

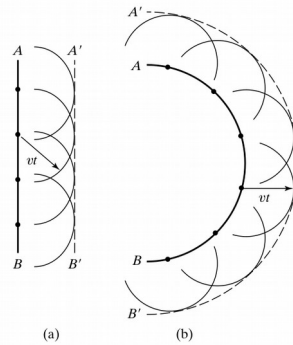
แสงเชิงเรขาคณิต 2

7. หลักการของฮอยเกนส์

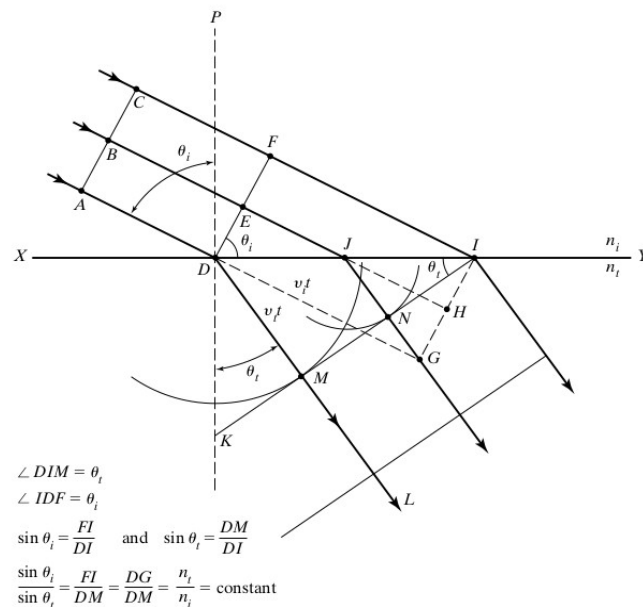
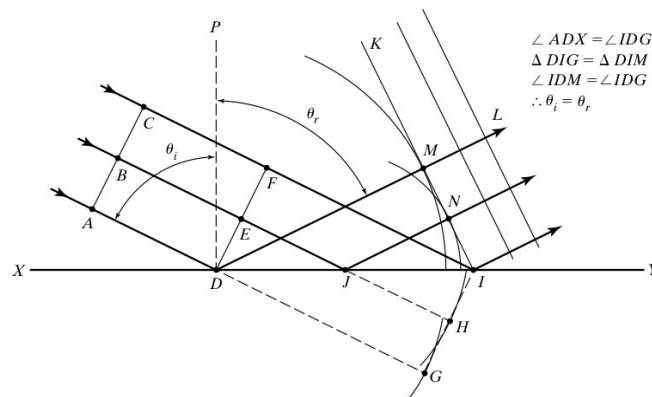
คือการใช้แสงเป็นคลื่นในการอธิบายการหักเหและการสะท้อนบนรอยต่อของตัวกลางสองตัว

ทุกจุดของหน้าคลื่นจะทำตัวเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่

การคิดเช่นนี้ทำให้เราสามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของคลื่นแสงได้ทั้งในกรณีหน้าคลื่นเป็นเส้นตรงและคลื่นวงกลม(หรือทรงกลม)ดังภาพ

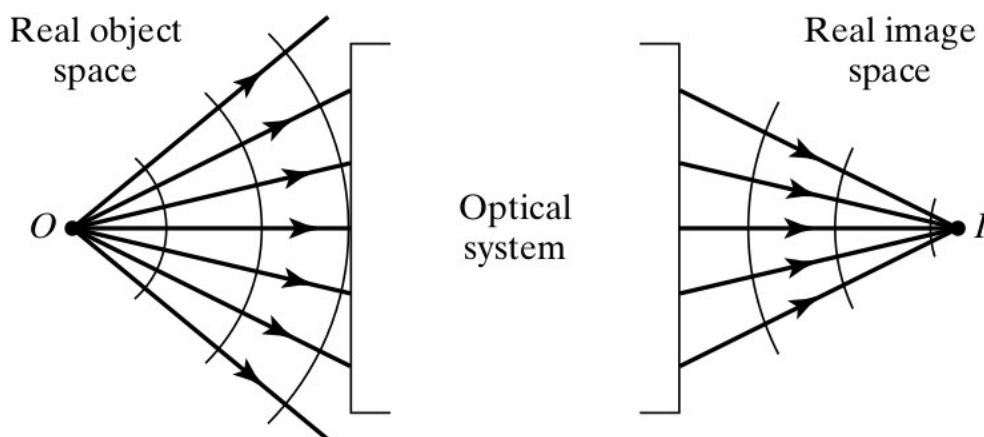


การสะท้อนและหักเหก็สามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกัน



8. ระบบเชิงแสง

ทางเดินของแสงคือเส้นที่ลาก _____ กับหน้าคลื่น ซึ่งบอกทิศทางการเคลื่อนที่ของแสง
ตำแหน่งภาพถูกนิยามด้วย _____
และตำแหน่งวัตถุถูกนิยามด้วย _____

