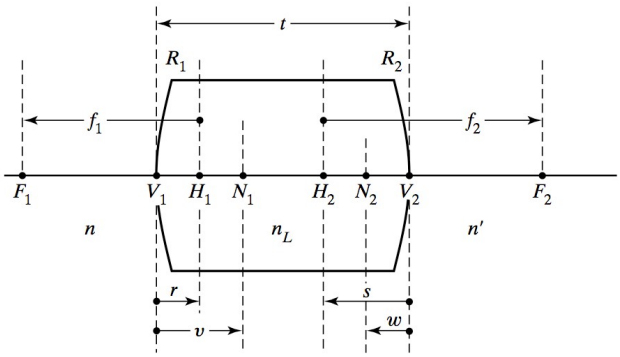
วิธีแมทริกซ์ (Matrix method)

วิธีแมทริกซ์คือการวิเคราะห์ระบบเชิงแสงโดยใช้แมทริกซ์และเวคเตอร์เป็นตัวช่วยในการพิจารณา ซึ่งสามารถใช้ได้ในกรณีทั่วไป และเป็นประโยชน์มากในกรณีที่เลนส์ที่เราพิจารณามีขนาด (เลนส์หนา)

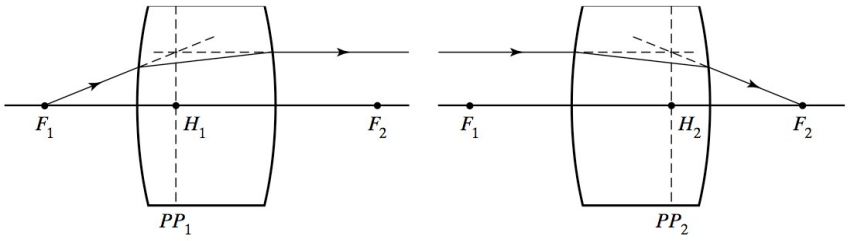
1. เลนส์หนา

มีจุดสำคัญ 6 จุด

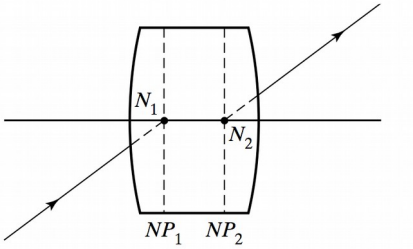
1. จุดโฟกัสที่ 1 (1st focal point) คือ _____
2. จุดโฟกัสที่ 2 (2nd focal point) คือ _____
3. จุดมุขสำคัญที่ 1 (1st principal point) คือ _____
4. จุดมุขสำคัญที่ 2 (2nd principal point) คือ _____
5. จุดโนดัลที่ 1 (1st nodal point) คือ _____
6. จุดโนดัลที่ 2 (2nd nodal point) คือ _____



