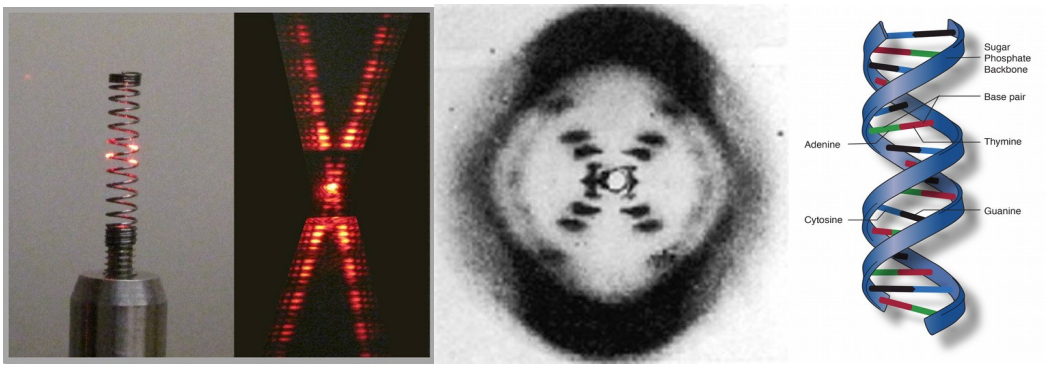
การเลี้ยวเบนของแสง



1. ธรรมชาติการเลี้ยวเบนของแสง

อีกผลที่สำคัญของความเป็นคลื่นของแสงคือการเลี้ยวเบนของแสง การแทรกสอดของแสงจากสลิตคู่ ที่เราศึกษาไปในบทที่แล้วคือการที่แสงถูกกั้นทุกที่ยกเว้นรูสองรู ซึ่งเราพิจารณารูทั้งสองนี้ให้มีความแคบมากๆ และทำตัวเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่ แต่ในความเป็นจริงนั้นขนาดของรูสลิตมีผลต่อการพฤติกรรมของแสงด้วย โดยเราสังเกตเห็นได้จากการทดลองว่ารายละเอียดของริ้วรอยการแทรกสอดเปลี่ยนไปเมื่อขนาดของรูสลิตเปลี่ยนไป

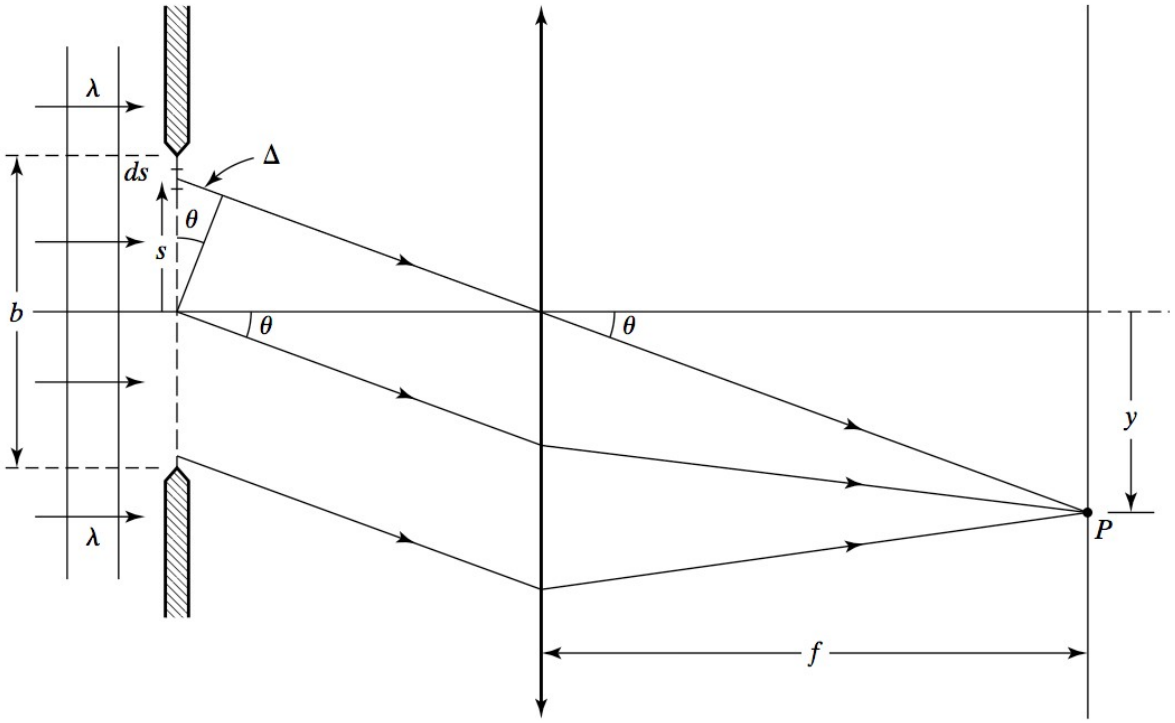
เพื่อที่จะอธิบายผลการทดลองนี้ เราใช้หลักการฮอยเก้นส์-เฟนเนล (Huygens-Fresnel principle) ตามหลักการของฮอยเก้นส์ทุกจุดบนหน้าคลื่นสามารถคิดได้ว่าเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นทรงกลมใหม่ โดยเฟนเนลเพิ่มเติมว่าคลื่นที่เกิดขึ้นหลังจากนั้นเกิดจากการซ้อนทับกันของแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่เหล่านี้ซึ่งอาจจะมี แอมพลิจูดและเฟสที่แตกต่างกัน ดังนั้นเพื่อที่จะคำนวณริ้วรอยของการเลี้ยวเบนที่จุดใดๆบนฉากจึงต้อง พิจารณาทุกจุดบนหน้าคลื่นที่ออกมาจากช่องเปิดเป็นแหล่งกำเนิดคลื่น ซึ่งการซ้อนทับกันของคลื่นทั้งหมดนี้ จะเกิดเป็นผลลัพธ์บนฉาก

เรามักจะแยกการเลี้ยวเบนออกจากการแทรกสอดได้โดยการดูว่าแหล่งกำเนิดคลื่นมีความต่อเนื่องหรือไม่ ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นมีลักษณะไม่ต่อเนื่องการรวมคลื่นข้างต้นจะถูกเรียกว่า_____
ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นมีลักษณะต่อเนื่องการรวมคลื่นข้างต้นจะถูกเรียกว่า_____

