

ทบทวนคลื่น

1. สมการคลื่น

คลื่นคือการส่งผ่านพลังงาน โดยมีสมการคลื่นเขียนได้ดังรูป

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

คำตอบของสมการคลื่นเรียกว่าฟังก์ชันคลื่น โดยเรามักสนใจเฉพาะคลื่นซึ่งมีลักษณะการเคลื่อนที่ของตัวกลางที่เป็นคาบและมีฟังก์ชันคลื่นโดยทั่วไปดังนี้

- $f(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$ หรือ $A \cos(kx \pm \omega t)$

- $f(x, t) = A \sin(k(x \pm vt))$ หรือ _____

- $f(x, t) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)\right)$ หรือ _____

ซึ่งมีคลื่นนี้มีความเร็ว

$$\frac{dx}{dt} = \mp v = \dot{x}$$

ซึ่งปริมาณที่อยู่ด้านในฟังก์ชันไซน์และโคส เราเรียกว่า เฟส
ในกรณีทั่วไปเราสามารถบอกเฟสตั้งต้นของคลื่นด้วยเป็น

$$f(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi_0)$$

ตัวอย่าง คลื่นเชือกเส้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยฟังก์ชันคลื่น

$$y(x, t) = 0.35 \sin(3\pi x - 10\pi t + \pi/4)$$

โดยที่ x และ t มีหน่วยเป็นเมตรและวินาทีตามลำดับ จงหาความเร็วของคลื่นนี้ เฟสตั้งต้น และความสูง ของเชือกที่ตำแหน่ง $x = 10 \text{ m}$ และ $t = 0$

2. การบรรยายคลื่นด้วยจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนถูกเขียนในรูปส่วนจริงและส่วนจินตภาพดังสมการ

$$z = a + ib$$

โดยที่

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

ถ้าให้ $a = |z| \cos \theta$ และ $b = |z| \sin \theta$

เราสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปของขนาดและเฟสได้

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวเราสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นในรูปจำนวนเชิงซ้อนได้ว่า

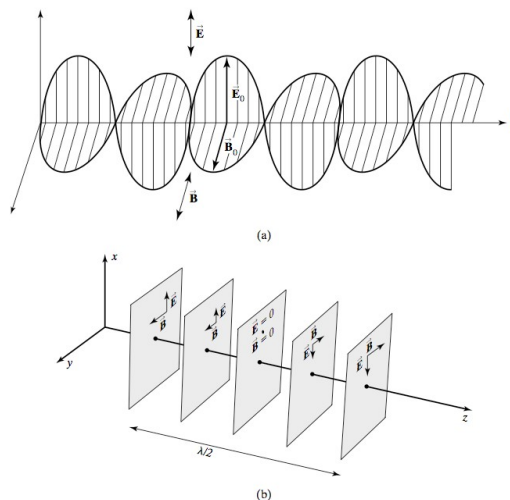
$$\tilde{f} = A e^{i(kx - \omega t)}$$

โดยที่หากต้องการปริมาณที่เป็นจำนวนจริง เราเพียงแค່หาส่วนจริงหรือส่วนจินตภาพจากฟังก์ชันคลื่นเชิงซ้อน

$$f = \Re(\tilde{f}) = A \cos(kx - \omega t) \text{ หรือ } f = \Im(\tilde{f}) = A \sin(kx - \omega t)$$

3. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

แสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งมีที่มาจากสมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equations) สำหรับคลื่น แม่เหล็กไฟฟ้าที่มีทิศทางการเคลื่อนที่แสดงด้วยเวกเตอร์ $\vec{k}$ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะตั้งฉาก ซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่นดังภาพ



โดยฟังก์ชันคลื่นของไฟฟ้าและแม่เหล็กสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned}$$

4. ผลรวมของคลื่น

4.1. หลักการซ้อนทับ (superposition principle)

หลักการซ้อนทับกล่าวว่า ถ้ามีคลื่นสองขบวนที่ผ่านจุดเดียวกันในเวลาเดียวกันคลื่นลัพธ์ที่เกิดจาก ผลรวมของคลื่นทั้งสองขบวน ตัวอย่างเช่นถ้าให้ ψ_1 และ ψ_2 เป็นฟังก์ชันคลื่น คลื่นลัพธ์มีค่าเท่ากับ

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

เช่นเดียวกันกับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

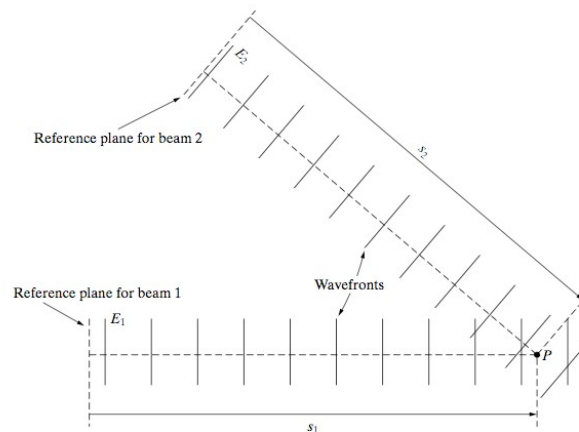
4.2. การซ้อนทับของคลื่นที่มีความถี่เดียวกัน

