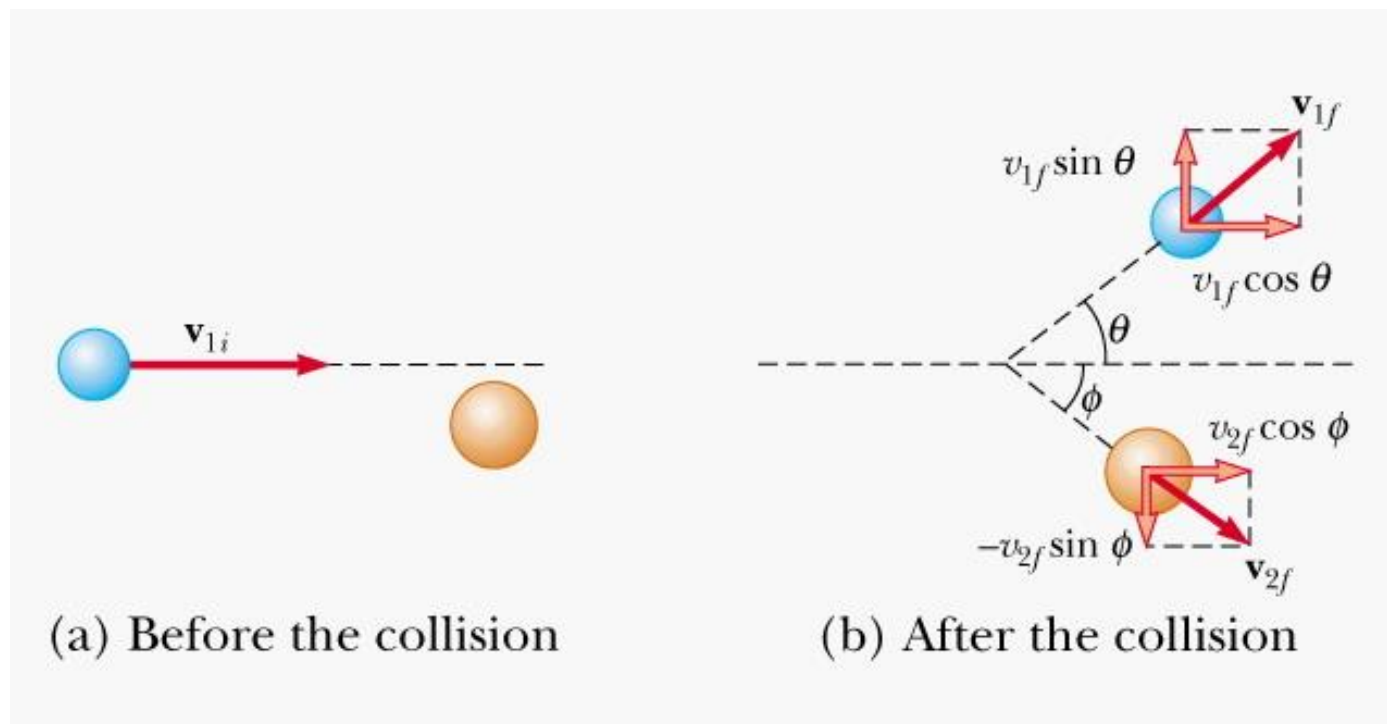


การชนในแบบ 2 มิติ

พิจารณาการชนของสองอนุภาคในระบบ xy โดยที่เริ่มต้นอนุภาคมวล m_2 หยุดนิ่ง ขณะที่มวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็วพุ่งเข้าชนดังรูป