การเลี้ยวเบนสามารถจำแนกต่อได้เป็นสองแบบ โดยเมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ห่างจากช่องเปิดมากพอจนสามารถคิดได้ว่าหน้าคลื่นที่มาถึงที่ช่องเปิดเป็นระนาบตรง เราเรียกการเลี้ยวเบนแบบนี้ว่า_____
หรือ_____ โดยการเลี้ยวเบนแบบนี้มักทำให้การคำนวณง่ายขึ้นโดยการประมาณบางอย่าง ซึ่งเราจะแสดงให้เห็นในลำดับถัดไป ในขณะที่ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ใกล้ช่องเปิดจนหน้าคลื่นที่ช่องเปิด มีความโค้ง เราเรียกการเลี้ยวเบนแบบนี้ว่า_____หรือ_____

2. การเลี้ยวเบนผ่านสลิตเดี่ยว

เราเริ่มคำนวณการเลี้ยวเบนผ่านสลิตเดี่ยวแบบเฟรานโฮเฟอร์ ในทางปฏิบัติเพื่อที่จะได้หน้าคลื่นเส้นตรงเราอาจจะวางแหล่งกำเนิดคลื่น_____
ในขณะที่เราต้องการให้ฉากอยู่ไกลมากๆ (แสงขนานที่ไปแทรกสอดกัน) เราทำได้โดย_____



สังเกตว่าแสงแต่ละเส้นที่เดินทางไปเจอกันที่จุด P มีเฟสไม่ตรงกัน ตัวอย่างเช่นแสงที่ตำแหน่งกลางสลิตกับแสงที่ระยะ s วัดจากตรงกลางมีเฟสไม่ตรงกันเนื่องจาก_____

- เราจะแบ่งช่องเปิดเป็นช่วงเล็กๆขนาด_____ เป็นแหล่งกำเนิดแบบจุด
- จากนั้นเราจะรวมคลื่น จากแหล่งกำเนิดเหล่านี้โดยการรวมกันซึ่งคือการ_____ทั่วทั้งช่องเปิด
- ในแต่ละช่วงเปิดเล็กๆจะสร้างคลื่นไปถึงจุด P โดยมีขนาดแปรผันตรงกับ_____ และแปรผกผันกับ_____ (เราอาจสังเกตได้ว่าความเข้มแปรผกผันกับ_____)
- ดังนั้นเราสามารถเขียนคลื่นของสนามไฟฟ้าที่จุด P เนื่องจากช่องเปิดเล็กๆใดๆได้ว่า

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r}\right) e^{i(kr-\omega t)}$$

กำหนดให้ $r = r_0$ เป็นระยะทางจากจุดกึ่งกลางสลิตไปยังจุด P ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่จุด P ซึ่งออกจาก จุดใดๆซึ่งอยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางเป็นระยะ s จะมีค่าเท่ากับ

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r_0+\Delta}\right) e^{i(kr_0-\omega t)} e^{ik\Delta}$$

เราจะประมาณว่าค่า Δ ในแอมพลิจูดไม่เปลี่ยนมากเมื่อเทียบกับ r_0 อย่างไรก็ดี เราไม่สามารถใช้การประมาณนี้ในส่วนของเฟสได้ เพราะการเปลี่ยนไปหนึ่งความยาวคลื่น $\Delta = \lambda$ ทำให้เฟสหมุนไป_____

จากภาพเราจะได้ว่า

$$\Delta = s\sin\theta$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่จุด P จากส่วนย่อย ds ใดๆ จะมีค่าเท่ากับ

$$d\,E_p = \left(\frac{E_L\,ds}{r_0}\right) e^{i(k r_0 - \omega t)} e^{iks\sin\theta}$$

เมื่อทำการอินทิเกรตตลอดช่วงความกว้างสลิต นั่นคือจาก_____

$$E_p = \frac{E_L b\sin\beta}{r_0\beta} e^{i(k r_0 - \omega t)}$$

โดยที่

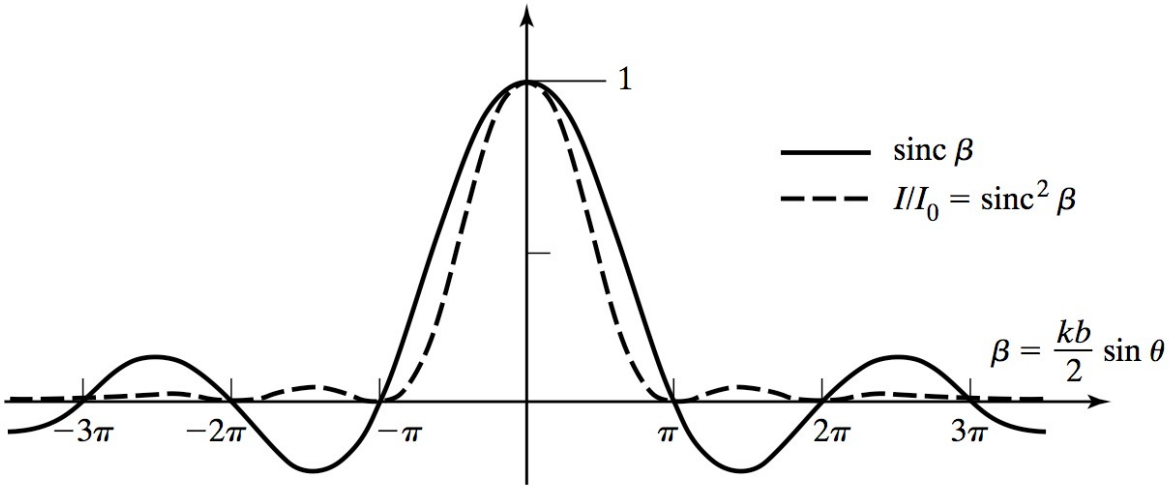
$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta$$

ค่าความเข้มจึงมีค่าเท่ากับ

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\,E_0^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\left(\frac{E_L b}{r_0}\right)^2 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$