เมื่อพิจารณาการรวมกันของคลื่นที่มีความถี่เดียวกันที่ตำแหน่ง P ห่างจากตำแหน่งอ้างอิง s_1 และ s_2 สำหรับคลื่นที่หนึ่งและคลื่นที่สองตามลำดับ

$$E_1 = E_{01} \cos(k s_1 - \omega t + \phi_1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(k s_2 - \omega t + \phi_2)$$

โดยเราจะกำหนดให้ทิศทางของสนามไฟฟ้ามีทิศทางเดียวกัน (มีโพลาไรเซชันแนวเดียวกัน)



ให้ $\alpha_1 = k s_1 + \phi_1$, $\alpha_2 = k s_2 + \phi_2$ เราจะได้ว่า

$$E_t = E_{01} \cos(\alpha_1 - \omega t) + E_{02} \cos(\alpha_2 - \omega t)$$

ซึ่งจะเกิดการแทรกสอดแบบเสริมกันก็ต่อเมื่อ

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n$$

และหักล้างกันก็ต่อเมื่อ

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (2n + 1)\pi$$

และในกรณีทั่วไป เราสามารถใช้เลขจำนวนเชิงซ้อนในการหาค่าคลื่นลัพธ์ได้

$$E_t = \Re \left(E_{01} e^{i(\alpha_1 - \omega t)} + E_{02} e^{i(\alpha_2 - \omega t)} \right) = \Re \left(e^{-i\omega t} (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2}) \right)$$

เมื่อนิยามให้

$$E_0 e^{i\alpha} = E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2}$$

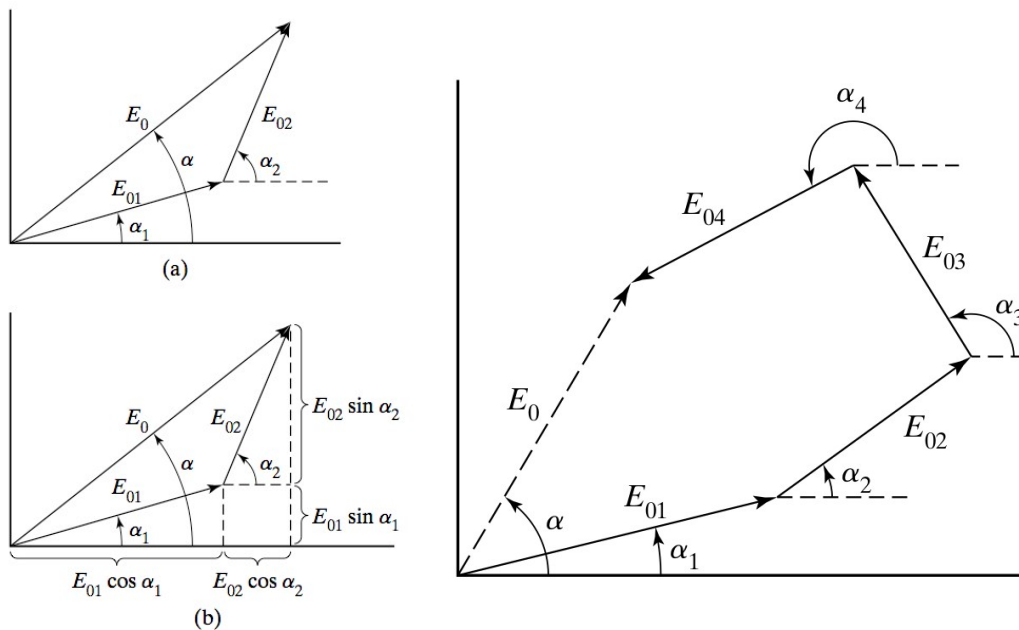
เราจะได้คลื่นลัพธ์

$$E_t = \Re \left(E_0 e^{i(\alpha - \omega t)} \right) = E_0 \cos(\alpha - \omega t)$$

โดยค่าของ E_0 และ α หาได้จากการบวกกันของเวกเตอร์ในระนาบจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือหาได้จาก

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan \alpha = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2}$$



ในกรณีทั่วไปเราหาการบวกกันของเวกเตอร์หลายตัวในระนาบจำนวนเชิงซ้อนได้โดย

$$E_0^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i \right)^2$$

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i}$$

5. คลื่นนิ่ง

ในกรณีที่มีคลื่นซึ่งวิ่งสวนทางกันในตัวกลางเดียว คลื่นจะเกิดการแทรกสอดกันเป็นคลื่นนิ่ง

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t + kx)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t - kx - \varphi_2)$$

เมื่อใช้หลักการซ้อนทับกันของคลื่นและเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

