ m}$$

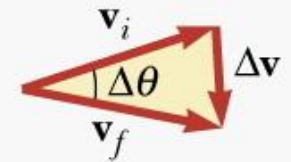
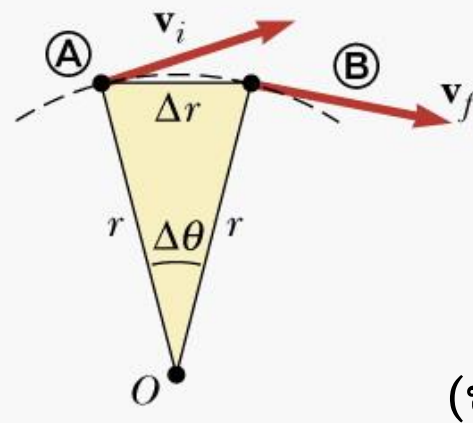
$$y_f = -d \sin 35^\circ = -(109)\sin 35^\circ = -62.5 \text{ m}$$

การเคลื่อนที่แบบวงกลม

9



รูป (ก) รถยนต์กำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลม
ด้วยอัตราเร็วเชิงเส้นคงที่



รูป (ข) วัตถุใดๆที่เคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมรัศมี r

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วเชิงเส้นคงที่ วัตถุจะมีความเร่งเข้าสู่จุดศูนย์กลาง
ความโค้ง (centripetal acceleration) แทนด้วย a_r

พิจารณารูป (ข) : ความเร่งเฉลี่ย
$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

8/6/2018

การเคลื่อนที่แบบวงกลม (ต่อ)

10

จากการพิจารณาสามเหลี่ยมคล้ายในรูป (ข)

ทำให้ได้

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \Delta v = \frac{v \Delta r}{r}$$

และความเร่งเฉลี่ย

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

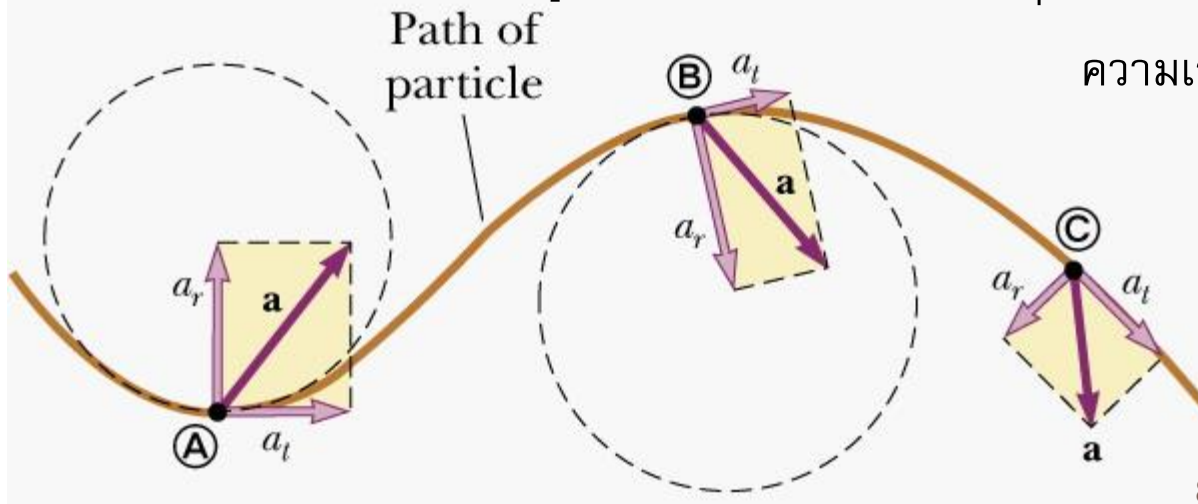
ดังนั้นเมื่อพิจารณาในช่วงเวลาน้อยๆ ($\Delta t \rightarrow 0$)

จะได้ว่าขนาดของความเร่งเฉลี่ยเท่ากับ

ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง

$$\bar{a} = a_r = \frac{v^2}{r} \dots\dots\dots(2.10)$$

การเคลื่อนที่เป็นเส้นทางโค้งดังรูปข้างล่าง ความเร็วของวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทาง