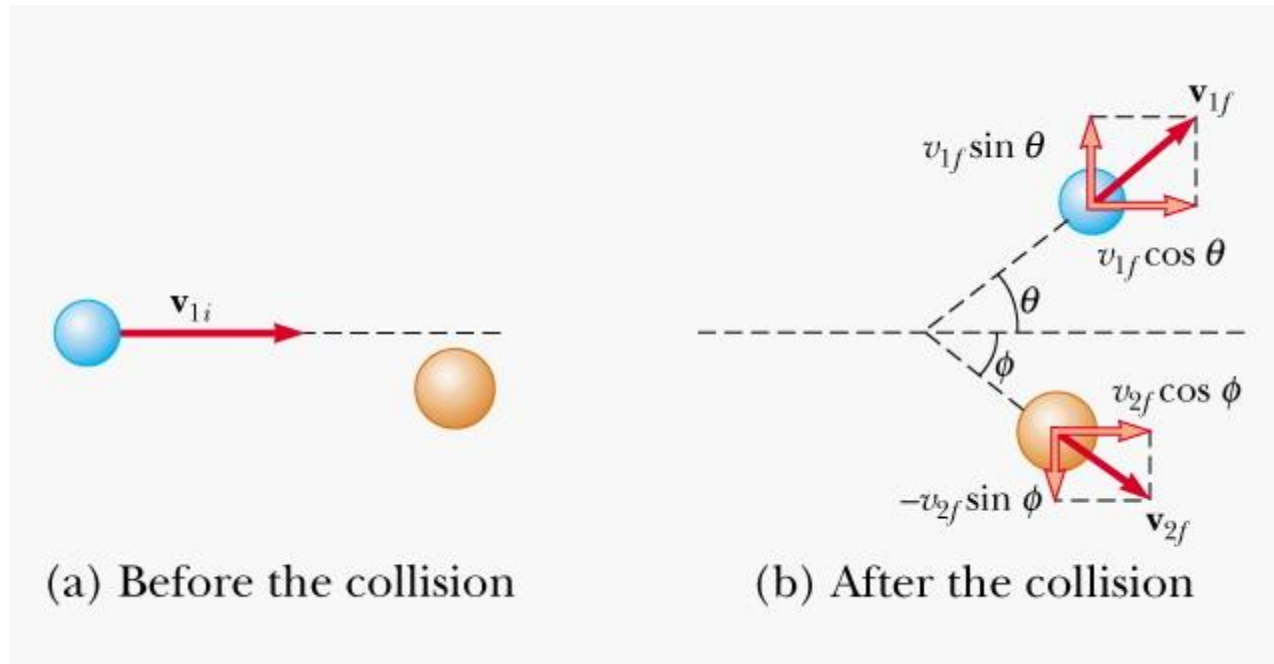
กฎการคงตัวของโมเมนตัม

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_2 \cos \phi \quad (4.14)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi \quad (4.15)$$



ถ้าการชนนั้นเป็นการชนแบบยืดหยุ่นจะได้ว่า พลังงานจลน์ก่อนชนจะเท่ากับพลังงานจลน์หลังชน

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (4.16)$$

ตัวอย่างที่ 4 ลูกบอลสีขาวมีความเร็ว $\mathbf{v}_{1i}$ ในทิศทางตามแกน x พุ่งเข้าชนกับลูกบอลสีม่วงซึ่งวางอยู่นิ่ง หลังจากการชนลูกบอลทั้งสองกระเด็นออกไปในทิศทางดังรูป จงหาค่ามุม θ เป็นเท่าไร