โดยจุดมุขสำคัญคือจุดที่_____และระนาบมุขสำคัญ (principal planes) คือระนาบที่_____



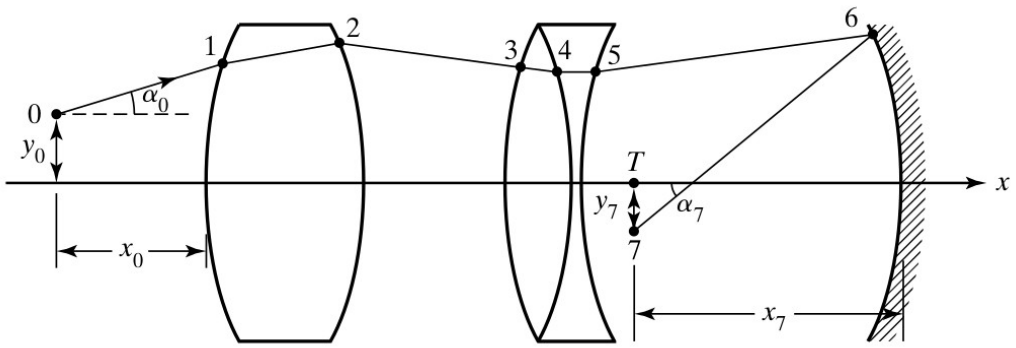
โดยจุดโนดัลคือจุดที่ _____



2. วิธีแมทริกซ์

ในกรณีที่ระบบเชิงแสงของเราประกอบไปด้วยหลายองค์ประกอบ เช่นเลนส์สี่หรือห้าชิ้นในกล้อง เราจำเป็นต้องมีระเบียบวิธีในการศึกษาระบบเหล่านั้น วิธีแมทริกซ์นี้เป็นการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของมุมและความสูงของทางเดินของแสงที่เกิดขึ้นจากการผ่านองค์ประกอบเชิงแสงต่างๆ โดยเราจะจำกัดการศึกษาอยู่ในการประมาณ paraxial เท่านั้น

เมื่อพิจารณารูปด้านล่าง เราพบว่าที่ตำแหน่งต่างๆ เช่นที่จุดเริ่มต้น 0 จุดที่เกิดการหักเห _____ และเกิดการสะท้อน 6 และจุดสุดท้าย 7 ความสูงและมุมที่ทำเทียบกับแกนเชิงทัศนศาสตร์ (optical axis) เกิดการเปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการเดินทางของแสง, การหักเห และการสะท้อน



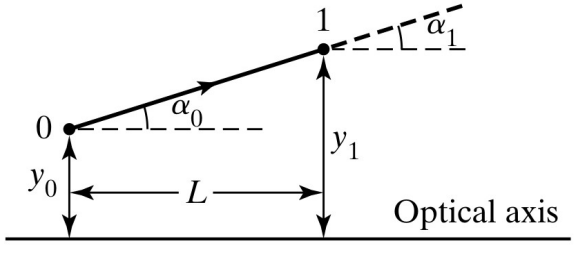
เราจะนิยามเวคเตอร์แนวหลัก (column vector) ซึ่งเป็นตัวแทนตำแหน่งของทางเดินแสงในแต่ละจุดของแกนเชิงแสง โดยเวคเตอร์นี้มีองค์ประกอบเป็นความสูง y และมุม α และเขียนได้ดังนี้

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

โดยการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์นี้เนื่องจากการเดินทางของแสง, การหักเหหรือการสะท้อน จะมีค่าเท่ากับการคูณเวคเตอร์นี้ด้วยแมทริกซ์ขนาด 2x2 ที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงนั้นๆ เพราะการทำเช่นนั้นคือการแปลงเวคเตอร์ตัวแรกไปเป็นเวคเตอร์อีกตัวหนึ่ง ด้วยหลักการนี้เราจะเริ่มต้นหาแมทริกซ์ที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงแต่ละประเภทดังต่อไปนี้

<u>แมทริกซ์ของการเลื่อนตำแหน่ง</u>

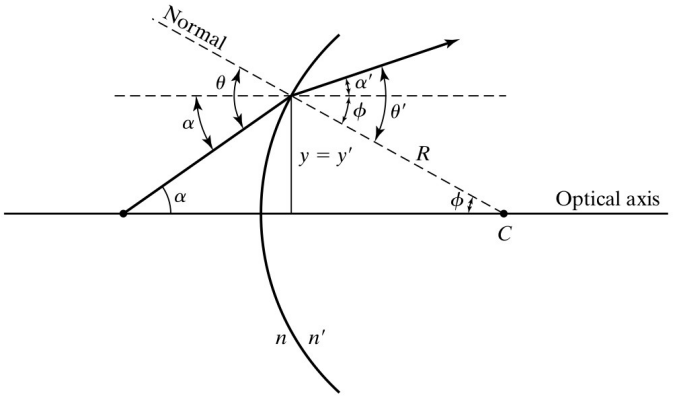
การเลื่อนตำแหน่งนั้นมีการเปลี่ยนแปลงความสูงเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้นเมื่อพิจารณาจากภาพเราจะได้ $\alpha_1 = \alpha_0$ และ $y_1 = y_0 + L\tan\alpha$ นั่นคือ



