

Center of Gravity and Centroid

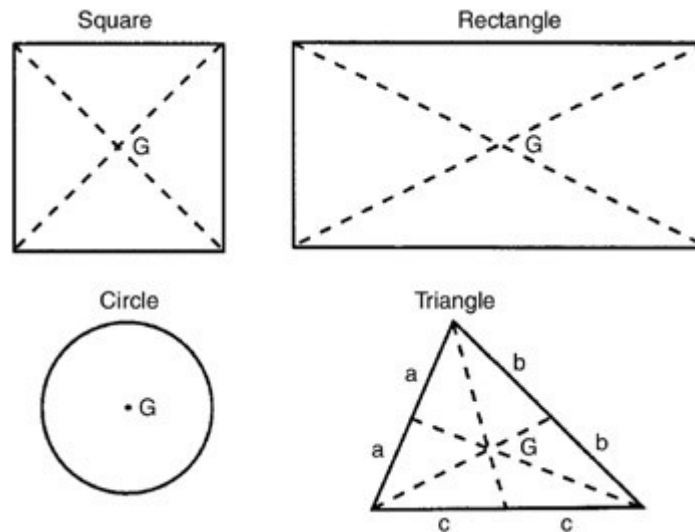


จุดศูนย์ถ่วง และ จุดcentroid

คำจำกัดความ

□ จุดเซ้นทรอย (Centroid) (C)

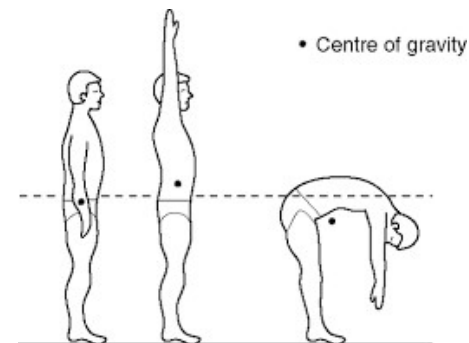
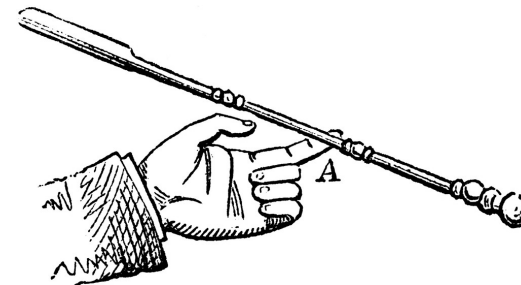
คือจุดที่เป็นศูนย์กลางทางเรขาคณิตของวัตถุ
(geometrical center)



คำจำกัดความ

□ จุดศูนย์ถ่วง (Center of gravity)

คือจุดที่แรงลัพธ์ของน้ำหนักทั้งหมดของวัตถุนั้นกระทำ
โดยจุดนี้มักนิยมใช้สัญลักษณ์ตัวอักษร G หรือ CG



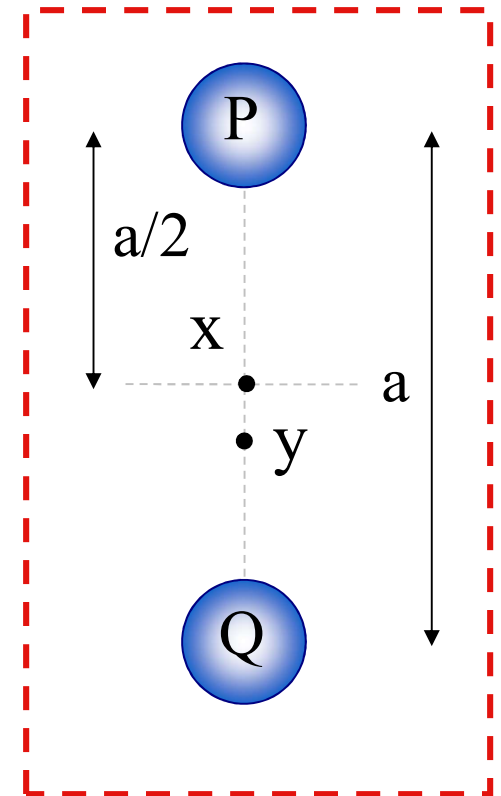
คำจำกัดความ

□ จุดศูนย์กลางถ่วง (Center of gravity)

คือจุดที่แรงลัพธ์ของน้ำหนักทั้งหมดของวัตถุ
นั้นกระทำ โดยจุดนี้มักนิยมใช้สัญลักษณ์ตัวอักษร
G หรือ CG

□ จุดเซนทรอยด์ (Centroid) (C)

คือจุดที่เป็นศูนย์กลางทางเรขาคณิตของวัตถุ



- **กรณีน้ำหนักเท่ากัน** จุด CG และจุดเซนทรอยด์ คือที่จุด x โดยมีระยะห่างเท่ากับ $a/2$
- **กรณีน้ำหนัก $P < Q$** จุด CG ยื้องเข้าหาจุด y แต่จุดเซนทรอยด์ ยังอยู่ที่จุด X

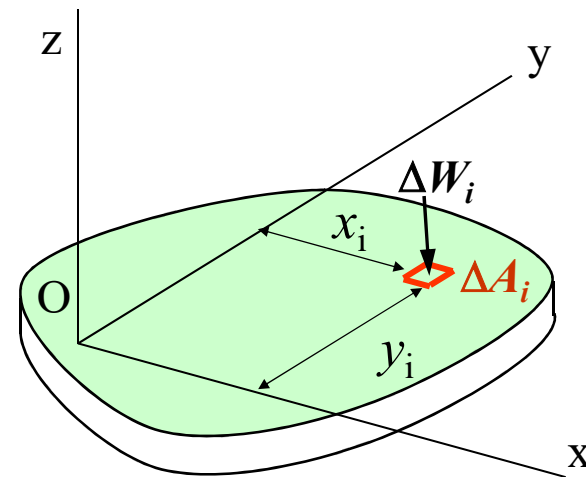
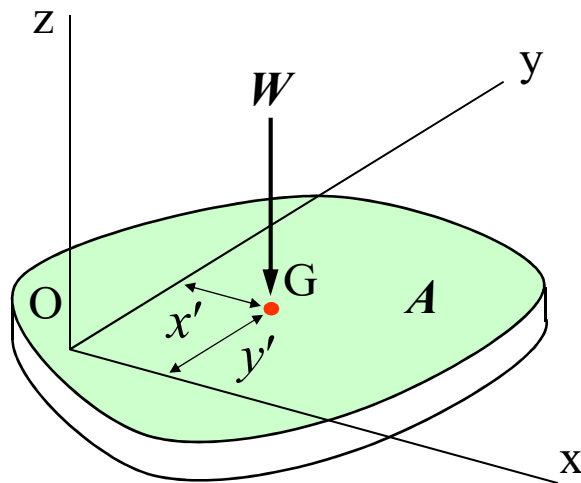
จุดศูนย์ถ่วง (Center of gravity, CG)