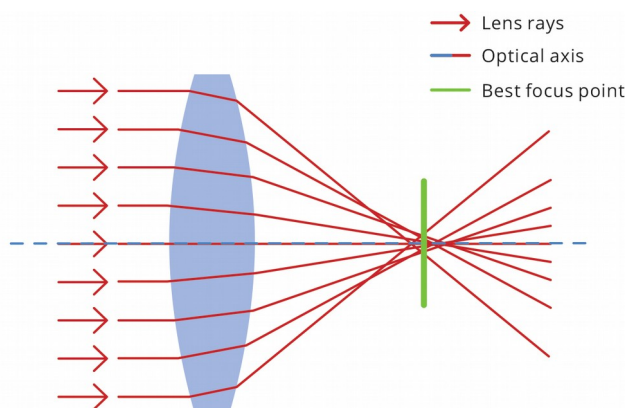


โดยจุด _____ และจุด _____ เป็นจุด _____ ซึ่งกันและกัน

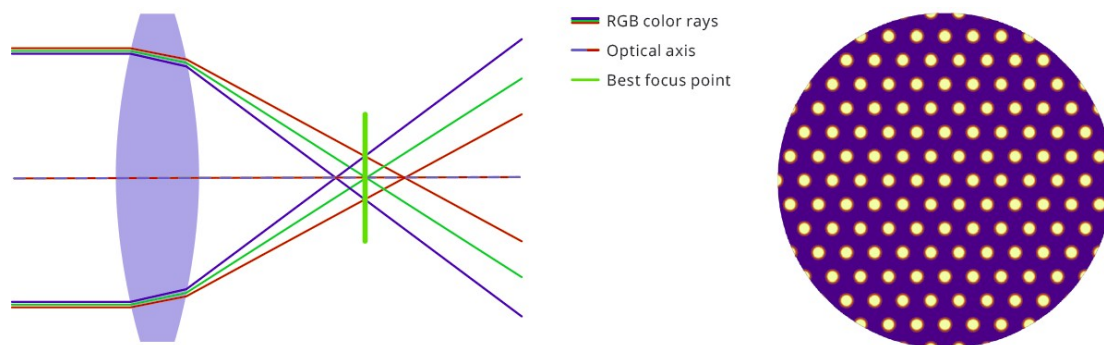
ภาพที่เกิดขึ้นอาจจะไม่สมบูรณ์เนื่องจากหลายสาเหตุเช่นการกระเจิงของแสง, ความคลาด (aberration), และการเลี้ยวเบน (diffraction)

ความคลาด

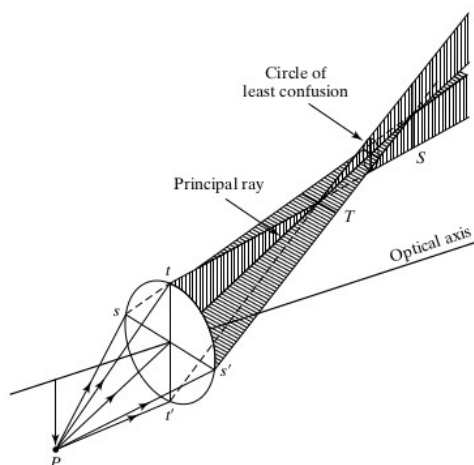
ความคลาดทรงกลม (Spherical Aberration) เกิดจากการที่ผิวทรงกลมของเลนส์มีสมบัติไม่รวมแสงไปที่จุดๆเดียว แต่ในกรณีที่ว่าวัตถุใกล้แกนแสงเราจะเห็นว่า _____



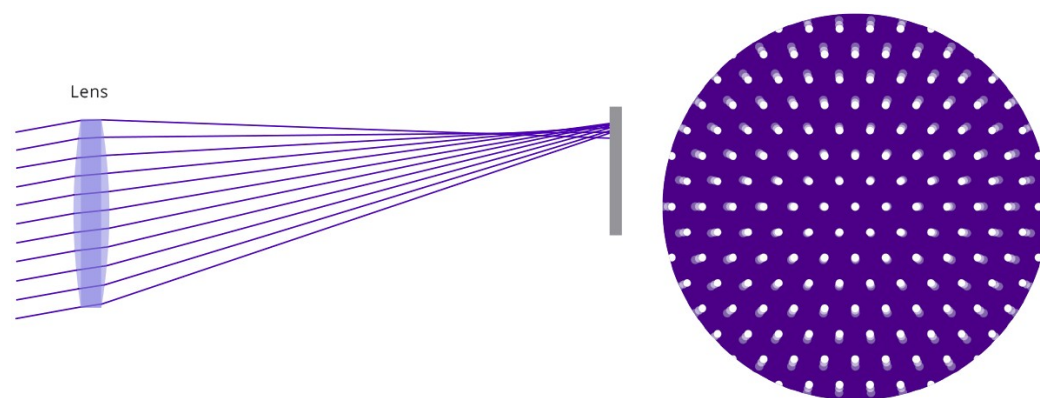
ความคลาดสี (Chromatic Aberration) เกิดจากการที่ดัชนีหักเหของแสงสำหรับแต่ละความยาวคลื่นมีค่าแตกต่างกัน ทำให้การหักเหของระบบเชิงแสงมีจุดรวมแสงขึ้นกับความยาวคลื่น