หรือ

$$I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$



ตำแหน่งที่ _____ มีค่า

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{sin\beta}{\beta} = 1$$

ดังนั้นยกเว้นที่ m = 0 เราจะมีเงื่อนไขการเกิดแถบมืดเป็น_____
นั่นคือ

$$\beta = \frac{1}{2} kbsin\theta = m\pi$$

หรือว่า

$$m\lambda = bsin\theta$$

เมื่อประมาณให้มุมมีค่าน้อยๆเราจะได้_____
ทำให้เงื่อนไขของแถบมืดเป็น

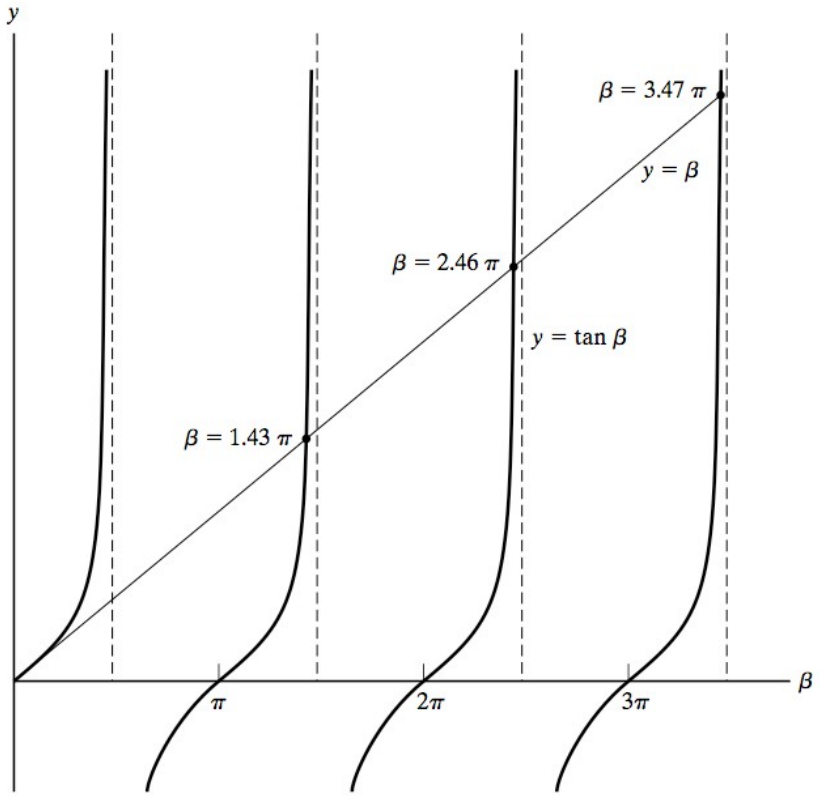
$$y = \frac{m\lambda f}{b}$$

ในการหาแถบสว่างนั้น สังเกตได้ว่าตำแหน่งสว่างสุดไม่อยู่ตรงกลางพอดีระหว่างจุดมืดสองจุดเพราะ_____
โดยเราสามารถหาค่าสูงสุดได้โดยการ_____

จะได้ว่า

$$\beta = tan\beta$$

ซึ่งหาคำตอบได้จากการทำ numerical analysis หรือพิจารณาง่ายๆได้จากกราฟด้านล่าง



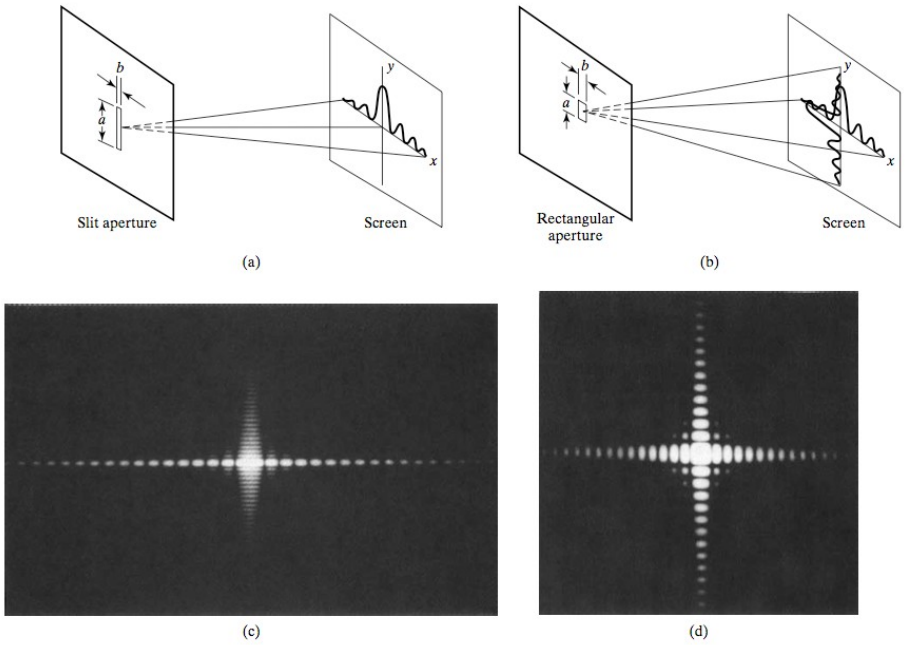
<u>ตัวอย่าง</u> จงหาอัตราส่วนของความเข้มแสงระหว่างแถบสว่างตรงกลางและแถบสว่างอันดับแรก

สังเกตว่าขนาดของแถบสว่างตรงกลางคือภาพที่เกิดจากสลิตเดี่ยว ส่วนแถบมืดสว่างข้างๆนั้นเกิดจากผลของการเลี้ยวเบน โดยมุมความกว้างของแถบสว่างสามารถคำนวณได้จากมุมระหว่างแถบมืดอันดับหนึ่งทั้งสองข้าง

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b}$$

เมื่อสลิตแคบลง แถบสว่างตรงกลางจะ_____

3. การเลี้ยวเบนผ่านช่องเปิดสี่เหลี่ยมและช่องเปิดวงกลม



ความเข้มรวมคือผลคูณของการเลี้ยวเบนในแต่ละแกน

$$I = I_0\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right)$$

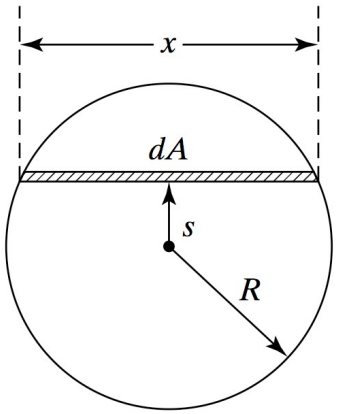
โดยที่

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta_x, \alpha = \frac{1}{2}ka\sin\theta_y$$

และมีเงื่อนไขการเลี้ยวเบนเป็น

$$y = \frac{m\lambda f}{b}, x = \frac{n\lambda f}{a}$$

ในการเลี้ยวเบนผ่านช่องเปิดกลม เราจะทำการอินทิเกรตแถบซึ่งมีพื้นที่ dA ดังภาพ



เพื่อที่จะทำการอินทิเกรตเราจะใช้

$$dE_p = \left(\frac{E_L\, ds}{r_0}\right) e^{i(kr_0-\omega t)} e^{iks\sin\theta} \Rightarrow dE_p = \left(\frac{E_A\, dA}{r_0}\right) e^{i(kr_0-\omega t)} e^{iks\sin\theta}$$

$$E_p = \frac{E_A}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \iint e^{iks\sin\theta}\, dA$$