ให้แผ่นวัตถุมีน้ำหนักเท่ากับ W แบ่งแผ่นวัตถุนี้ออกเป็นส่วนเล็ก ๆ n ส่วน น้ำหนัก ΔW_i

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots + \Delta W_n$$

$$W = \int dW$$

แรงทั้ง 2 ระบบสมดุลกัน



พิจารณาระบบที่สมดุลกัน ของโมเมนต์

$$\sum M_y = \sum M_y' \Rightarrow x'W = x_1\Delta W_1 + x_2\Delta W_2 + x_3\Delta W_3 + \dots + x_n\Delta W_n$$

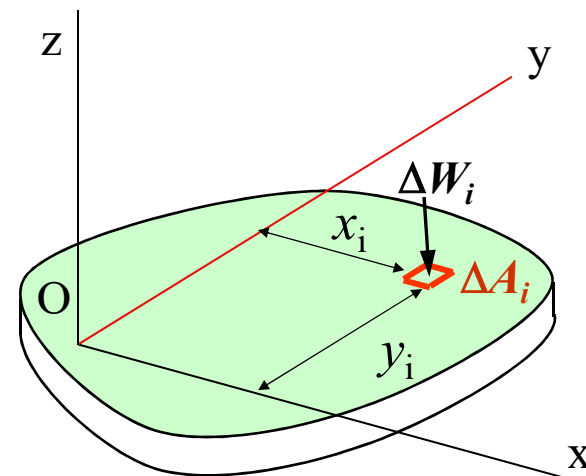
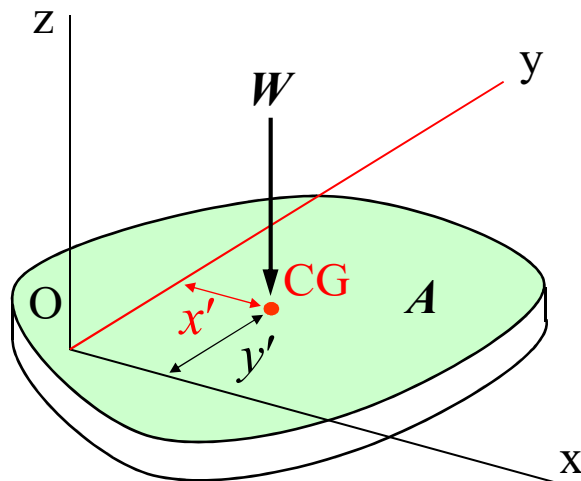
$$x'W = \sum_{i=1}^n x_i\Delta W_i \quad \text{หรือ} \quad x'W = \int x dW$$

Assume:

Uniform thickness (t) และ Homogeneous ดังนั้น น้ำหนัก $W = \gamma t A$ และ $\Delta W_i = \gamma t \Delta A_i$

$$x' A = \sum_{i=1}^n x_i \Delta A_i \Rightarrow x' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta A_i}{A} \quad \text{หรือ} \quad x' = \frac{\int x dA}{A}$$

โมเมนต์ของพื้นที่
รอบแกน y



พิจารณาระบบที่สมดุลกัน ของโมเมนต์

$$-\sum M_x = \sum M'_x \Rightarrow y'W = y_1\Delta W_1 + y_2\Delta W_2 + y_3\Delta W_3 + \dots + y_n\Delta W_n$$

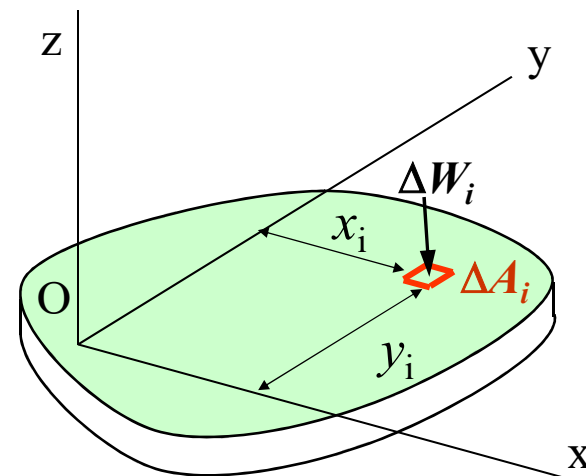
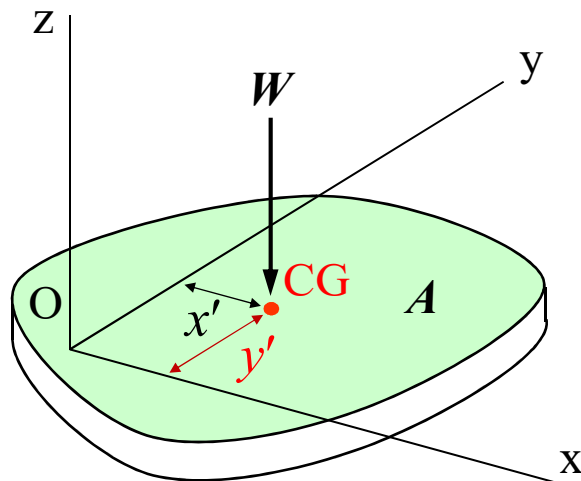
$$y'W = \sum_{i=1}^n y_i\Delta W_i \quad \text{หรือ} \quad y'W = \int ydW$$

Assume:

Uniform thickness (t) และ Homogeneous ดังนั้น น้ำหนัก $W = \gamma tA$ และ $\Delta W_i = \gamma t\Delta A_i$

$$y'A = \sum_{i=1}^n y_i\Delta A_i \Rightarrow y' = \frac{\sum_{i=1}^n y_i\Delta A_i}{A} \quad \text{หรือ} \quad y' = \frac{\int ydA}{A}$$