ถ้าประมาณการชนนี้เป็นแบบยืดหยุ่น ดังนั้น

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

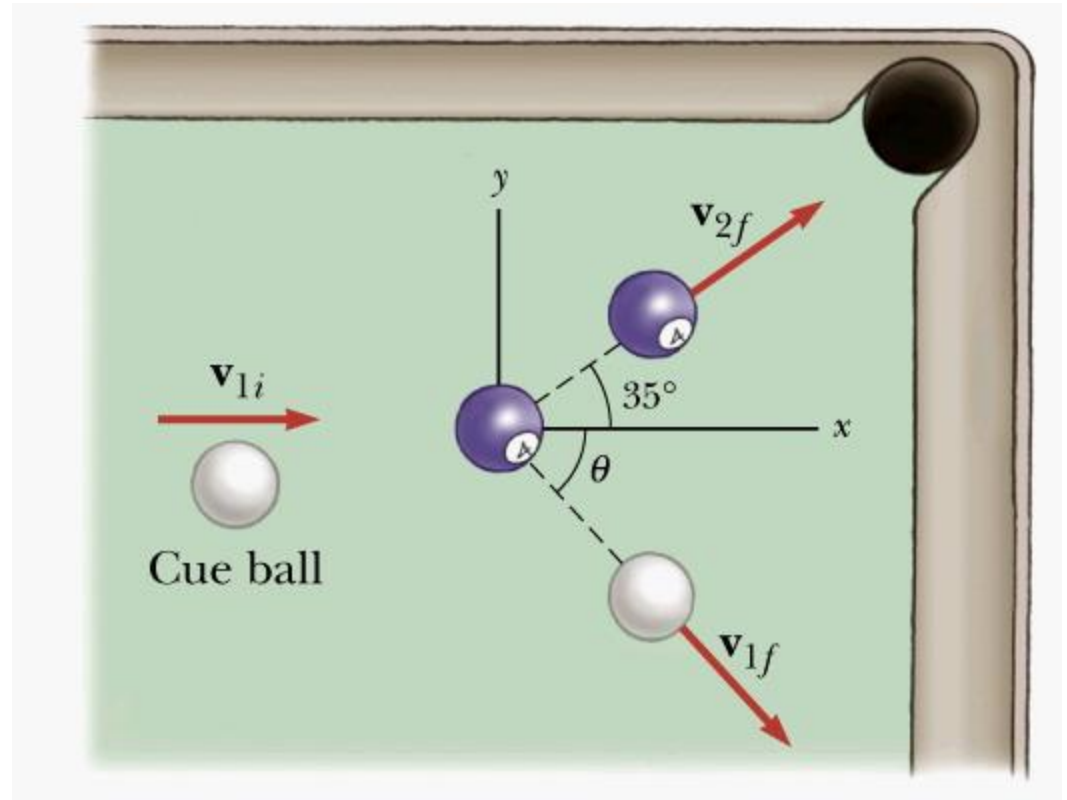
เนื่องจาก $m_1 = m_2$ ดังนั้น

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (1)$$

จากหลักการคงตัวของโมเมนตัม

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \quad (2)$$



เนื่องจาก $v_{1i}^2 = \vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{1i} = (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) \cdot (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f}$

เพราะว่ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{v}_{1f}$ กับ $\mathbf{v}_{2f}$ คือ $\theta + 35^\circ$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} &= v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ) \\ v_{1i}^2 &= v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ) \quad (3)\end{aligned}$$