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

<u>แมทริกซ์ของการหักเห</u>

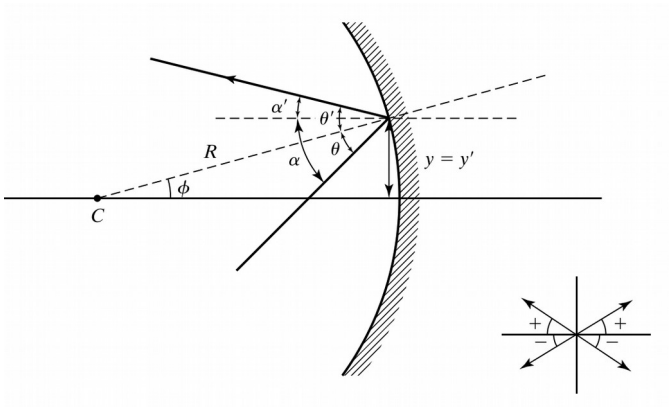
เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการหักเหเพียงอย่างเดียวเราจะเห็นว่าความสูงไม่มีการเปลี่ยนแปลง (พิจารณาว่าเป็นตำแหน่งหน้าผิวและตำแหน่งที่ด้านหลังผิวซึ่งห่างกันเล็กๆ) การเปลี่ยนแปลงของมุมจากการหักเหสามารถใช้กฎของสเนลล์เพื่อพิจารณาแมทริกซ์การหักเหได้ดังนี้



$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}\left(\frac{n}{n'} - 1\right) & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

<u>แมทริกซ์การสะท้อน</u>

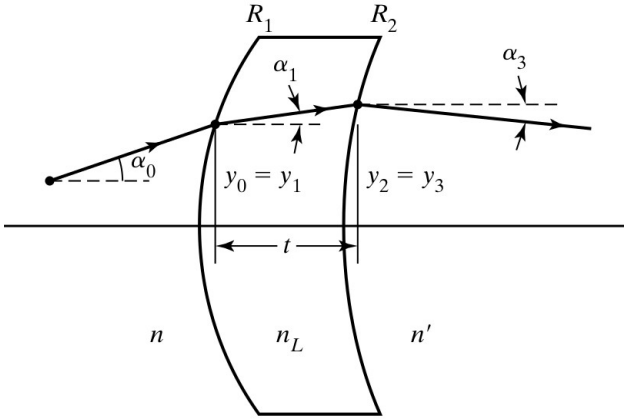
เช่นเดียวกันกับการหักเห การสะท้อนเพียงอย่างเดียวจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงความสูง เมื่อเราใช้ข้อตกลงเรื่องเครื่องหมายของมุมดังภาพ เราจะได้ว่า



$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

<u>แมทริกซ์ของเลนส์หนาและเลนส์บาง</u>

เราจะสร้างแมทริกซ์ที่เป็นตัวแทนของระบบเชิงแสงของเลนส์หนาโดยการพิจารณาเฉพาะช่วงการหักเหเข้า, การเลื่อนตำแหน่งในเนื้อเลนส์ และการหักเหออก เมื่อพิจารณาตามภาพ



สำหรับการหักเหครั้งแรกเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} =$$

สำหรับการเลื่อนตำแหน่งเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} =$$

สำหรับการหักเหครั้งที่สองเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} =$$

เมื่อรวมความสัมพันธ์เหล่านี้เข้าด้วยกันเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้นเลนส์หนาจึงมีแมทริกซ์รวมเป็น $M = M_3 M_2 M_1$ สังเกตว่าการคูณแมทริกซ์นั้นไม่มีสมบัติการสลับที่ เพราะฉะนั้นเพื่อพิจารณาระบบเชิงแสงเราจะต้องเขียนแมทริกซ์รวมในรูปของผลคูณของแมทริกซ์ประกอบโดยเขียนไล่ย้อนทางเดินแสงเสมอ