โมเมนต์ของพื้นที่
รอบแกน x



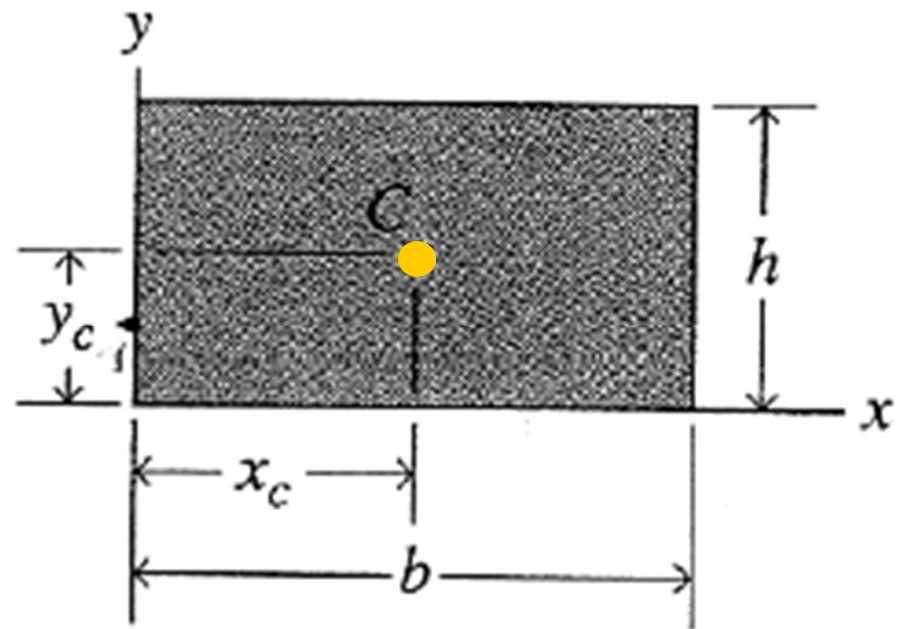
การหาพิกัดของจุดcentroidของรูปทรงทางเรขาคณิต