เราจะหาคลื่นรวมได้เป็น

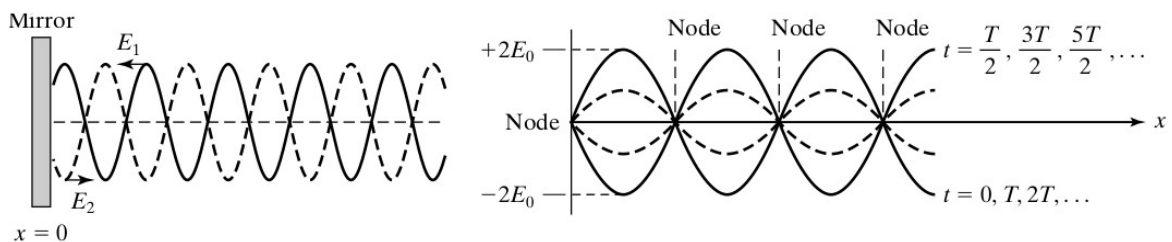
เมื่อให้เฟสตั้งต้นของคลื่นที่สองเกิดจากการสะท้อนกลับเราจะได้ว่า $\varphi_2 = \pi$ และคลื่นนิ่งมีฟังก์ชันเป็น

$$E_t = 2 E_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

ซึ่งมีตำแหน่งบัพ (nodes) อยู่ที่ _____

และมีตำแหน่งปฏิบัพ (antinodes) อยู่ที่ _____

สังเกตว่าตำแหน่งบัพที่อยู่ติดกันจะห่างกัน _____ เสมอ



6. การเกิดบีตส์

เมื่อมีคลื่นสองขบวนที่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อยและเคลื่อนที่ไปในทางเดียวกัน จะเกิดปรากฏการณ์บีตส์ขึ้น

$$E_1 = E_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$E_2 = E_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

ถ้าให้

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad k_p = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\omega_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad k_g = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

เราจะได้ว่า

$$E_t = 2 E_0 \cos(k_p x - \omega_p t) \cos(k_g x - \omega_g t)$$

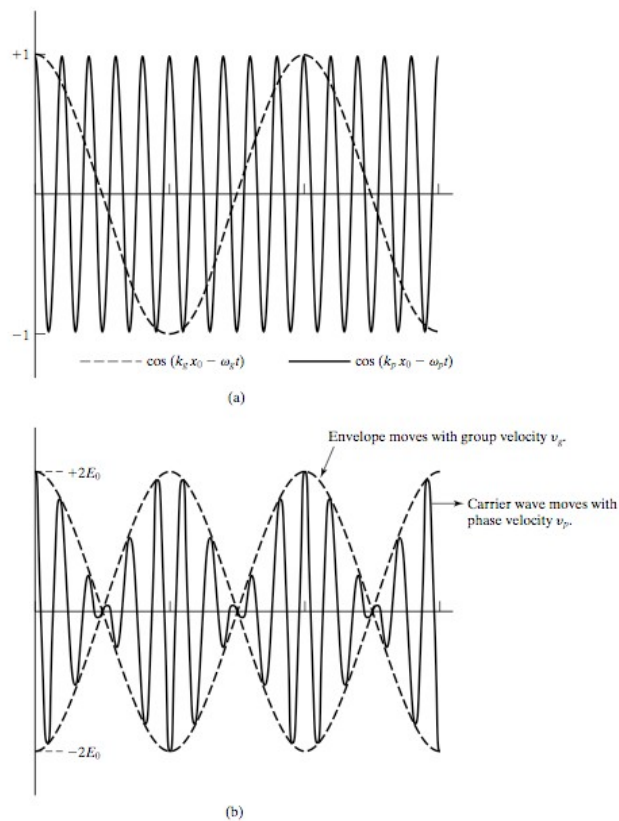
ในกรณีที่ความถี่ใกล้เคียงกันมาก เราจะได้ว่า

$$\omega_p \gg \omega_g$$

ทำให้การเปลี่ยนแปลงของส่วนที่มี ω_g เป็นความถี่จะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยจนสามารถคิดได้ว่าแอมพลิจูด ที่ตำแหน่งใดๆ เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ และมีค่าเท่ากับ

$$A = 2 E_0 \cos(k_p x - \omega_p t)$$

และมีคลื่นลัพท์ดังภาพ



และมีความถี่บีตส์เป็น

$$\omega_b = 2\omega_g = \omega_1 - \omega_2$$

7. ค่าเฉลี่ยตามเวลาของฟังก์ชัน

คลื่นแสงที่ตามองเห็นมีความถี่ที่สูงมากทำให้ความเข้มที่ปรากฏต่อเรานั้นขึ้นกับค่าเฉลี่ยต่อเวลาของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเรานิยามค่าเฉลี่ยต่อเวลาของฟังก์ชันที่มีคาบ T ว่า

$$\langle f(t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

ทำให้เราได้ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

$$\langle \sin(\omega t) \rangle = 0$$

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = 0$$

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0$$