เมื่อใช้แมทริกซ์การหักเหและแมทริกซ์เลื่อนตำแหน่งเราจะเขียนแมทริกซ์ของเลนส์หนาจากรูปข้างต้นได้เป็น

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n'}{n' R_2} & \frac{n_L}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_L R_1} & \frac{n}{n_L} \end{pmatrix}$$

ในกรณีของเลนส์บางคือ t = 0 เราสามารถลดรูปแมทริกซ์ได้ดังนี้

และเมื่อใช้สมการช่างทำเลนส์เราจะได้ว่า

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง จงใช้แมทริกซ์ของเลนส์บางเพื่อพิสูจน์สมการเลนส์บาง

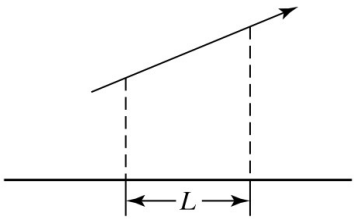
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

ตัวอย่าง จงหาแมทริกซ์ระบบของเลนส์หนาที่มีค่า R1 = 45 cm, R2 = 30 cm, t = 5 cm, nL = 1.60 และ n = n’ = 1

ตารางสรุปของแมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงเป็นดังนี้

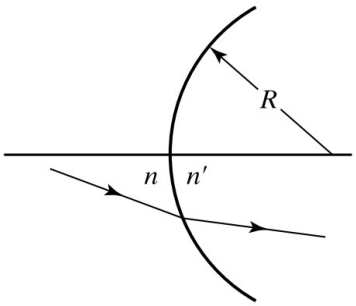
Translation matrix:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{T}$$



Refraction matrix, spherical interface:

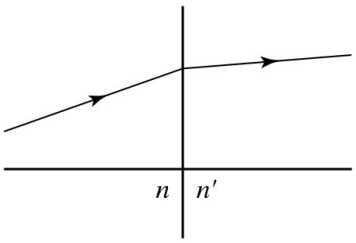
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-n'}{Rn'} & \dfrac{n}{n'} \end{bmatrix} = \Re$$



$(+R)$: convex
$(-R)$: concave

Refraction matrix, plane interface:

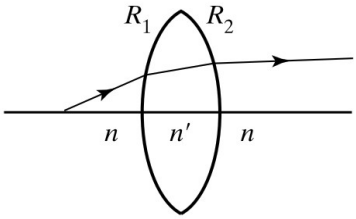
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{n'} \end{bmatrix}$$



Thin-lens matrix:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

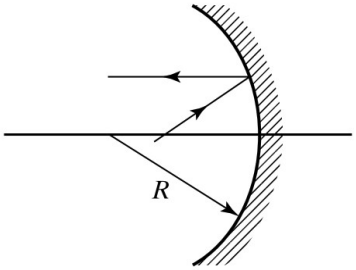
$$\frac{1}{f} = \frac{n'-n}{n}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



$(+f)$: convex
$(-f)$: concave

Spherical mirror matrix:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$



$(+R)$: convex
$(-R)$: concave

3. เมทริกซ์ระบบ

เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์ของระบบเชิงแสงมีรูปแบบโดยทั่วไปดังนี้

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ซึ่งเกิดจากการคูณเมทริกซ์อย่างต่อเนื่องของเมทริกซ์การหักเห แมทริกซ์การเลื่อนและแมทริกซ์การสะท้อน (เขียนโดยพิจารณาย้อนทางเดินแสง)

$$M=M_1M_2\ldots M_n$$

โดยสมบัติที่สำคัญของการเมทริกซ์นี้คือเมื่อพิจารณา det ของแมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงทุกชนิดเราพบว่า_____

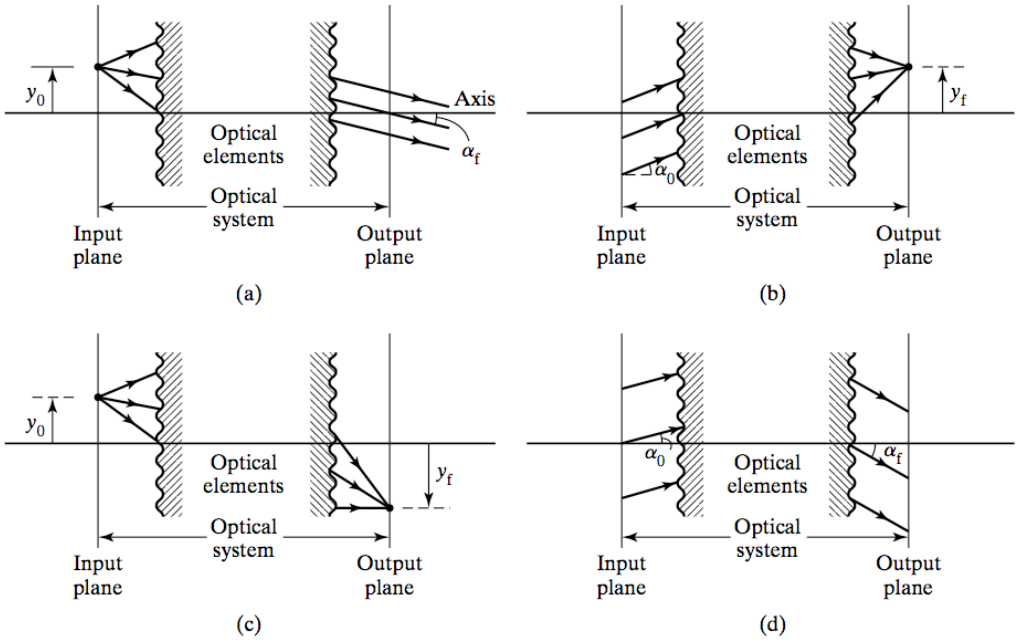
จากสมบัติของ det ของผลคูณแมทริกซ์เราจะได้ว่า

นั่นคือ

$$det\ (M)=\frac{n_0}{n_f}$$

เมื่อ n_0 คือดัชนีหักเหของตัวกลางหน้าระบบ และ n_f คือดัชนีหักเหของตัวกลางหลังระบบ

ในแมทริกซ์ระบบเราสามารถหาความหมายของค่า A, B, C, D ได้จากกรณีดังภาพด้านล่าง



โดยกรณี a) วัตถุถูกวางไว้ที่ตำแหน่งโฟกัสของระบบเชิงแสงดังภาพ
เราเห็นว่าในขาเข้าค่า_____มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า_____มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
ค่า_____ไม่ขึ้นกับมุมขาเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

และเราจะได้ความสัมพันธ์

โดยในกรณี b) วัตถุถูกวางไว้ที่ระยะอนันต์ทำให้ภาพเกิดที่ระยะโฟกัสดังภาพ
เราเห็นว่าในขาเข้าค่า_____มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า_____มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
ค่า_____ไม่ขึ้นกับตำแหน่งขาเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y_f \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

และเราจะได้ความสัมพันธ์

โดยในกรณี c) วัตถุถูกวางไว้ที่ระยะวัตถุทำให้ภาพเกิดที่ระยะภาพโดย
เราเห็นว่าในขาเข้าค่า_____มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า_____มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
ค่า_____ไม่ขึ้นกับมุมขาเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y_f \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