Rectangular area

$$A = bh$$

$$x_C = \frac{b}{2}$$

$$y_C = \frac{h}{2}$$

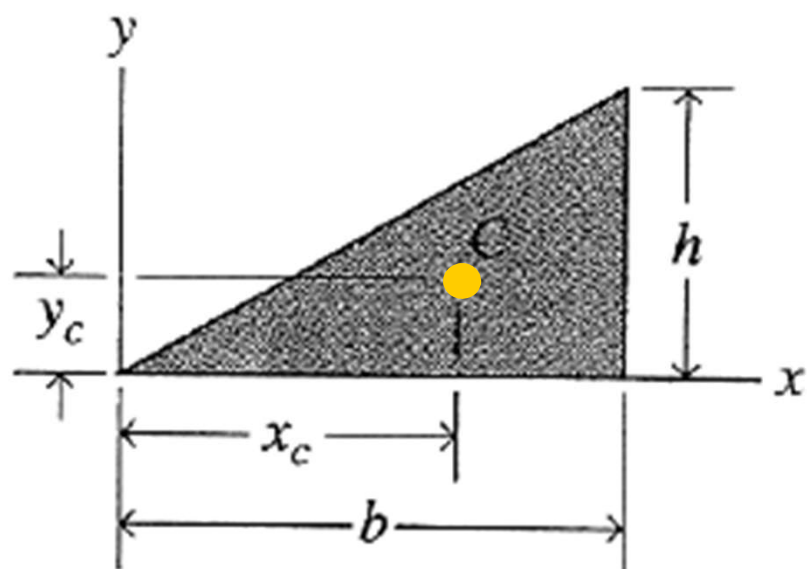


Triangular area

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$x_C = \frac{2b}{3}$$

$$y_C = \frac{h}{3}$$

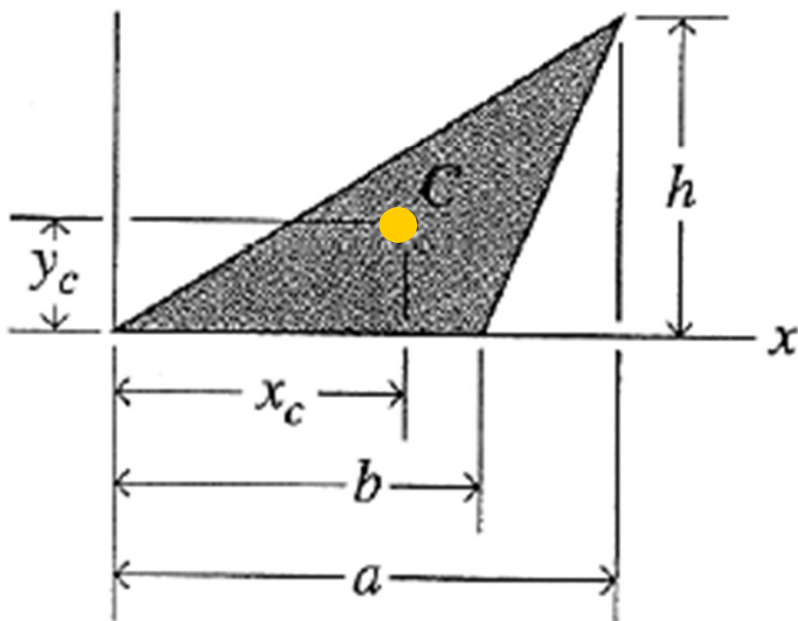


Triangular area

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$x_C = \frac{a+b}{3}$$

$$y_C = \frac{h}{3}$$



Circular arc

$$L = 2r\alpha$$

$$x_C = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

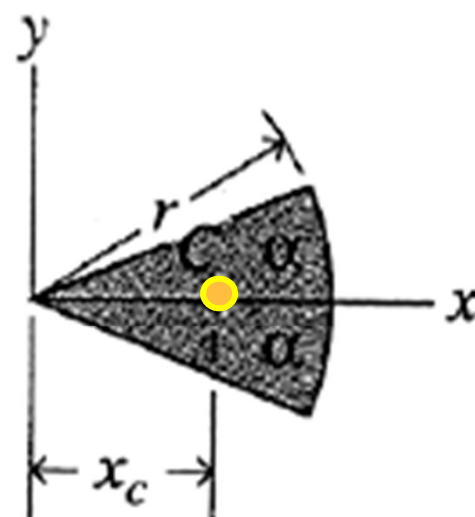
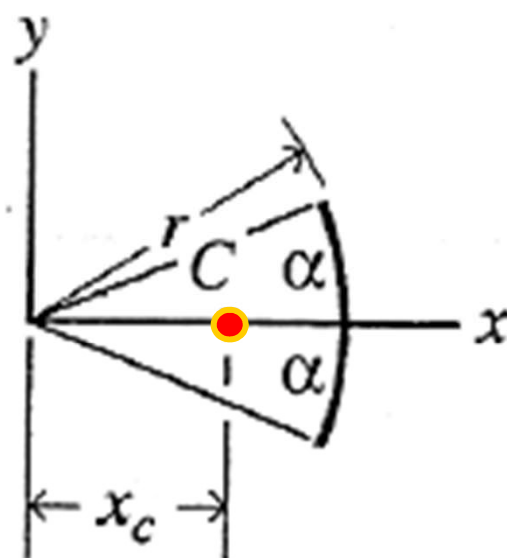
$$y_C = 0$$

Circular sector

$$A = r^2 \alpha$$

$$x_C = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$$

$$y_C = 0$$

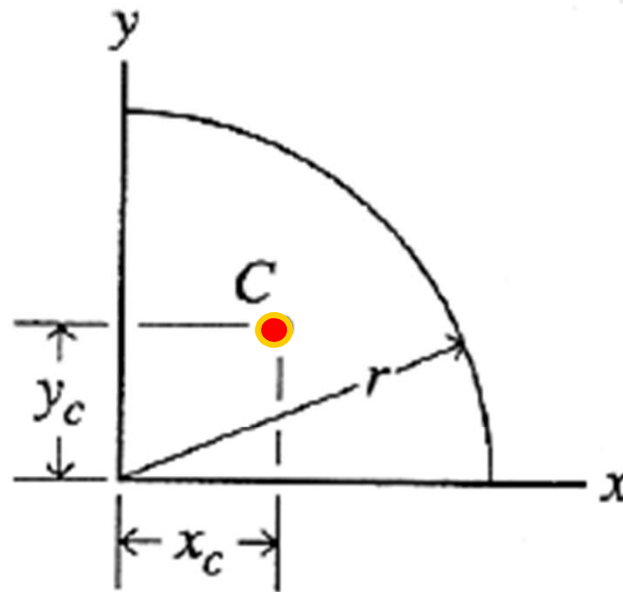


Quarter circular arc

$$L = \frac{\pi r}{2}$$

$$x_C = \frac{2r}{\pi}$$

$$y_C = \frac{2r}{\pi}$$

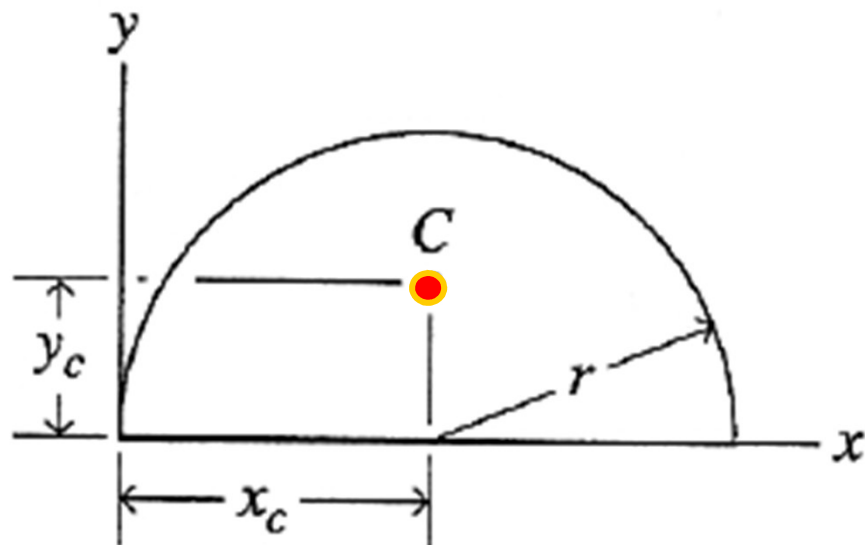


Semicircular arc

$$L = \pi r$$

$$x_C = r$$

$$y_C = \frac{2r}{\pi}$$

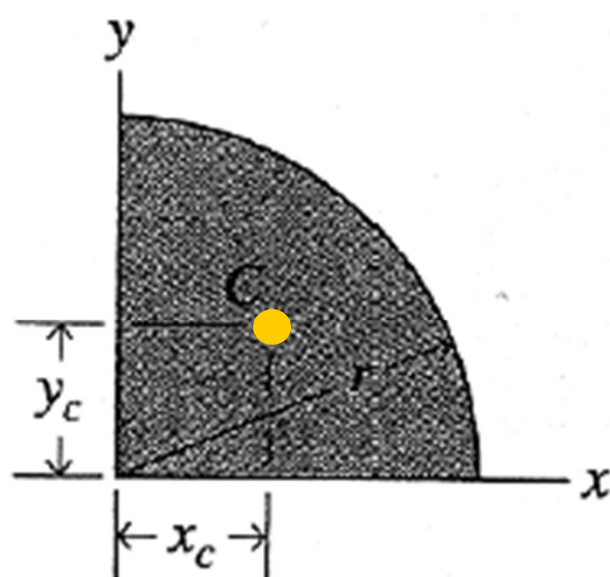


Quadrant of a circle

$$A = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$x_C = \frac{4r}{3\pi}$$