จากรูปเราจะได้ว่า

$$dA = 2\sqrt{R^2-s^2}\, ds$$

กำหนดให้ $v = s/R$ และ $\gamma = kR\sin\theta$ ทำให้เราได้

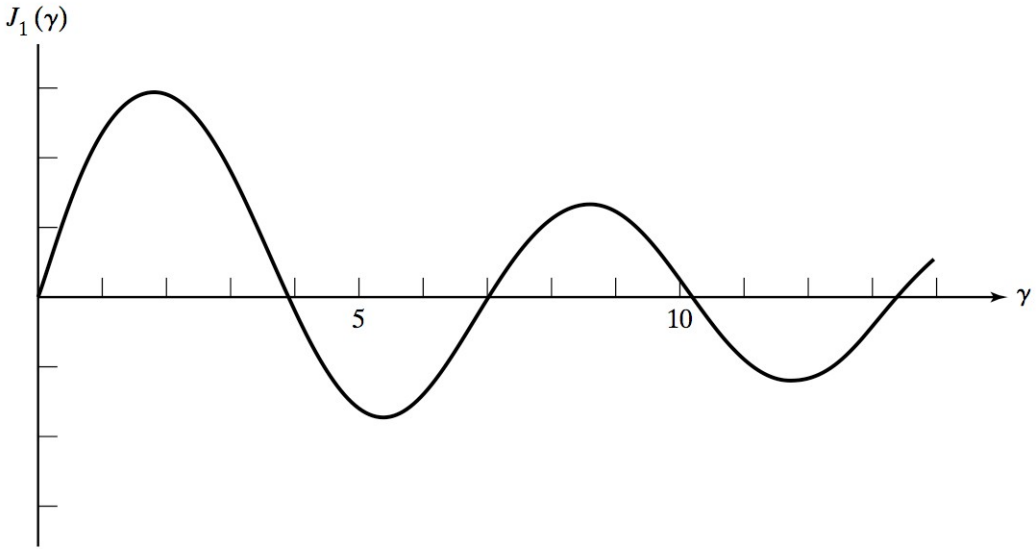
$$E_p = \frac{2E_A R^2}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \int_{-1}^{1} e^{i\gamma v}\sqrt{1-v^2}\, dv$$

ซึ่งอินทิกรัลนี้เราจะได้

$$\int_{-1}^{1} e^{i\gamma v}\sqrt{1-v^2}\, dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma}$$

โดย $J_1(\gamma)$ เป็นเบสเซลฟังก์ชั่นชนิดที่หนึ่งอันดับที่หนึ่ง (first-order Bessel function of the first kind) ซึ่งเขียนเป็นอนุกรมอนันต์ได้

$$J_1(\gamma)=\frac{\gamma}{2}-\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3}{1^2\cdot 2}+\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^5}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}-\cdots$$



สังเกตว่ามีลักษณะคล้ายกับฟังก์ชั่น_____
และมีลิมิตที่

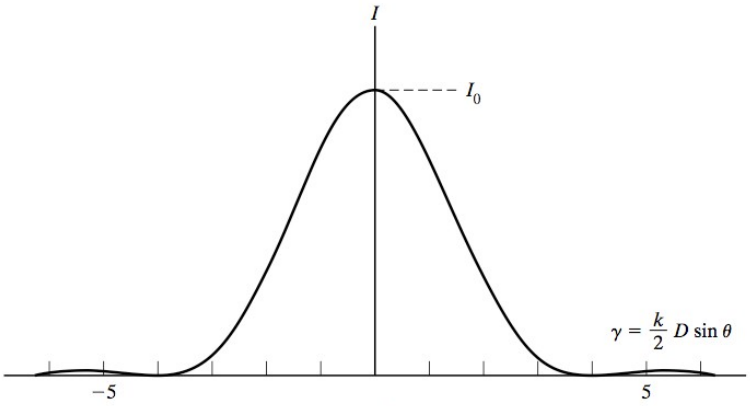
$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{J_1(\gamma)}{\gamma}=\frac{1}{2}$$

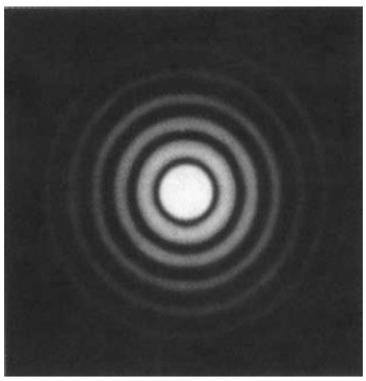
ดังนั้นเราจึงได้ค่าความเข้มเท่ากับ

$$I=I_0\left(\frac{2J_1(\gamma)}{\gamma}\right)^2$$

โดยที่

$$\gamma=\frac{1}{2}kD\sin\theta$$





ทั้งนี้การดูค่าต่ำสุดสูงสุด (แถบมืดแถบสว่าง) ต้องดูจากฟังก์ชั่นเบสเซลซึ่งสามารถอ่านได้ดังตาราง

	γ	$I/I_0 = (2J_1(\gamma)/\gamma)^2$
1st Maximum	0	1
1st Zero	3.832	0
2nd Maximum	5.136	0.0175
2nd Zero	7.016	0
3rd Maximum	8.417	0.00416
3rd Zero	10.173	0
4th Maximum	11.620	0.00160
4th Zero	13.324	0