แทนสมการ (1) ลงในสมการ (3) จะได้

$$0 = 2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ)$$

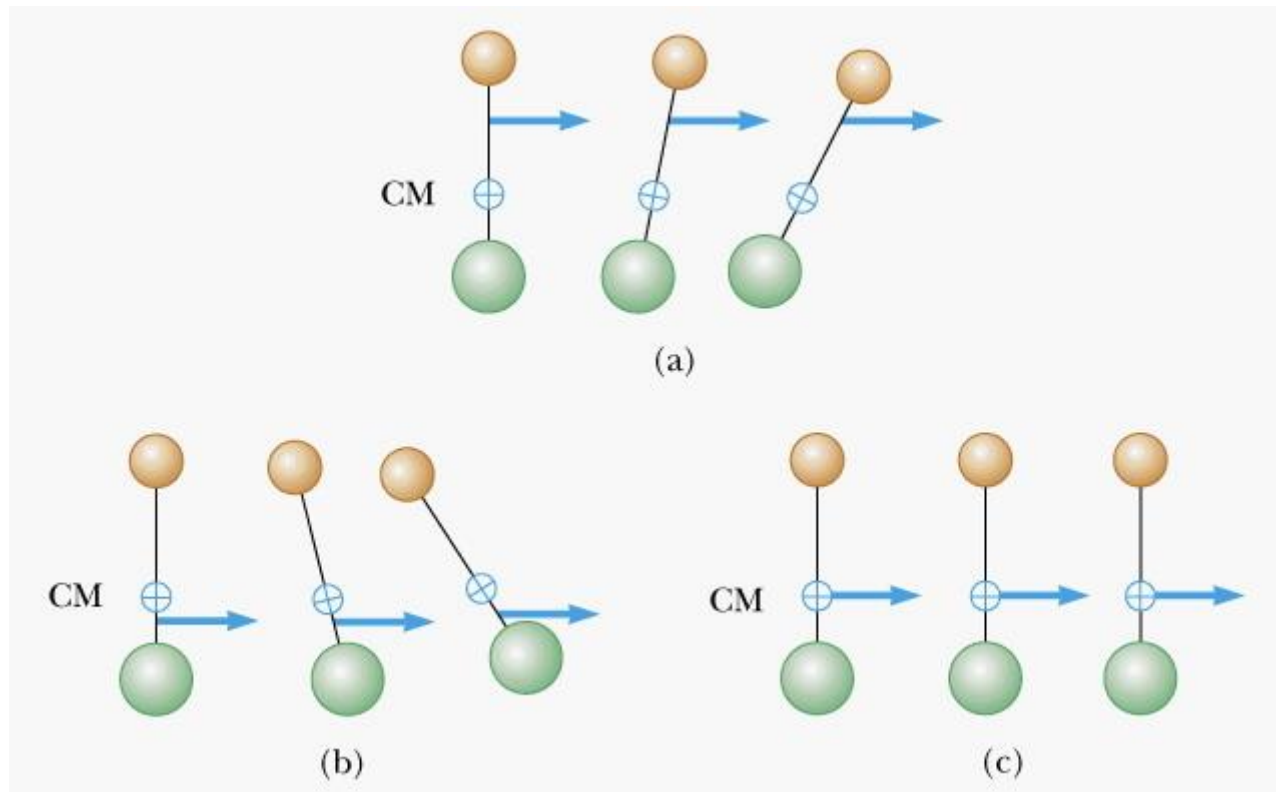
$$0 = \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$\theta + 35^\circ = 90^\circ$$

$$\theta = 55^\circ$$

จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass)

พิจารณาระบบสองอนุภาคที่มีมวลไม่เท่ากับยึดติดกันด้วยแท่งยาวซึ่งมีมวลน้อยมาก จากรูปจะเห็นว่าแนวการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลจะไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าระบบอนุภาคทั้งสองจะมีการเคลื่อนที่แบบต่าง ๆ กัน



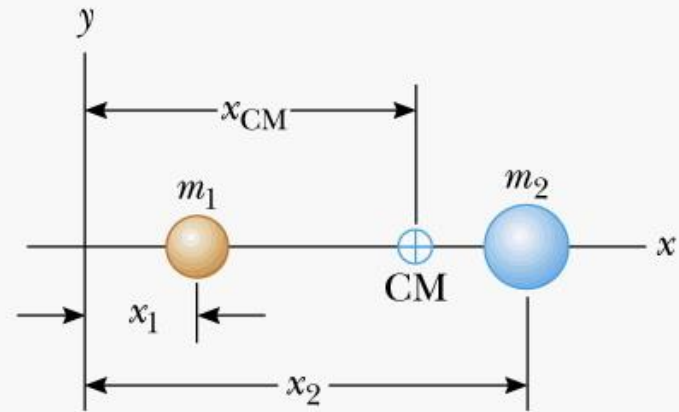
ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ จึงเปรียบเสมือนตำแหน่งเฉลี่ยของมวลต่าง ๆ ในระบบอนุภาค

จุดศูนย์กลางมวล (ต่อ)

พิจารณาในกรณีระบบที่มีสองอนุภาควางตัวตามแกน x ดังรูป การหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลจะทำได้ดังนี้

ถ้าหาว่าระบบที่มีอนุภาคจำนวนมาก (n อนุภาค)
การหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลก็จะกระทำใน
ลักษณะเดียวกัน