$$y_C = \frac{4r}{3\pi}$$

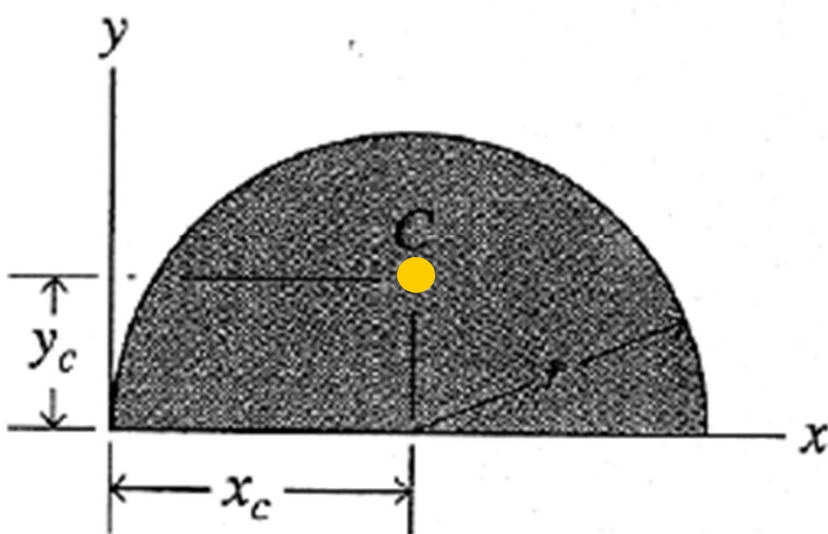


Semicircular area

$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$x_C = r$$

$$y_C = \frac{4r}{3\pi}$$

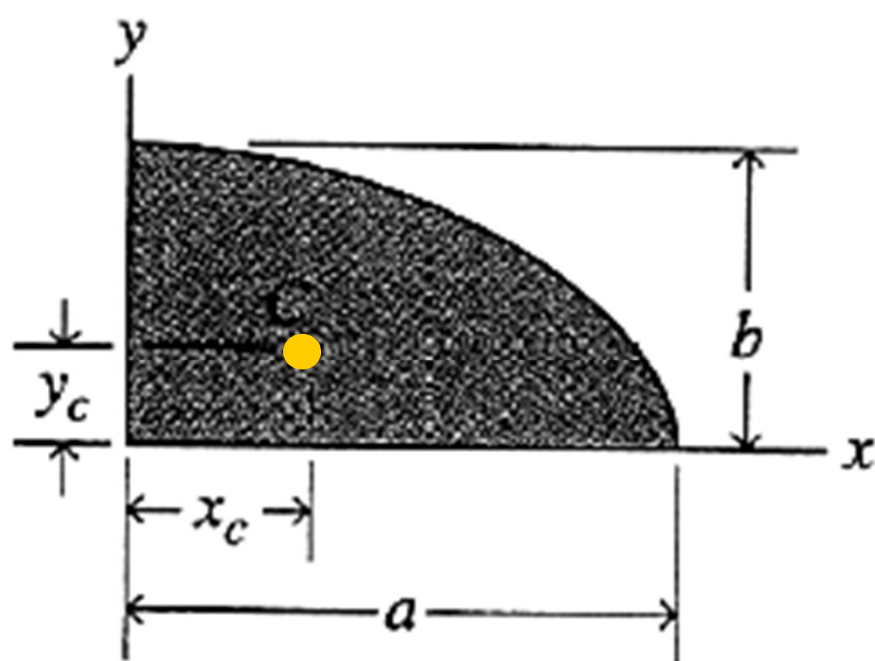


Quadrant of an ellipse

$$A = \frac{\pi ab}{4}$$

$$x_C = \frac{4a}{3\pi}$$

$$y_C = \frac{4b}{3\pi}$$

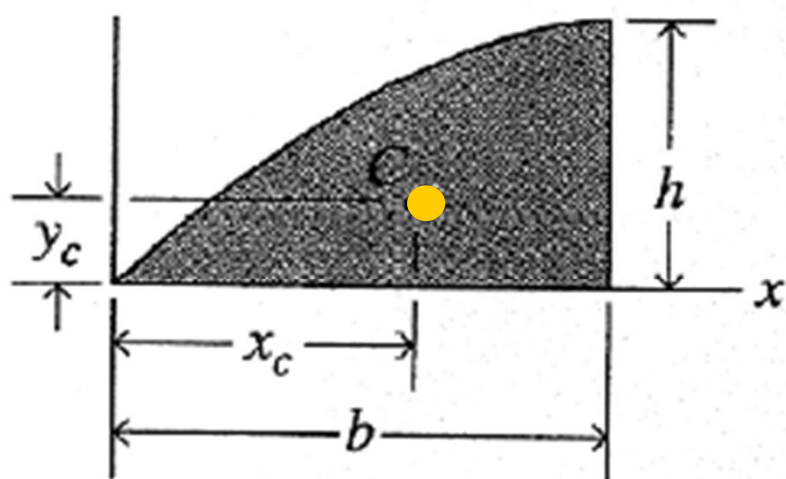


Quadrant of a parabola

$$A = \frac{2bh}{3}$$