จากตารางตำแหน่งมืดอันดับแรกมีค่า_____

เราจะได้

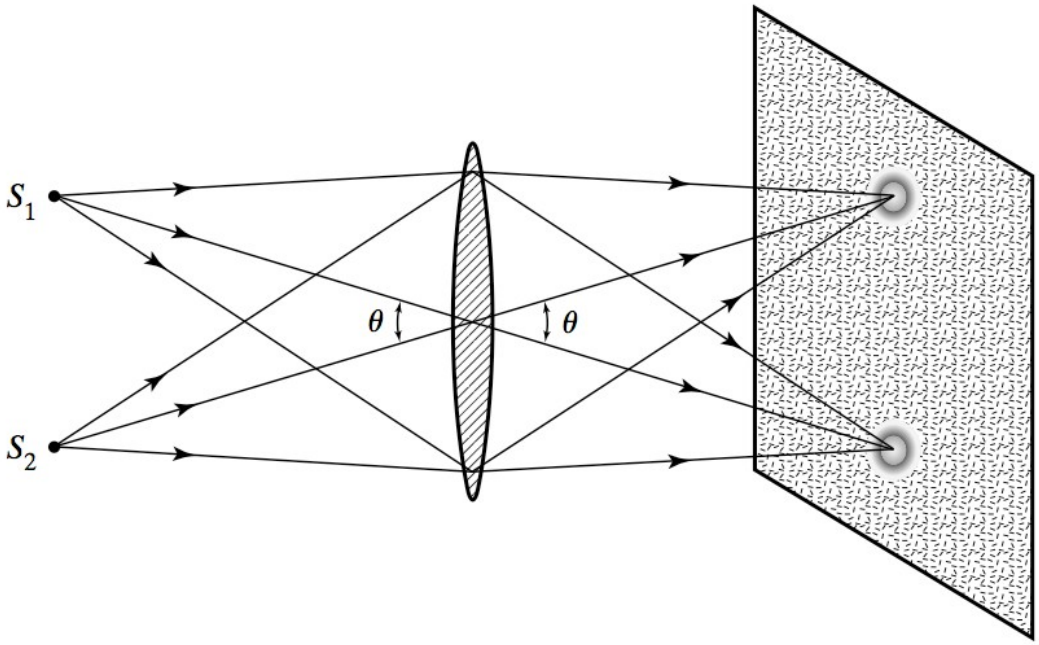
$$D\sin\theta = 1.22\,\lambda$$

ซึ่งเป็นตำแหน่งของขอบของวงกลมสว่างตรงกลางที่เรียกว่าจานไอรี (Airy disc)
ในกรณีของมุมเล็กๆ (Fraunhofer or far-field diffraction) เราจะได้ค่าครึ่งหนึ่งของขนาดเชิงมุมของจานไอรี

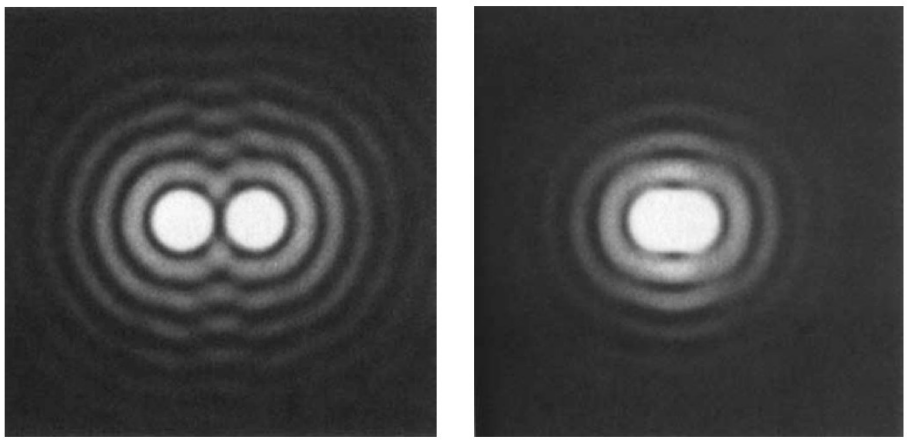
$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{1.22\,\lambda}{D}$$

4. กำลังแยก (Resolution)

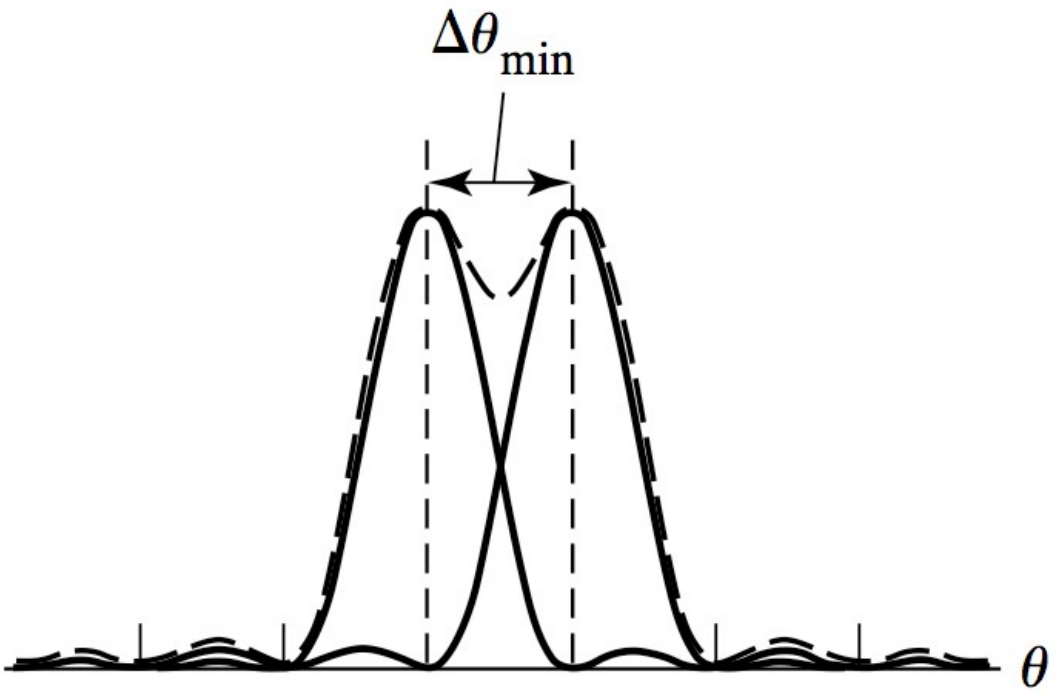
จากที่เรียนผ่านมาแล้ว จะสังเกตได้ว่าระยะระหว่างเลนส์และสลิตเดี่ยวไม่มีผลต่อการเลี้ยวเบน ดังนั้นเมื่อลดระยะ นี้ไปสู่ศูนย์เราจะได้ระบบเชิงแสงที่เป็นกล้องถ่ายรูป (เพราะมีช่องเปิดกับเลนส์อยู่ที่เดียวกัน) นี่แปลว่า ภาพที่เกิดจากกล้องจะมีผลของการเลี้ยวเบนอยู่เสมอ ถ้าพิจารณาแสงออกจากจุด S1 และ S2 ซึ่งมีระยะห่างเชิงมุม θ ภาพที่เกิดขึ้นบนฉากจะเป็นริ้วรอยการเลี้ยวเบนผ่านช่องเปิดกลมดังภาพ