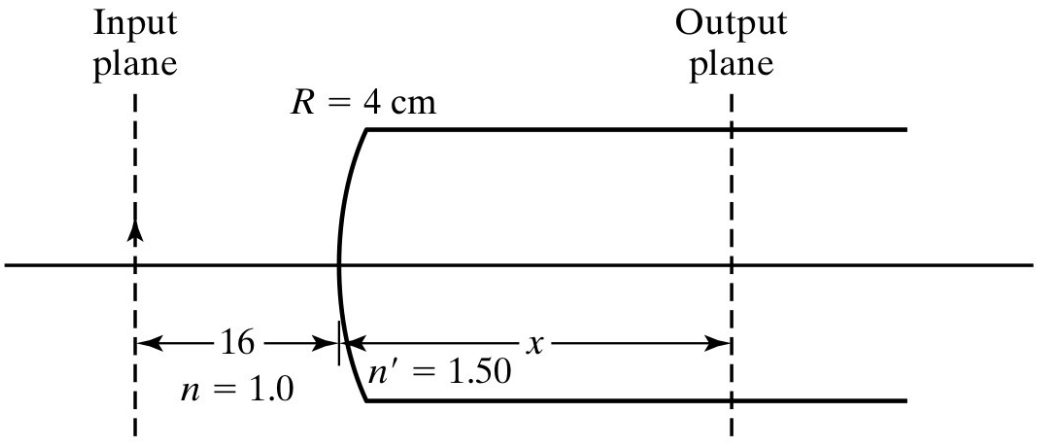
และเราจะได้ความสัมพันธ์ซึ่งตีความได้ว่ากำลังขยายมีค่าเท่ากับ

โดยในกรณี d) วัตถุถูกวางไว้ที่ระยะอนันต์และทำให้ภาพเกิดที่ระยะอนันต์เช่นเดียวกัน
เราเห็นว่าในขาเข้าค่า_____มีค่าคงที่ ส่วนขาออกค่า_____มีค่าคงที่ นั่นแปลว่า
ค่า_____ไม่ขึ้นกับมุมตำแหน่งเข้า นั่นคือค่า _____ ต้องมีค่าเท่ากับ 0 เพราะ

$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

และเราจะได้ความสัมพันธ์ซึ่งตีความได้ว่ากำลังขยายเชิงมุมมีค่าเท่ากับ

ตัวอย่าง เมื่อวางวัตถุชิ้นเล็กๆทางด้านซ้ายเป็นระยะ 16 cm จากแท่งพลาสติกใสที่มีปลายโค้งรัศมี 4 cm แสดงดังภาพด้านล่าง ถ้ากำหนดให้ดัชนีหักเหของพลาสติกนี้มีค่าเท่ากับ 1.50 และวัตถุชิ้นนี้อยู่ในอากาศ จงใช้วิธีแมทริกซ์หาระยะภาพและกำลังขยายที่เกิดขึ้นจากการหักเหผ่านผิวรอยต่อนี้

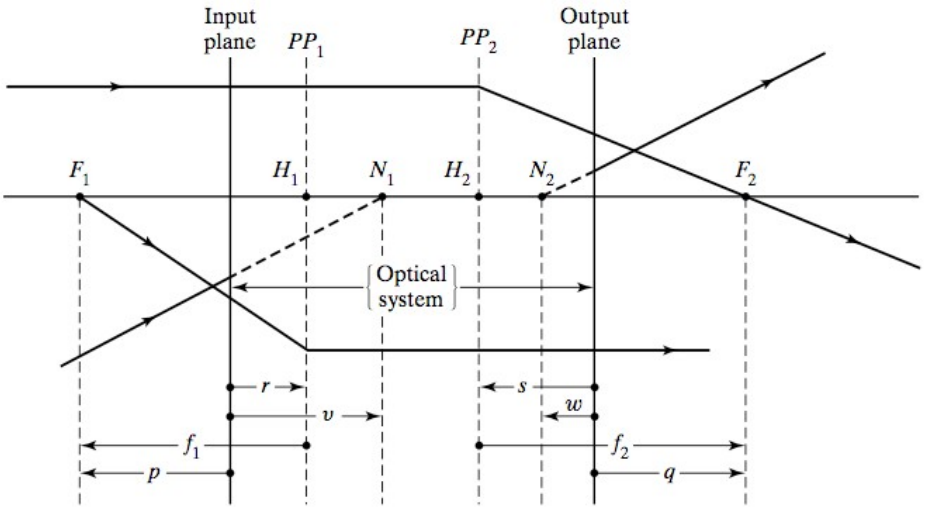


4. การหาตำแหน่งของจุดหลักในเลนส์หนา

ด้วยการใช้วิธีแมทริกซ์เราสามารถหาตำแหน่งของจุดหลักในเลนส์หนาทั้งหมดได้ เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์ของเลนส์หนามีรูปแบบดังนี้