$$x_C = \frac{5b}{8}$$

$$y_C = \frac{2h}{5}$$

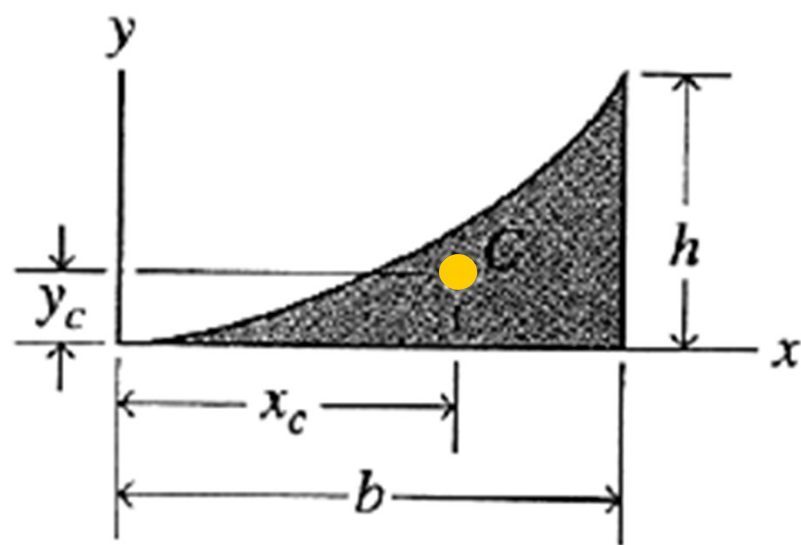


Parabolic spandrel

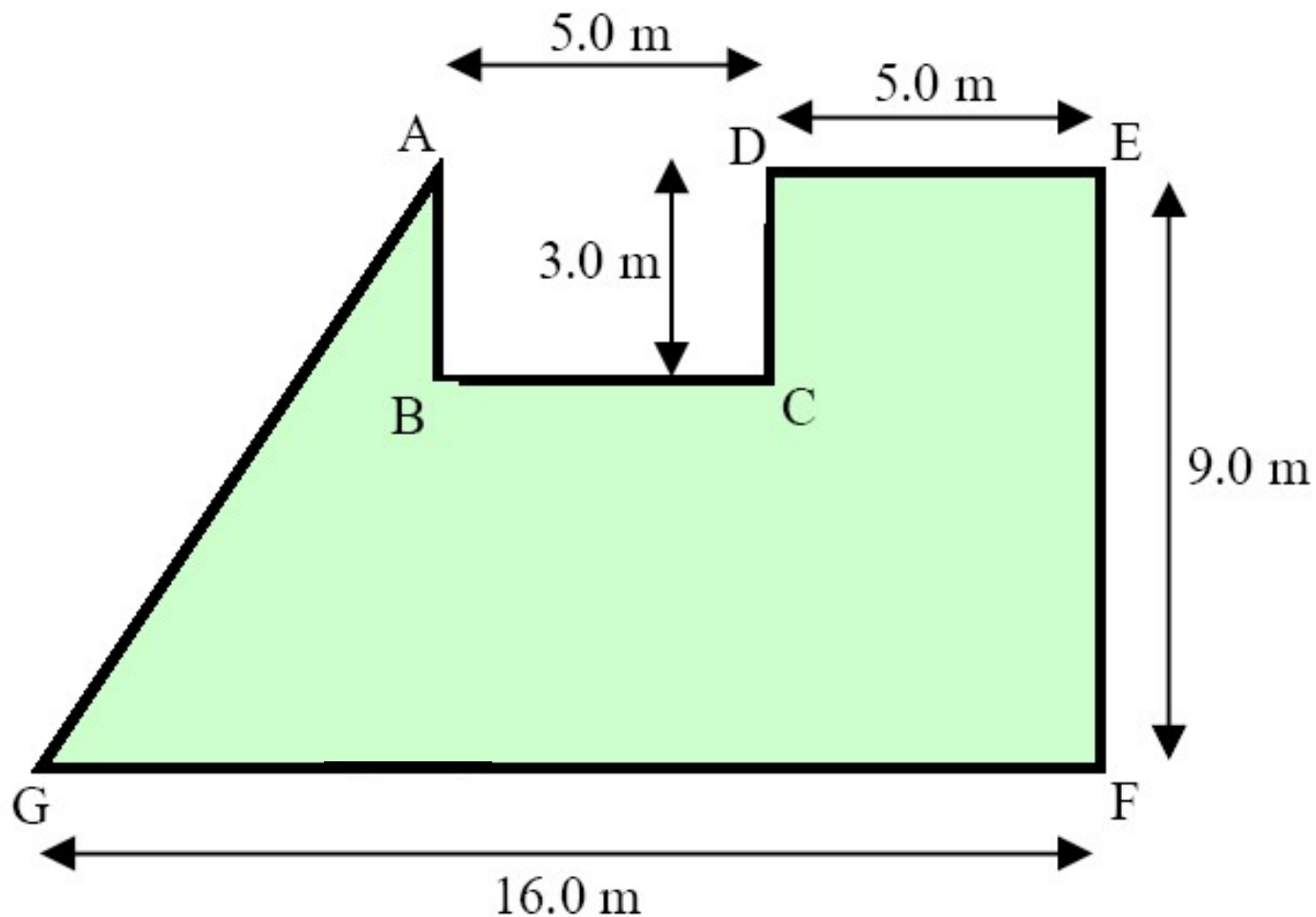
$$A = \frac{bh}{3}$$

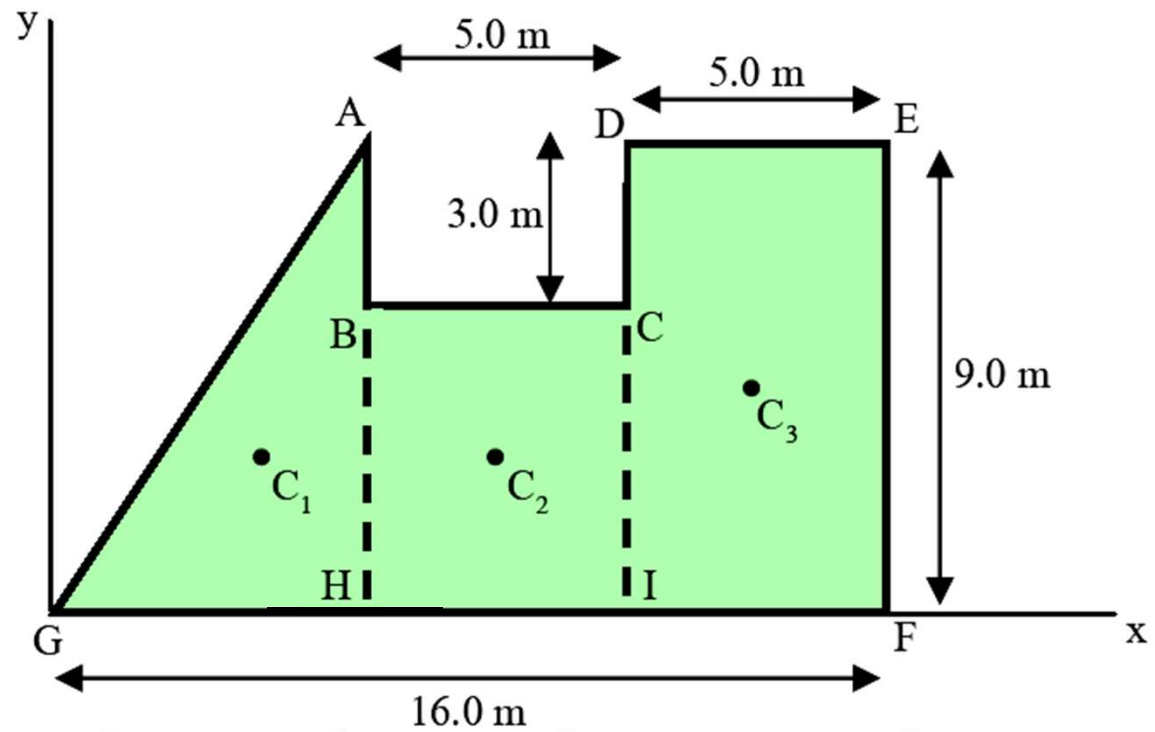
$$x_C = \frac{3b}{4}$$

$$y_C = \frac{3h}{10}$$



ตัวอย่างที่ 1 แผ่นโลหะแบนมีความหนาสม่ำเสมอ ABCDEFG มีขนาดและรูปร่างดังแสดงในรูป จงหาโมเมนต์ของพื้นที่รอบแกน x และ y และพิกัดของจุดcentroid รอยของแผ่นโลหะแบนนี้