ความคลาดเอียง (astigmatism aberration) เกิดจากกรณีที่จุดรวมแสงสำหรับแสงในแต่ละแนวไม่เป็นจุดเดียวกัน (ปรากฏการณ์นี้เกิดได้ในกรณีที่ผิวเลนส์โค้งอย่างไม่สม่ำเสมอในแต่ละแนว ตัวอย่างเช่นผู้ที่มีภาวะสายตาเอียงเป็นต้น)

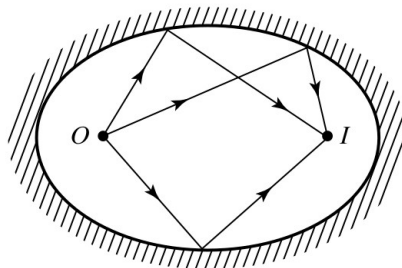


ความคลาดโคมา (Coma) คือการที่แสงไม่รวมที่จุดเดียวกันในกรณีที่วัตถุไม่อยู่ในแนวเดียวกับแกนเชิงแสง ทำให้ภาพมีลักษณะเป็นดาวหาง



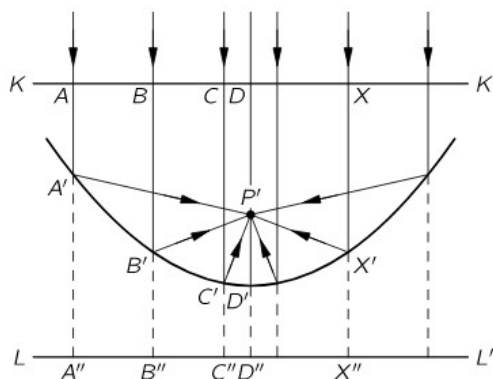
พื้นผิวคาร์ทีเซียน คือพื้นผิวของระบบเชิงแสงที่ทำให้ภาพเกิดได้อย่างสมบูรณ์แบบ

ในกรณีของกระจกผิววงรี จากหลักการของแฟร์มาต์ทำให้เราทราบว่าจุดสังยุค (conjugate points) ต้องอยู่ในตำแหน่ง _____ ของวงรี เนื่องจากสมบัติของวงรีที่บอกว่า _____

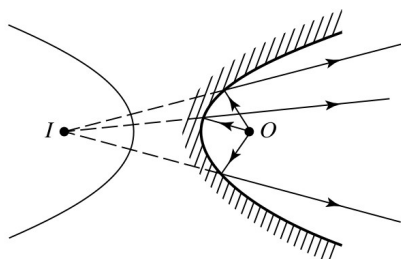


(a) Ellipsoid

ในกรณีของผิวพาราโบลา จุตรวมแสงต้องอยู่ในตำแหน่งโฟกัสซึ่งเราสามารถแสดงได้จากหลักการของแฟร์มาต์ดังนี้ เนื่องจากสมบัติของพาราโบลาที่บอกว่า _____



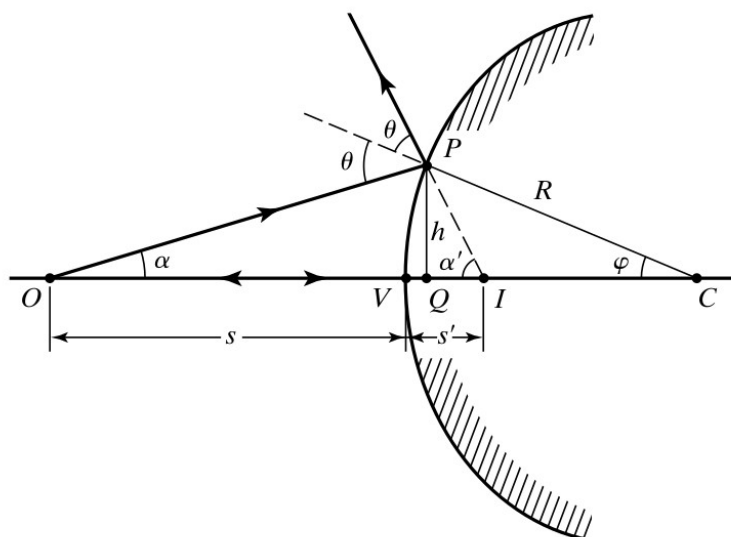
แบบฝึกหัด ผิวโค้งแบบไฮเพอร์โบลาเป็นผิวคาร์ทีเซียนอีกชนิดหนึ่ง จงใช้หลักการของแฟร์มาต์ในการพิสูจน์ว่าจุดสังยุคอยู่ที่จุดโฟกัส (คำแนะนำ - วาดวงกลมรัศมี R ซึ่งมีจุด I เป็นจุดศูนย์กลางดังภาพ)



(b) Hyperboloid

9. การสะท้อนผ่านกระจกผิวโค้ง

กระจกโค้งนูน (convex) คือกระจกที่ _____
 กระจกโค้งเว้า (concave) คือกระจกที่ _____