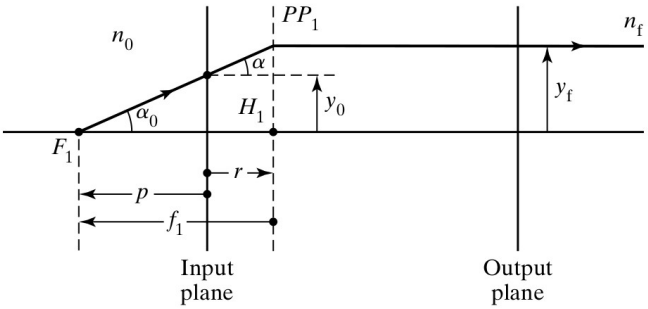
$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

เรานิยามระยะของตำแหน่งต่างๆดังภาพ



ตำแหน่งโฟกัส

พิจารณาวัตถุที่ตำแหน่ง F1 ดังภาพ



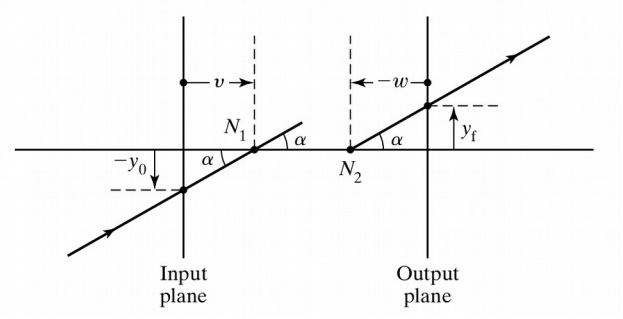
เมื่อพิจารณาแมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงเราจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

ทำให้เราหาระยะสำคัญได้ว่า

$$p = \frac{D}{C}, \quad f_1 = \frac{AD}{C} - B = \left(\frac{n_0}{n_f}\right)\frac{1}{C}$$

ตำแหน่งโนดัลหาได้จากภาพด้านล่าง



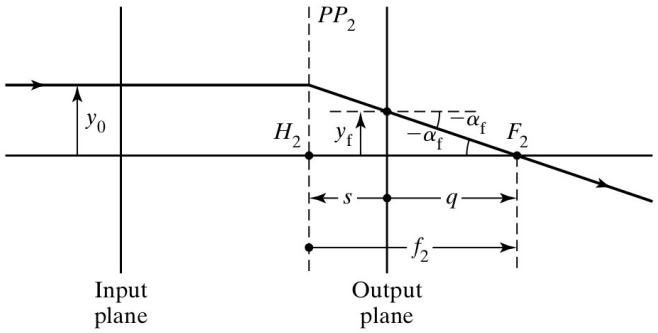
เมื่อพิจารณาแมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงจะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} y_f \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ทำให้เราหาระยะสำคัญได้

$$v = \frac{D-1}{C}, \quad w = \frac{(n_0/n_f) - A}{C}$$

ตำแหน่งโฟกัส F2 หาได้ในทำนองเดียวกันโดยพิจารณาภาพด้านล่าง



ซึ่งระยะที่สำคัญต่างๆถูกสรุปไว้ในตารางดังนี้

$p = \frac{D}{C}$	F_1	Located relative to input (1) and output (2) reference planes
$q = -\frac{A}{C}$	F_2	
$r = \frac{D - n_0/n_f}{C}$	H_1	
$s = \frac{1 - A}{C}$	H_2	
$v = \frac{D - 1}{C}$	N_1	
$w = \frac{n_0/n_f - A}{C}$	N_2	
$f_1 = p - r = \frac{n_o/n_f}{C}$	F_1	Located relative to principal planes
$f_s = q - s = -\frac{1}{C}$	F_2	