รูป	พื้นที่ A, m^2	พิกัด x, m	พิกัด y, m	$x.A, m^3$	$y.A, m^3$
GAH	$9 \times 6/2 = 27.0$	4.0	3.0	108.0	81.0
HBCI	$6 \times 5 = 30.0$	8.5	3.0	255.0	90.0
IDEF	$9 \times 5 = 45.0$	13.5	4.5	607.5	202.5
	$\Sigma A = 102.0$			$\Sigma x.A = 970.5$	$\Sigma y.A = 373.5$

จาก $\Sigma A = 102.0$, $\Sigma x.A = 970.5$ และ $\Sigma y.A = 373.5$

นั่นคือ

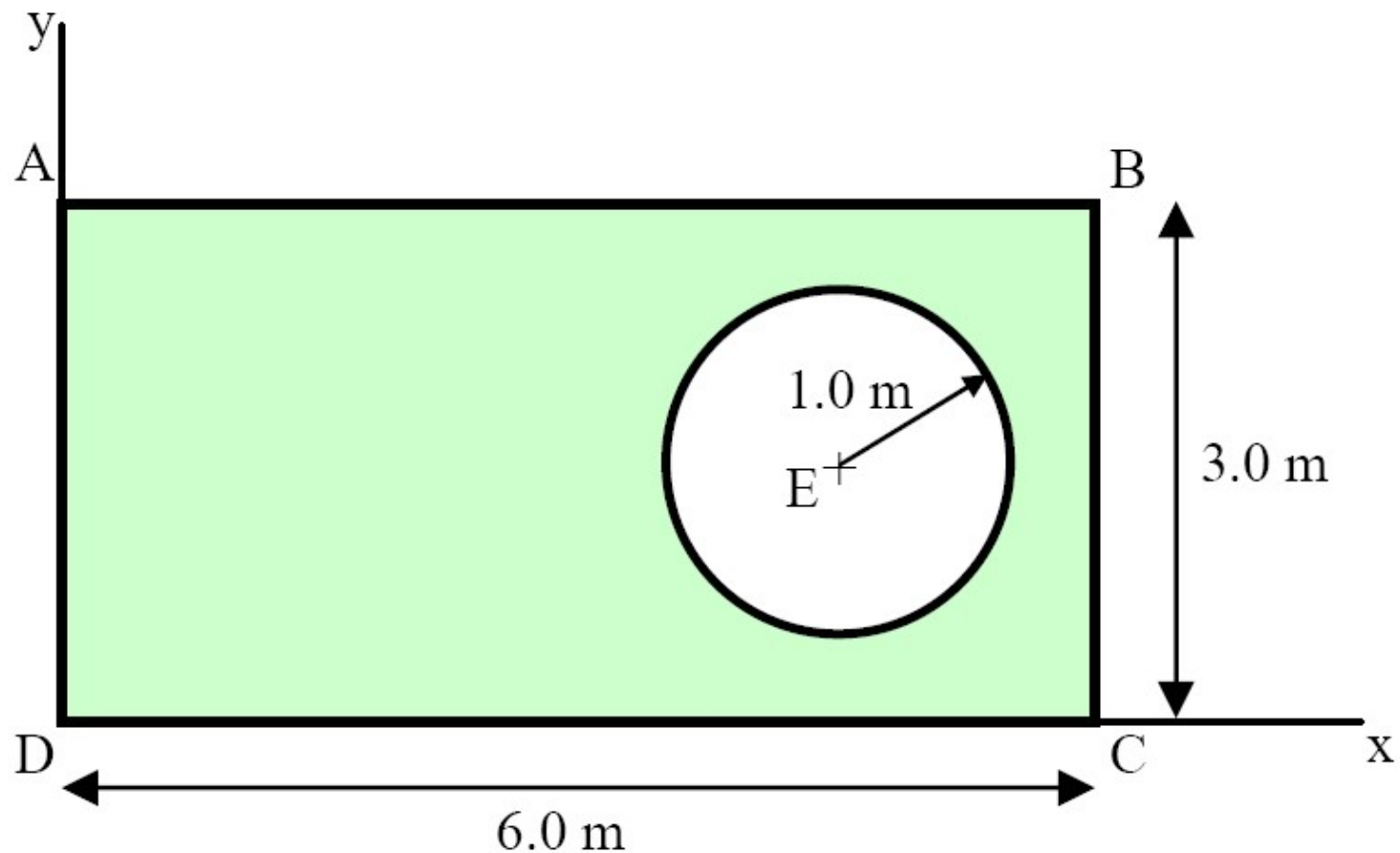
โมเมนต์ของพื้นที่รอบแกน $x = 373.5 \text{ m}^3$

โมเมนต์ของพื้นที่รอบแกน $y = 970.5 \text{ m}^3$

พิกัดของจุดcentroidของแผ่นโลหะแบน $x = 970.5/102 = 9.5 \text{ m}$

พิกัดของจุดcentroidของแผ่นโลหะแบน $y = 373.5/102 = 3.7 \text{ m}$

ตัวอย่างที่ 2 แผ่นโลหะแบนมีความหนาสม่ำเสมอ ABCD ถูกเจาะเป็นช่อง
รูปวงกลมทำให้มีขนาดและรูปร่างดังแสดงในรูป ถ้าจุดศูนย์กลางของรูป
วงกลมที่ถูกเจาะอยู่ที่จุด E มีพิกัด (4.5, 1.5) จงหาโมเมนต์ของพื้นที่รอบ
แกน x และ y และพิกัดของจุดcentroid ของแผ่นโลหะนี้