จากภาพ ระยะภาพคือ _____
 ระยะวัตถุคือ _____

การประมาณโดยการทำ Taylor expansion ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดย

$$\sin(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots$$

ถ้าเราต้องการความสัมพันธ์ของระยะภาพและระยะวัตถุโดยที่สมการขึ้นกับรัศมีเท่านั้น เราจำเป็นต้องทำการประมาณให้มุมตกกระทบ, มุมสะท้อน และมุมหักเหมีค่าน้อย นั่นคือทางเดินของแสงมีลักษณะเกือบขนานไปกับแกนเชิงแสง การประมาณนี้จึงมักเรียกว่า Paraxial Approximation หรือ Gauss approximation

$$\frac{h}{s} - \frac{h}{s'} = \frac{-2h}{R}$$

ถ้าเปลี่ยนผิวนี้เป็นกระจกเงา ความสัมพันธ์จะกลายเป็น

$$\frac{h}{s} + \frac{h}{s'} = \frac{-2h}{R}$$

ซึ่งทำให้เราสรุปสูตรทั่วไปได้เป็น

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{-2}{R} \equiv \frac{1}{f}$$

โดยที่ ระยะวัตถุเป็นบวกเมื่อ _____

ระยะวัตถุเป็นลบเมื่อ _____

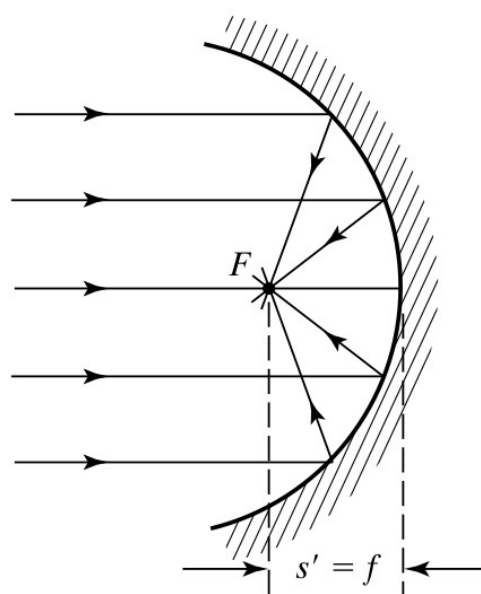
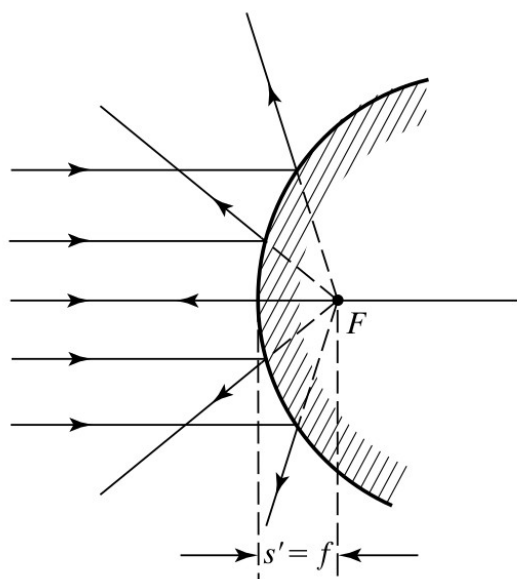
ระยะภาพเป็นบวกเมื่อ _____

ระยะภาพเป็นลบเมื่อ _____

รัศมีความโค้งเป็นบวกเมื่อ _____

รัศมีความโค้งเป็นลบเมื่อ _____

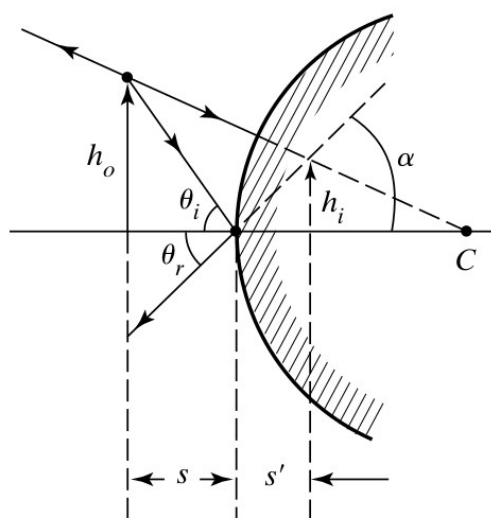
เมื่อพิจารณาระยะภาพหรือระยะวัตถุที่ระยะอนันต์ เราพบว่าความยาวโฟกัส f มีความหมายว่าเป็น