เมื่อมุมนี้มีขนาดน้อยเกินไปจะทำให้ภาพทั้งสองดูคล้ายกับว่าเป็นภาพเดียวกัน



ซึ่งเราจะนิยามกำลังการแยกภาพโดยใช้เกณฑ์ของเรย์ลี (Rayleigh's criterion) ซึ่งบอกว่าภาพสองภาพจะถูกแยกได้พอดีก็ต่อเมื่อขอบของจานไอรีของภาพแรกซ้อนกับจุดกึ่งกลางของจานไอรีของภาพที่สองพอดี

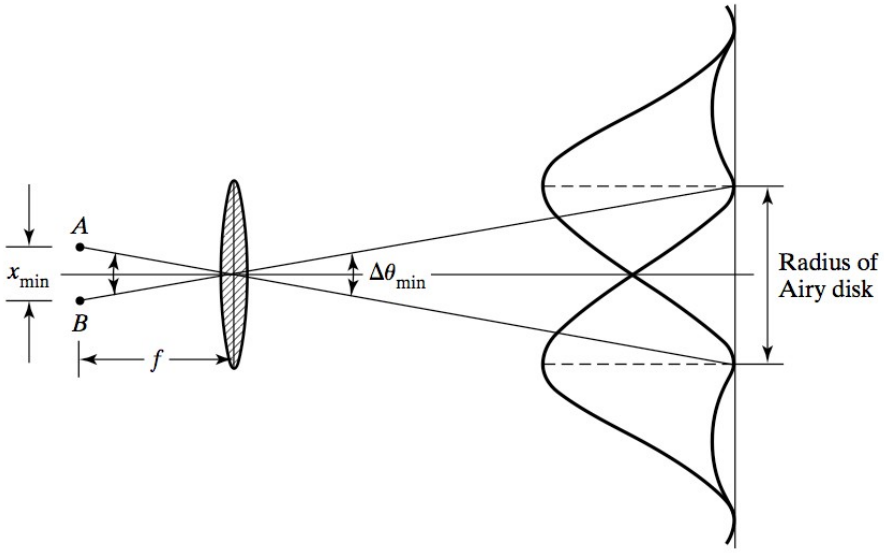


ซึ่งจากที่ได้คำนวณไปแล้วค่ามุมนี้มีค่าเท่ากับ

$$\Delta\theta_{min} = \frac{1.22\,\lambda}{D}$$

<u>ตัวอย่าง</u> เลนส์ของกล้องสองตามีเส้นผ่านศูนย์กลาง 35 มม. จงหาระยะห่างเชิงมุมที่น้อยที่สุดของดาวสองดวงที่สามารถแยกออกจากกันได้ด้วยกล้องนี้

หลักการเดียวกันนี้สามารถประยุกต์ใช้กับเลนส์ที่อยู่ใกล้วัตถุได้ด้วย โดยเมื่อไม่คำนึงถึงหน้าคลื่นที่ไม่เป็นระนาบบนช่องเปิด (แหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ใกล้เลนส์) เราจะได้ระบบดังภาพ

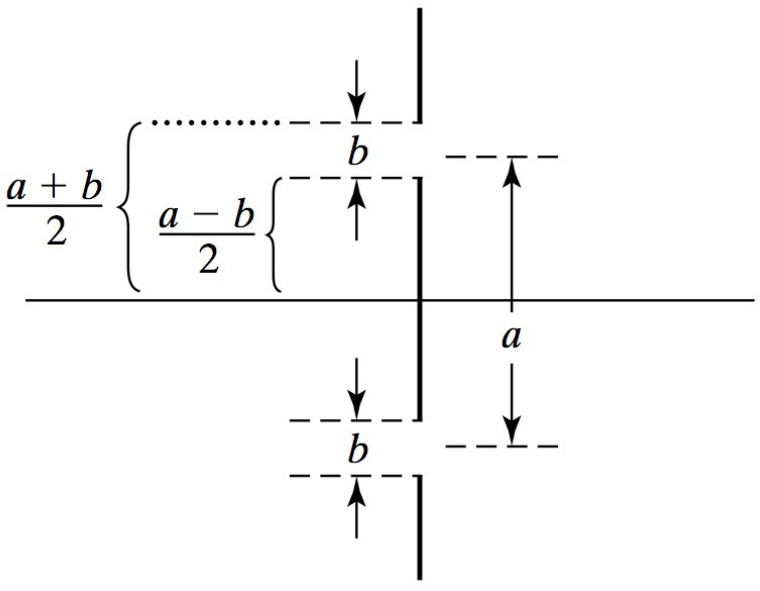


ซึ่งทำให้เราได้ระยะห่างเป็น

$$x_{min} = f\,\Delta\theta_{min} = f\left(\frac{1.22\,\lambda}{D}\right)$$

5. การเลี้ยวเบนของสลิตคู่

การคำนวณของสลิตคู่ก็มีลักษณะคล้ายกับสลิตเดี่ยวนั่นคือ พิจารณาสนามไฟฟ้าที่จุด P ซึ่งเกิดจากสนามไฟฟ้าที่ออกจากช่วงเล็กๆ ds บนสลิตที่หนึ่ง รวมกับสนามไฟฟ้าที่ออกจากช่วงเล็กๆ ds’ บนสลิตที่สอง



$$E_p=\frac{E_L}{r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}\int_{-(a+b)/2}^{-(a-b)/2}e^{iks\sin\theta}ds+\frac{E_L}{r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}\int_{(a-b)/2}^{(a+b)/2}e^{iks'\sin\theta}ds'$$

เมื่อทำการอินทิเกรตเราจะได้

$$E_p=\frac{E_L}{r_0}\frac{e^{i(kr_0-\omega t)}}{ik\sin\theta}\left(e^{\frac{ik(b-a)\sin\theta}{2}}-e^{\frac{-ik(a+b)\sin\theta}{2}}+e^{\frac{ik(a+b)\sin\theta}{2}}-e^{\frac{ik(a-b)\sin\theta}{2}}\right)$$

เมื่อแทนตัวแปรใหม่โดยใช้

$$\beta=\frac{1}{2}kb\sin\theta$$

$$\alpha=\frac{1}{2}ka\sin\theta$$

จะได้สมการเป็น

$$E_p=\frac{E_L}{r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}\frac{b}{2i\beta}\left(e^{i\alpha}\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)+e^{-i\alpha}\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)\right)$$