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (4.17)$$

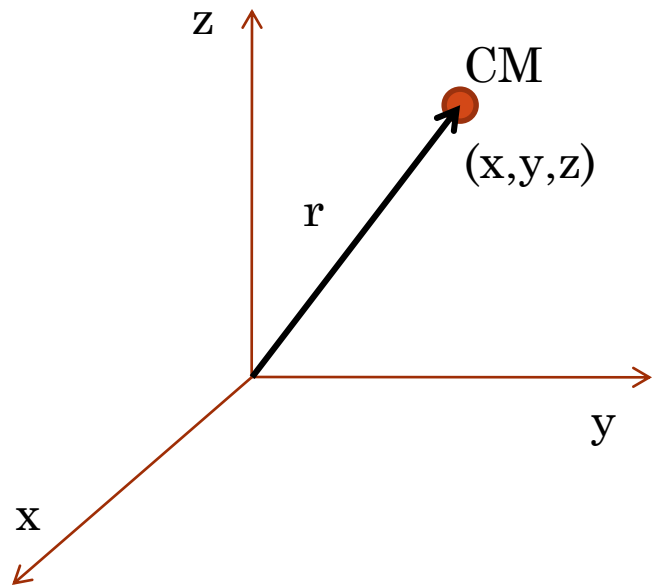


$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad (4.17)$$

ในทำนองเดียวกันในการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลตามแกน y และ z

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \quad (4.18)$$

จุดศูนย์กลางมวล (ต่อ)

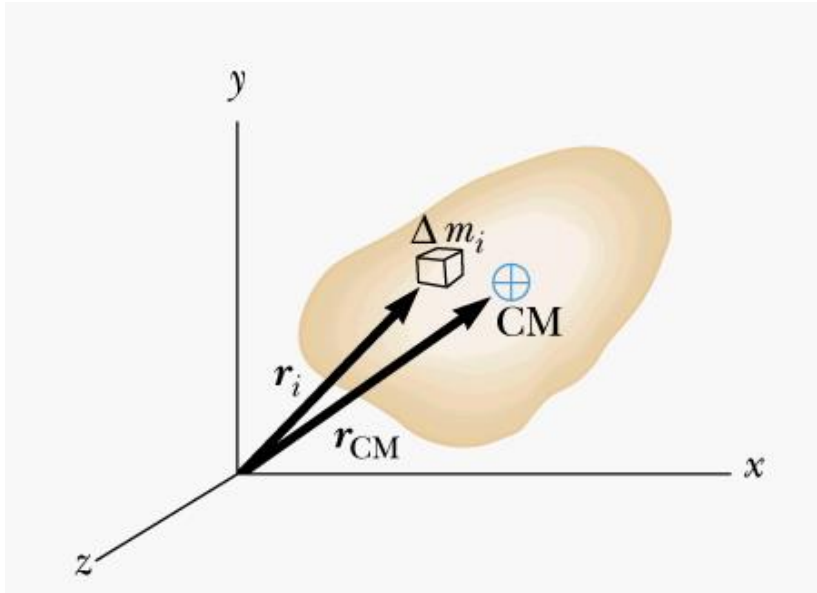


ในระบบพิกัดฉาก **xyz** การระบุตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลจะใช้เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector)

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k} \\ &= \frac{\sum_i m_i x_i \hat{i} + \sum_i m_i y_i \hat{j} + \sum_i m_i z_i \hat{k}}{M} \\ \vec{r}_{CM} &= \frac{\sum_i m_i (x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k})}{M} = \frac{\sum_i m \vec{r}_i}{M}\end{aligned}\quad (4.18)$$