นั่นคือ ความยาวโฟกัสเป็นบวกเมื่อ _____

และความยาวโฟกัสเป็นลบเมื่อ _____

กำลังขยาย เมื่อพิจารณาวัตถุที่มีขนาดดังภาพ เราพบว่า



$$\frac{h_o}{s} = \frac{h_i}{s'}$$

กำลังขยายถูกนิยามให้เป็นอัตราส่วนระหว่าง _____

$$|m| = \frac{h_i}{h_o} = \frac{s'}{s}$$

เมื่อพิจารณาเครื่องหมายด้วยข้อตกลงดังนี้

เรานิยามให้เครื่องหมายของกำลังขยายเป็นบวกเมื่อภาพมีทิศทางเดียวกันกับวัตถุ (ภาพหัวตั้ง)

และนิยามให้เครื่องหมายของกำลังขยายเป็นลบเมื่อภาพมีทิศทางตรงกันข้ามกับวัตถุ (ภาพหัวกลับ)

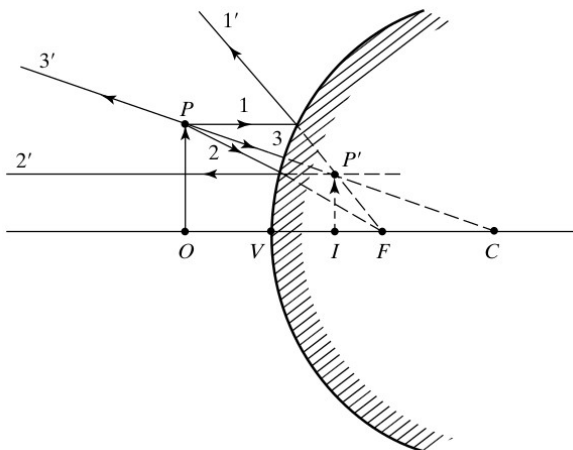
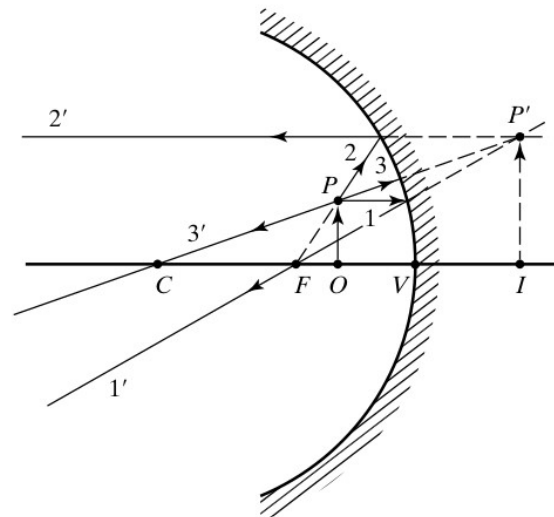
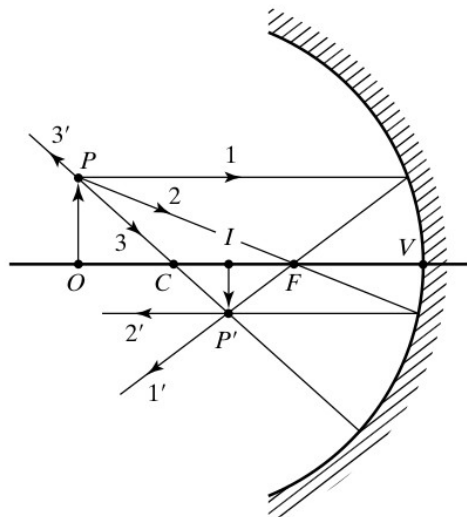
ดังนั้นสูตรของกำลังขยายจะเป็น

$$m = \frac{-s'}{s}$$

ตัวอย่าง

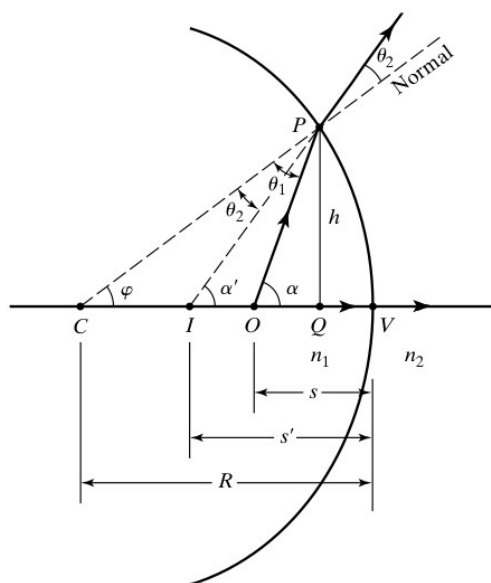
วัตถุขนาด 3 cm ถูกวางเป็นระยะ 20 cm ข้างหน้า a) กระจกโค้งนูน b) กระจกโค้งเว้า ซึ่งมีความยาวโฟกัส 10 cm จงหาว่าภาพจะเกิดขึ้นที่ใด และภาพมีขนาดและลักษณะอย่างไร ในแต่ละกรณี

การวาดภาพเพื่อหาตำแหน่ง/ลักษณะภาพ



10. การหักเหผ่านรอยต่อโค้ง

เมื่อใช้กฎของสเนลโดยการประมาณ paraxial จะได้ว่า $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$