ความเร่งจึงประกอบด้วยสองส่วน คือ

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_r \dots\dots\dots(2.11)$$

$$a_t = \frac{d|v|}{dt}, \quad a_r = \frac{v^2}{r}$$

ความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์

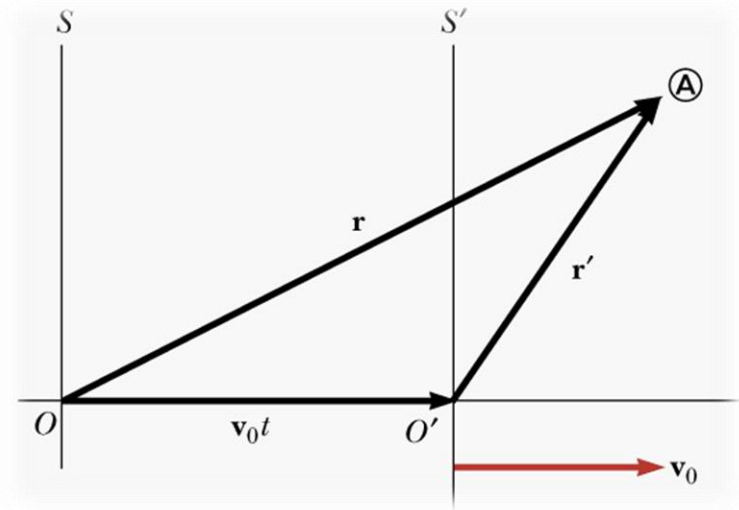
11

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}_0 t$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t \quad \dots\dots(2.12)$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V}_0$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0 \quad \dots\dots(2.13)$$



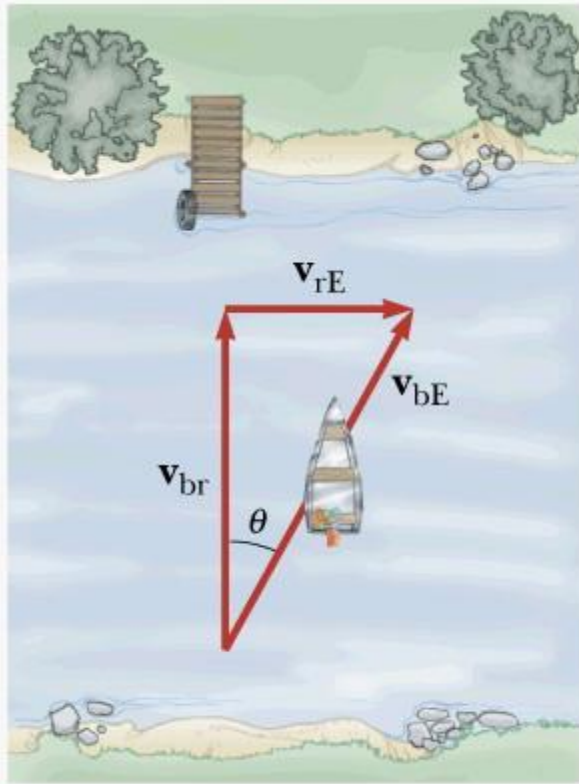
เมื่อ $\vec{v}$ และ $\vec{v}'$ คือ ความเร็วของวัตถุที่วัดในกรอบอ้างอิง S และ S' ตามลำดับ

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{V}_0}{dt}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad \dots\dots(2.14)$$

ดังนั้น ความเร่งที่ผู้สังเกต O และ O' วัดได้จะมีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 3 เรือลำหนึ่งเคลื่อนที่ไปทางทิศเหนือด้วยอัตราเร็ว **10 km/h** เทียบกับกระแสน้ำ น้ำในแม่น้ำไหลด้วยอัตราเร็วสม่ำเสมอ **5 km/h** เทียบกับพื้นดิน จงหาความเร็วของเรือเทียบกับผู้สังเกตที่อยู่บนฝั่งตรงข้าม



$$\vec{v}_{bE} = \vec{v}_{br} + \vec{v}_{rE}$$

$$v_{bE} = \sqrt{(v_{br}^2) + (v_{rE}^2)} = \sqrt{(10)^2 + (5)^2}$$

$$v_{bE} = 11.2 \text{ km/h}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = 26.6^\circ$$