เมื่อ $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ i

จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ



เวกเตอร์บอกตำแหน่งของมวลส่วนเล็ก ๆ Δm_i

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

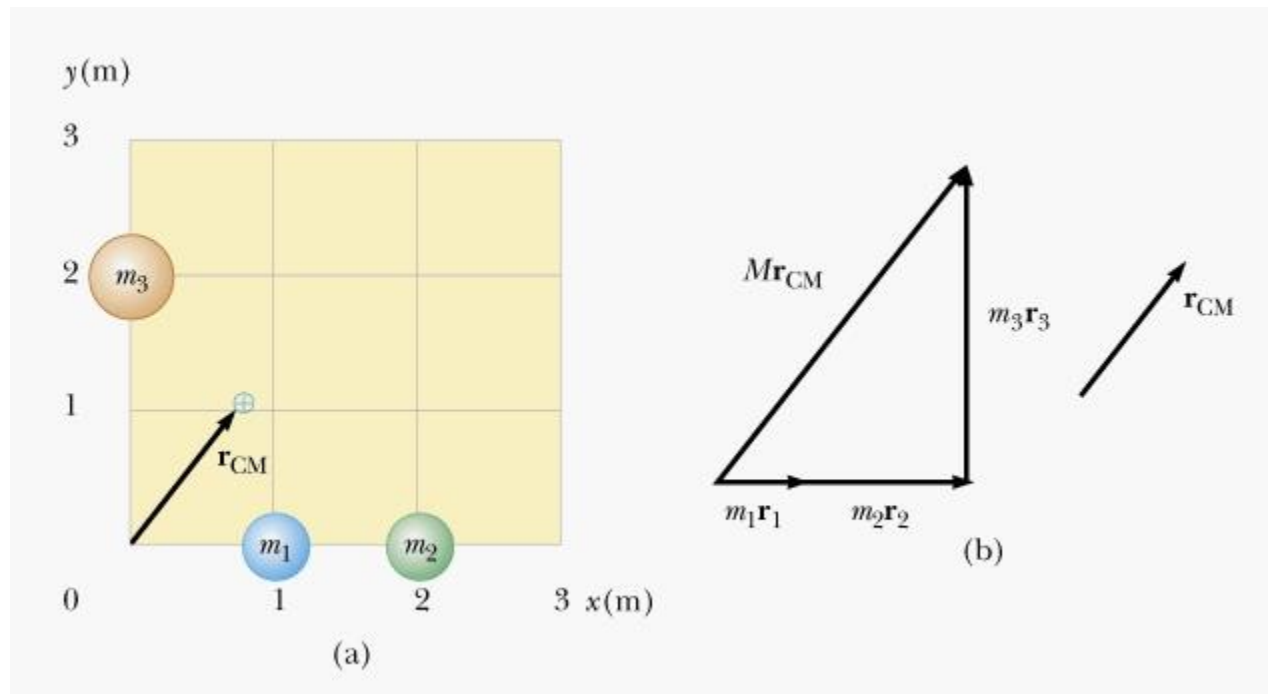
จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุมวล M คือ

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int x dm \quad (4.19)$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm \quad (4.20)$$

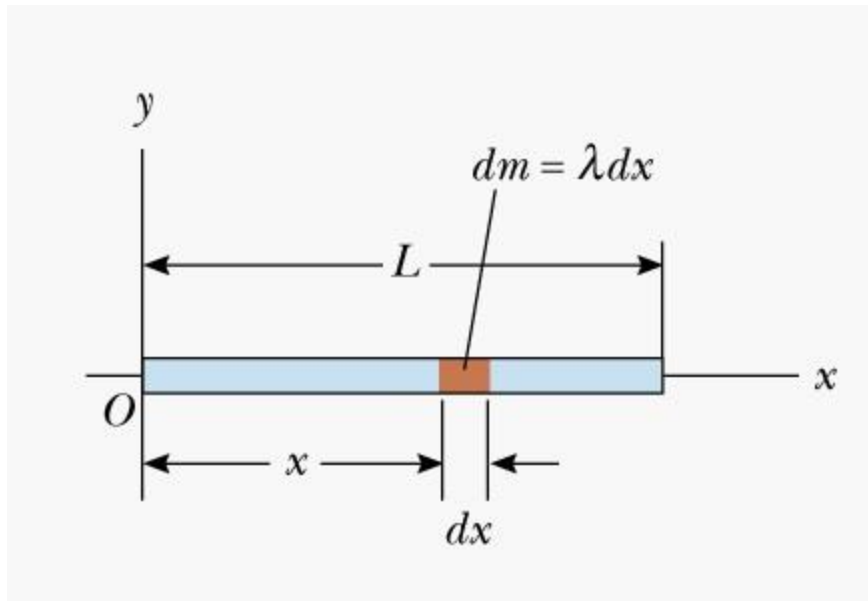
$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm \quad (4.21)$$