$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

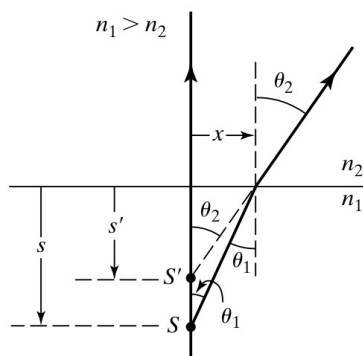
ซึ่งเมื่อใช้ข้อตกลงเดียวกันกับกระจกโค้ง (ตามภาพคือระยะภาพติดลบและรัศมีความโค้งติดลบ) ทำให้เราได้สูตรทั่วไปของการหักเหผ่านรอยต่อผิวโค้งเป็น

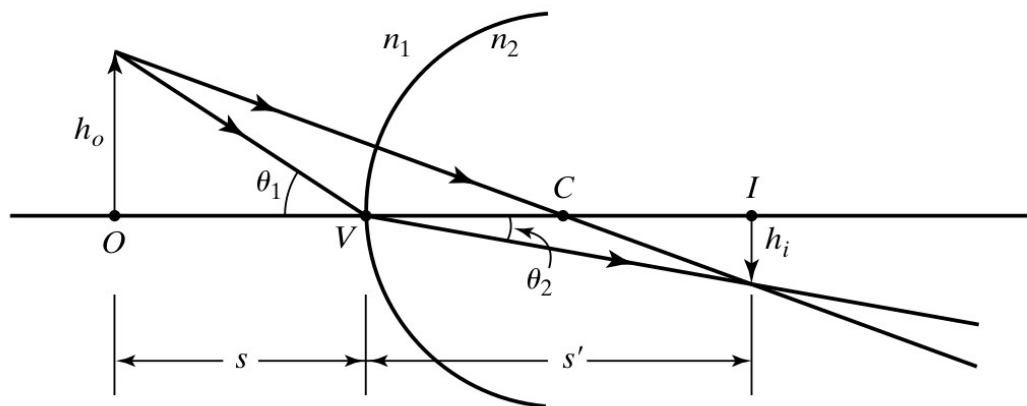
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

ซึ่งทำให้สูตรนี้สามารถใช้กับกรณีผิวโค้งนูนเช่นเดียวกัน โดยใช้ข้อตกลงเดียวกันกับกระจกโค้ง ในกรณีที่ผิวมีลักษณะเป็นเส้นตรง นั่นคือรัศมีความโค้งมีค่า _____ เราจะได้ว่า

$$s' = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)s$$

ซึ่งสอดคล้องกับกฎของสเนลจากภาพ



กำลังขยาย

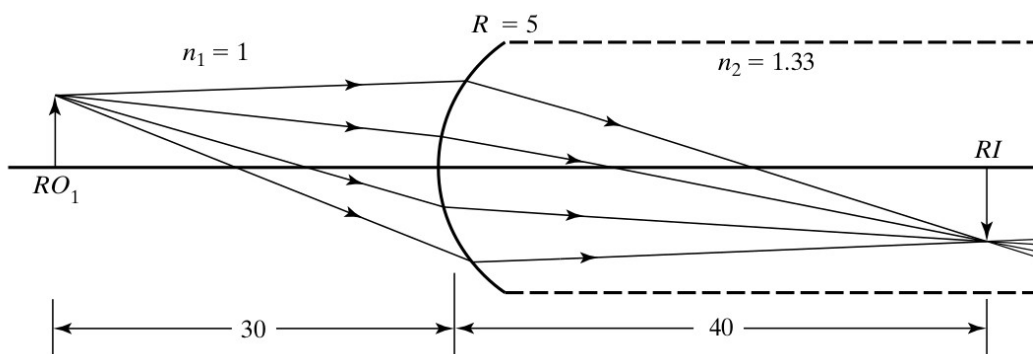
จากภาพเราจะได้ว่า

$$n_1 \left(\frac{h_o}{s} \right) = n_2 \left(\frac{h_i}{s'} \right)$$

ดังนั้นสูตรกำลังขยายคือ

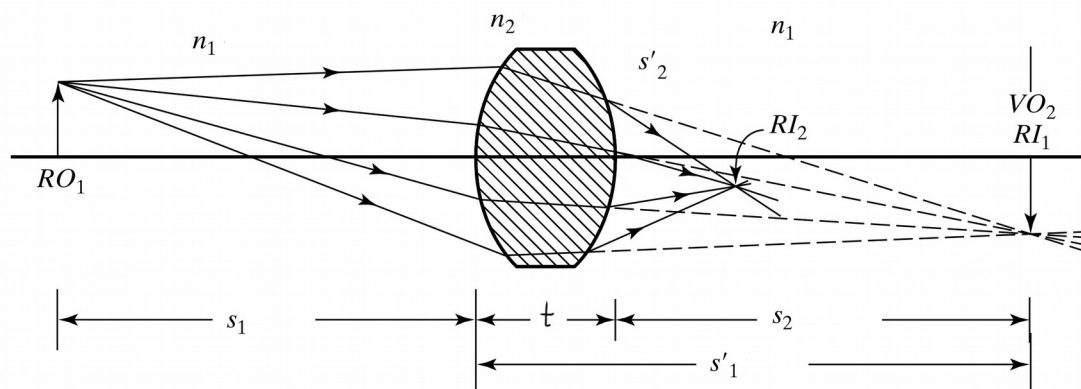
$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{-n_1 s'}{n_2 s}$$