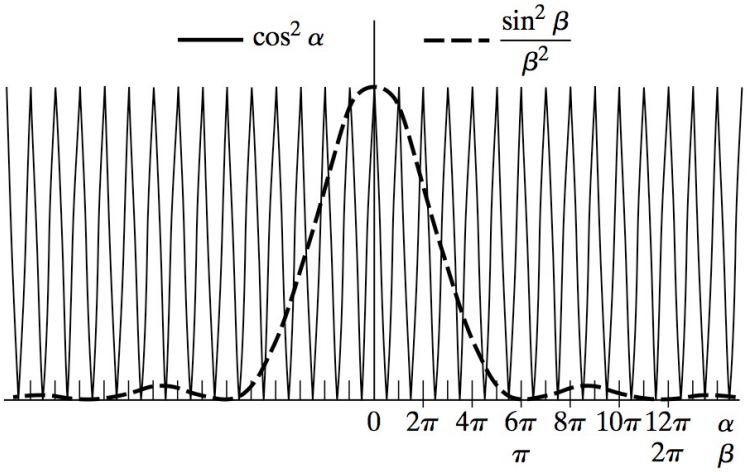
เมื่อจัดรูปจะได้

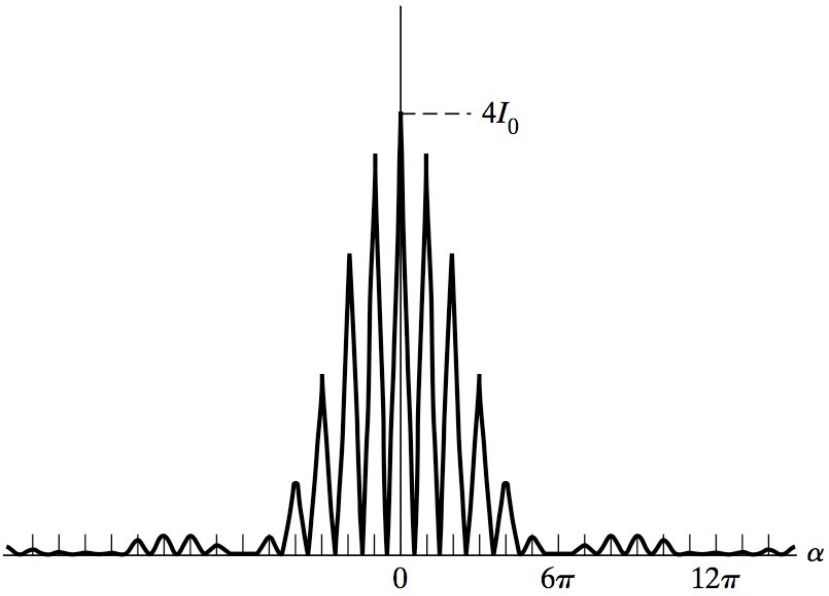
$$E_p=\frac{E_L}{r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}\frac{2b\sin\beta}{\beta}\cos\alpha$$

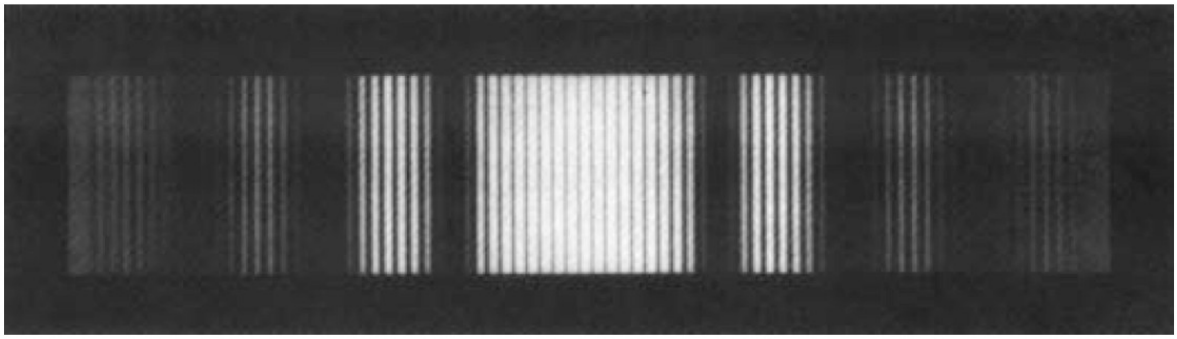
ดังนั้นความเข้มมีค่าเป็น

$$I=\left(\frac{\varepsilon_0 c}{2}\right)\left(\frac{2E_L b}{r_0}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\cos^2\alpha=4I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\cos^2\alpha$$

เมื่อใช้ I_0 ซึ่งนิยามแบบเดียวกันกับการคำนวณสลิตเดี่ยว







เราสังเกตได้ว่าริ้วรอยนี้เกิดจากการแทรกสอดและเลี้ยวเบนผสมกัน
โดยในสมการ factor _____ แสดงถึงการแทรกสอด
และ factor _____ แสดงถึงการเลี้ยวเบน

เมื่อพิจารณาจุดมืดสุดของการแทรกสอดเราจะได้เงื่อนไขว่า

$$m\lambda = b\sin\theta$$

ในขณะที่จุดสว่างสุดของการเลี้ยวเบนเกิดขึ้นเมื่อ

$$p\lambda = a\sin\theta$$

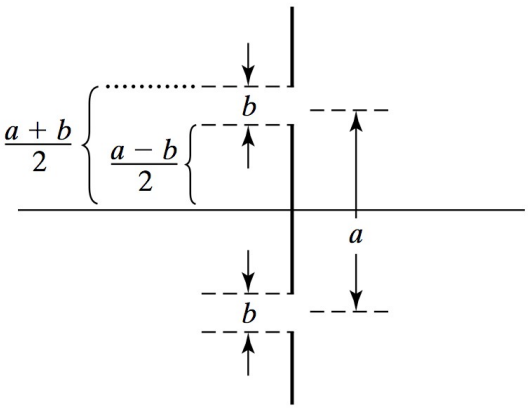
เพราะว่าความเข้มเป็นผลคูณของทั้งสองส่วน จุดสว่างสุดของการเลี้ยวเบนอาจจะหายไปได้ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ

$$a=\left(\frac{p}{m}\right)b$$

หรือ

$$\alpha=\left(\frac{p}{m}\right)\beta$$

6. การเลี้ยวเบนจากสลิต N ช่อง



ในกรณีของสลิตจำนวน N ช่อง (เกรตติ้ง) โดยให้ขนาดสลิตเป็น b และระยะห่างระหว่างสลิตเป็น a อินทิกรัลจะกลายเป็น

$$E_p=\frac{E_L}{r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}\sum_{j=1}^{N/2}\left(\int_{[-(2j-1)a-b]/2}^{[-(2j-1)a+b]/2}e^{iks\sin\theta}ds+\int_{[(2j-1)a-b]/2}^{[(2j-1)a+b]/2}e^{iks'\sin\theta}ds'\right)$$