คำถาม? จากรูปจงหาจุดศูนย์กลางมวลของอนุภาคทั้งสามเมื่อ $m_1 = m_2 = 1.0 \text{ kg}$ และ $m_3 = 2.0 \text{ kg}$



คำตอบ $x_{CM} = 0.75$, $y_{CM} = 1.0$, $z_{CM} = 0.0$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแท่งไม้ยาวสม่ำเสมอ L และมีมวล M



แท่งไม้วางในแนวแกน x ดังนั้น จึงได้ว่า

$$y_{CM} = z_{CM} = 0$$

ถ้ากำหนดให้ λ คือ ความหนาแน่นมวลต่อความยาว นั่นคือ

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

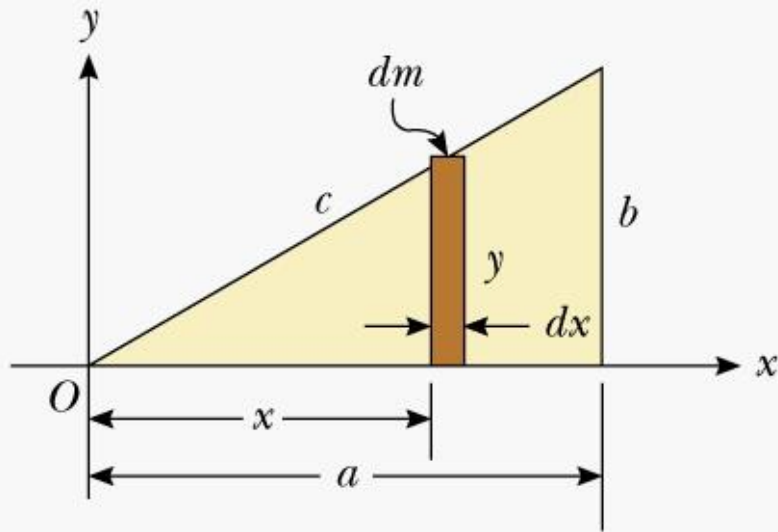
สำหรับมวลเล็กๆ dm จึงมีค่าเป็น

$$dm = \lambda dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M} \left(\frac{M}{L} \right) = \frac{L}{2}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงคำนวณหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมวล M ดังรูป



เริ่มจากการแบ่งวัตถุออกเป็นส่วนเล็กๆ (รูปสี่เหลี่ยม) ซึ่งมีมวลเป็น dm โดยที่

$$dm = \frac{\text{total mass of object}}{\text{total area of object}} \times \text{area of strip}$$

$$dm = \frac{M}{\frac{1}{2}ab} (ydx) = \left(\frac{2M}{ab} \right) ydx$$

ดังนั้น พิกัดตามแกน X ของจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^a x \left(\frac{2M}{ab} \right) y dx = \frac{2}{ab} \int_0^a xy dx$$

เพื่อทำการคำนวณหาค่าอินทิเกรตจำเป็นต้องแสดงค่า y ในเทอมของตัวแปร x โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายนี้

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a} x$$

แทนค่าของ y ลงในสมการข้างต้นดังกล่าวแล้วคำนวณหาค่า x_{CM} ได้ดังนี้

$$x_{CM} = \frac{2}{ab} \int_0^a x \left(\frac{b}{a} \right) x dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$x_{CM} = \frac{2}{3}a$$

โดยการคำนวณในแบบเดียวกัน เราจะได้พิกัดของจุดศูนย์กลางมวลตามแกน y เป็นดังนี้

$$y_{CM} = \frac{1}{3}b$$