ตัวอย่าง วัตถุมีขนาดขึ้นหนึ่งถูกวางหน้าแก้วนูนที่มีรัศมีความโค้ง 5 cm เป็นระยะ 30 cm ดังภาพ จงหาระยะภาพและกำลังขยาย



11. เลนส์บาง

เราจะใช้สูตรการหักเหผ่านรอยต่อโค้งเพื่อทำการหาสมการของเลนส์บางโดยพิจารณารูปต่อไปนี้



ที่ผิวแรกเราได้สมการ

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

ที่ผิวที่สอง

$$\frac{n_2}{s_2} + \frac{n_1}{s'_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

สังเกตว่าระยะภาพของการหักเหครั้งแรก s'_1 กับระยะวัตถุของการหักเหครั้งที่สอง s_2 สัมพันธ์กันโดย

$$s_2 = t - s'_1$$

ในกรณีของเลนส์บางเราจะได้

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_1}{s'_2} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะระยะวัตถุแรก $s = s_1$ และระยะภาพสุดท้าย $s' = s'_2$ เราจะได้สมการเป็น

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

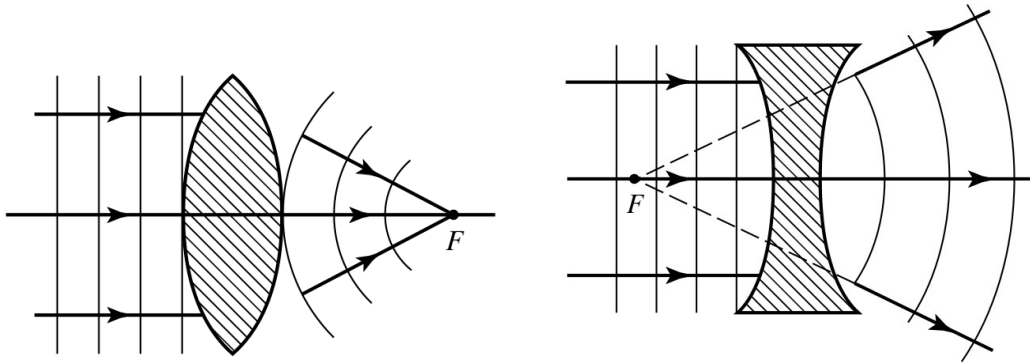
เมื่อเรานิยามให้ระยะโฟกัสคือระยะภาพเมื่อวัตถุอยู่ที่ระยะอนันต์ เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

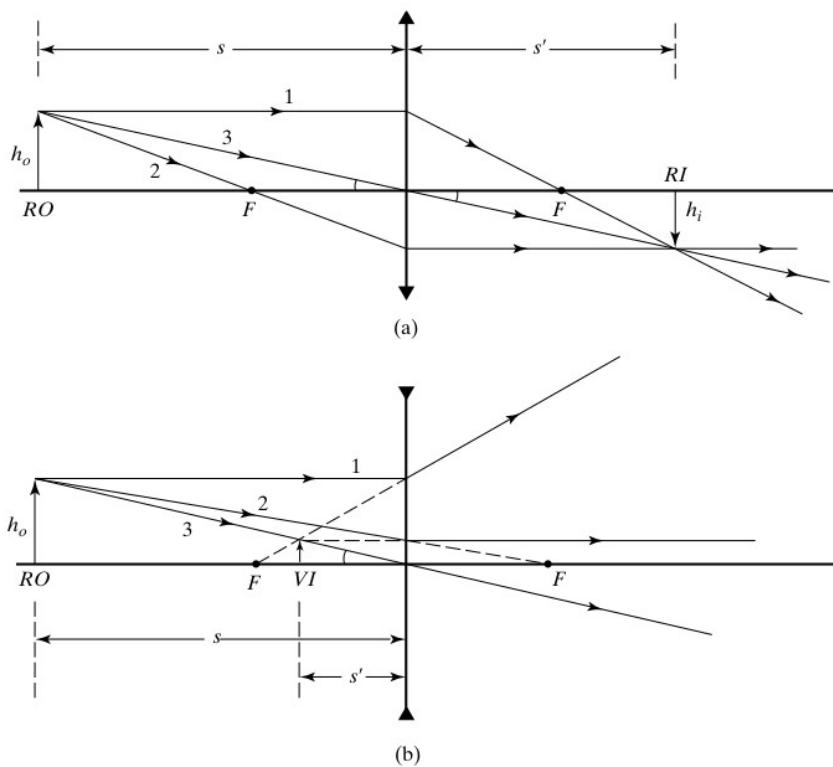
สมการนี้เรียกว่าสมการช่างทำเลนส์ และทำให้เราได้สมการเลนส์บาง