เมื่อทำการอินทิเกรตเราจะได้

ทำให้เราได้เทอมในวงเล็บด้านบนเป็น

$$K_j=\frac{b}{2i\beta}\left[e^{-i|2j-1|\alpha}\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)+e^{i|2j-1|\alpha}\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)\right]$$

ทำให้เราได้

$$K_j=\frac{b}{2i\beta}\left(2i\sin\beta\right)2\cos\left[(2j-1)\alpha\right]$$

$$K_j = 2b\frac{\sin\beta}{\beta}\Re\left[e^{(2j-1)\alpha}\right]$$

เมื่อพิจารณาผลรวมของทุกค่าของ j เราจะได้

$$S = \sum_{j=1}^{N/2} K_j = 2b\frac{\sin\beta}{\beta}\Re\left[\sum_{j=1}^{N/2} e^{(2j-1)\alpha}\right]$$

$$S = 2b\frac{\sin\beta}{\beta}\Re\left[e^{i\alpha} + e^{i3\alpha} + e^{i5\alpha} + \ldots + e^{i(N-1)\alpha}\right]$$

เมื่อใช้สูตรผลรวมเรขาคณิต เราจะได้ว่า

$$S = 2b\frac{\sin\beta}{\beta}\Re\left[\frac{e^{iN\alpha}-1}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}\right]$$

กระจายในรูป cos และ sin เราจะได้

$$S = b\frac{\sin\beta}{\beta}\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}$$

และทำให้เราได้สนามไฟฟ้ารวมเป็น

$$E_p = \frac{E_L b}{r_0}\frac{\sin\beta}{\beta}\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}e^{i(kr_0-\omega t)}$$

เมื่อทำเป็นความเข้มเราจะได้

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

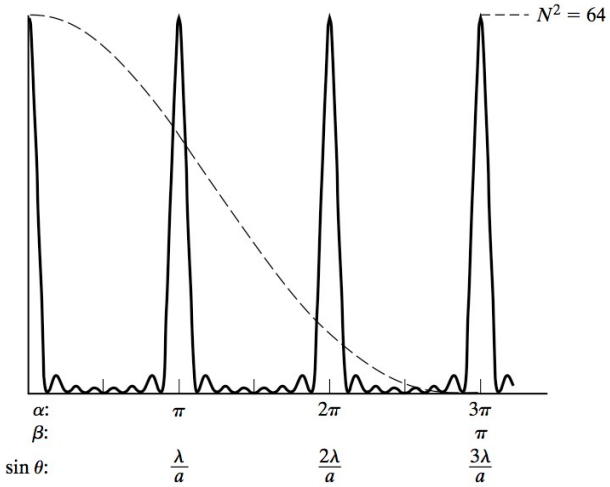
ซึ่งประกอบด้วย_____ซึ่งเป็น factor ของการเลี้ยวเบน
และ_____ซึ่งเป็น factor ของการแทรกสอด

เพื่อเป็นการตรวจสอบผลลัพธ์ เราสามารถลดรูปสูตรนี้ในกรณีที่ N = 1 และ N = 2 แล้วได้สูตรของการเลี้ยวเบนผ่านสลิตเดี่ยวและสลิตคู่ดังนี้

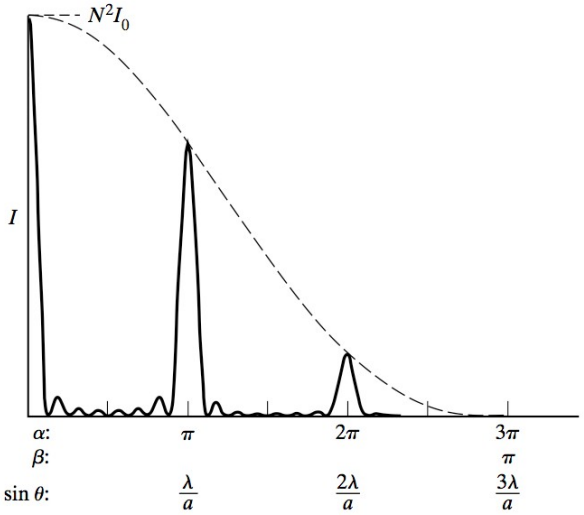
เมื่อพิจารณาเทอมการแทรกสอดเมื่อ $\alpha = m\pi$ โดยการใช้ L'Hopital rule เราสามารถหาค่าของเทอมนี้ได้เท่ากับ

$$\lim_{\alpha \to m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} = \pm N$$

เราจะได้ความสูงของส่วนการแทรกสอดดังรูป



เมื่อรวมกับสว่นของการเลี้ยวเบน เราจะได้กราฟ

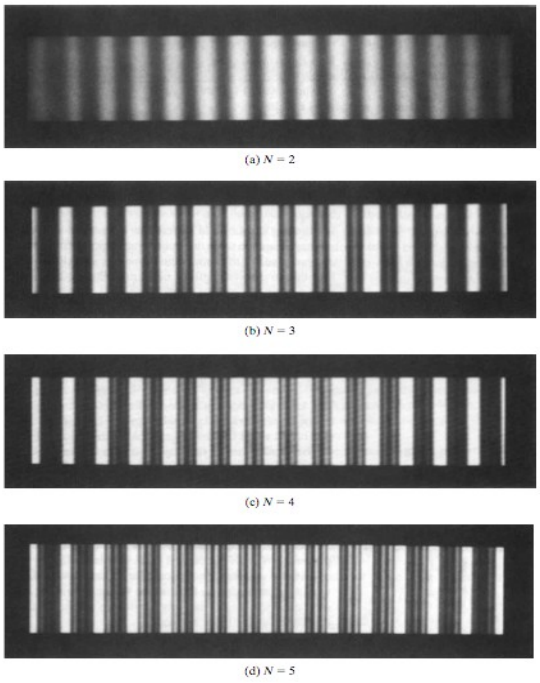


สังเกตว่าระหว่างค่า $\alpha = m\pi$ ก็ยังมีจุดต่ำสุดสูงสุดย่อยๆอีกเป็นจำนวน N-2 (ดังตัวอย่าง N = 8 มีพีคย่อยๆอีก 6 อัน) จุดต่ำสุดย่อยๆนี้เกิดขึ้นจากตอนที่ส่วนของ $sinN\,\alpha$ มีค่าเท่ากับศูนย์แต่ นั่นคือ

$$\alpha N = p\pi$$

เมื่อ

$$p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N-1)$$



(a) $N = 2$

(b) $N = 3$

(c) $N = 4$

(d) $N = 5$