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

โดยค่าความยาวโฟกัสมีค่าเป็นบวกเมื่อ _____
 และมีค่าเป็นลบเมื่อ _____



การวาดภาพเพื่อหาดำแหน่ง/ลักษณะภาพ



กำลังขยาย

จากรูปด้านบนบนเราพบว่า

$$\frac{h_0}{s} = \frac{h_i}{s'}$$

ดังนั้นกำลังขยาย (โดยไม่คิดถึงเครื่องหมาย)

$$|m| = \left| \frac{h_i}{h_0} \right| = \left| \frac{s'}{s} \right|$$

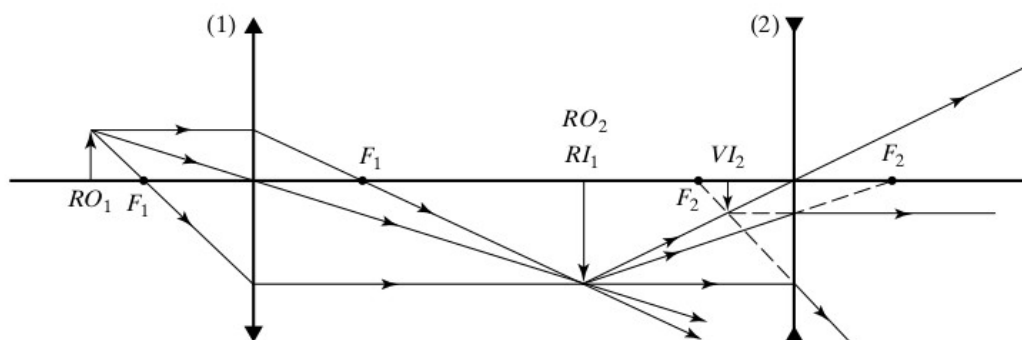
ในกรณีที่ทั้งระยะวัตถุและระยะภาพเป็นบวกเราพบว่า _____

แต่ถ้าระยะวัตถุเป็นบวกและระยะภาพเป็นลบเราพบว่า _____

ดังนั้นเราจะให้นิยามกำลังขยายเป็น

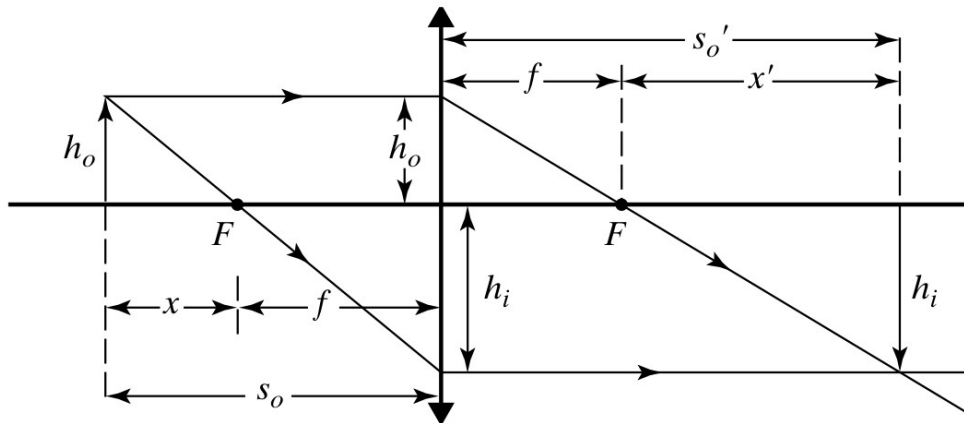
$$m = \frac{-s'}{s}$$

ตัวอย่าง จงหาตำแหน่งและลักษณะของภาพระหว่างกลางและภาพสุดท้ายของระบบของเลนส์บางสองอันดังรูปด้านล่าง โดยที่ระยะโฟกัสของเลนส์แรกคือ 15 cm และระยะโฟกัสของเลนส์ที่สองคือ -15 cm และระยะห่างระหว่างเลนส์ทั้งสองคือ 60 cm กำหนดให้วัตถุอยู่ห่างจากเลนส์แรกเป็นระยะ 25 cm



12. สมการเลนส์บางของนิวตัน

ที่ผ่านมาเรานิยามระยะวัตถุ/ระยะภาพจากการวัดตำแหน่งเทียบกับผิวเลนส์ ถ้าเราต้องการเปลี่ยนวิธีการวัดระยะวัตถุ/ระยะภาพเป็นการวัดเทียบกับจุดโฟกัสแทน เราจะได้ความสัมพันธ์ใหม่ โดยเริ่มจากการพิจารณารูปด้านล่าง



เมื่อพิจารณาสามเหลี่ยมคล้ายเราพบว่า

$$\frac{h_o}{x} = \frac{h_i}{f} \quad \text{และ} \quad \frac{h_i}{x'} = \frac{h_o}{f}$$

เมื่อจัดรูปสมการเราพบว่า

$$x x' = f^2$$

สมการนี้เรียกว่าสมการเลนส์บางของนิวตัน