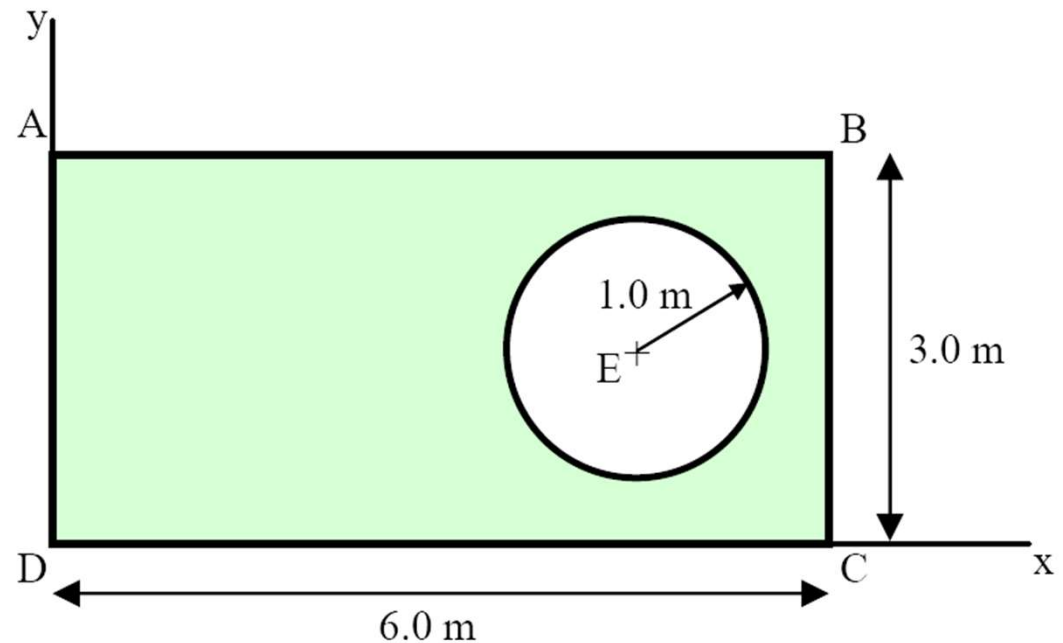


จุดเซนทรอยด์ของแผ่นโลหะ ABCD

มีพิกัดคือ (3.0, 1.5)

จุดเซนทรอยด์ของรูปวงกลม E

มีพิกัดคือ (4.5, 1.5)



รูป	พื้นที่ A, m ²	พิกัด x, m	พิกัด y, m	x.A, m ³	y.A m ³
ABCD	6 x 3 = 18.0	3.0	1.5	54.0	27.0
วงกลม E	$-\pi \times 1^2 = -3.1^*$	4.5	1.5	-13.95	-4.65
	$\Sigma A = 14.9$			$\Sigma x.A = 40.05$	$\Sigma y.A = 22.35$

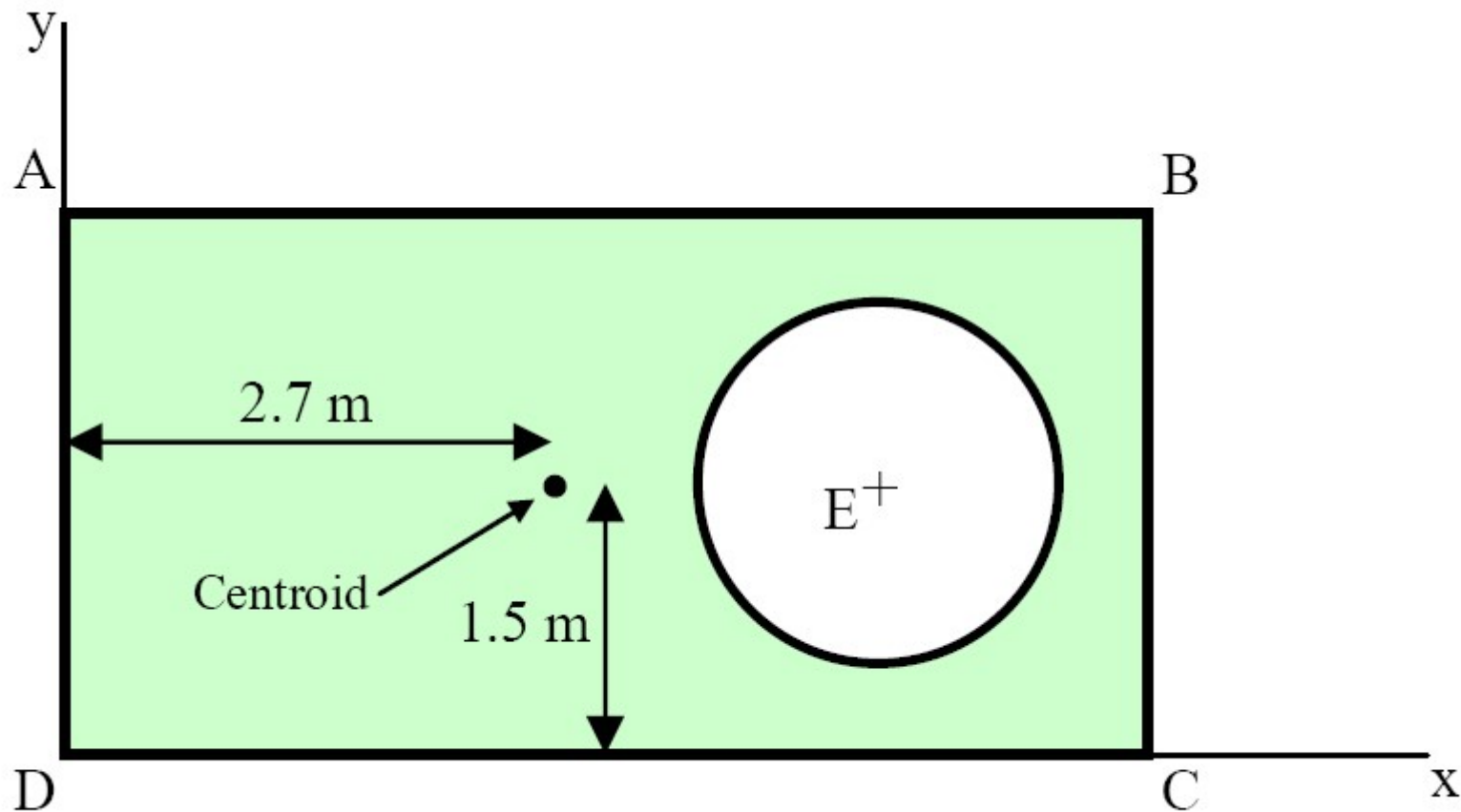
* พื้นที่มีค่าเป็นลบเนื่องจากถูกเจาะออกไป

ดังนั้น โมเมนต์ของพื้นที่รอบแกน x = 22.35 m³

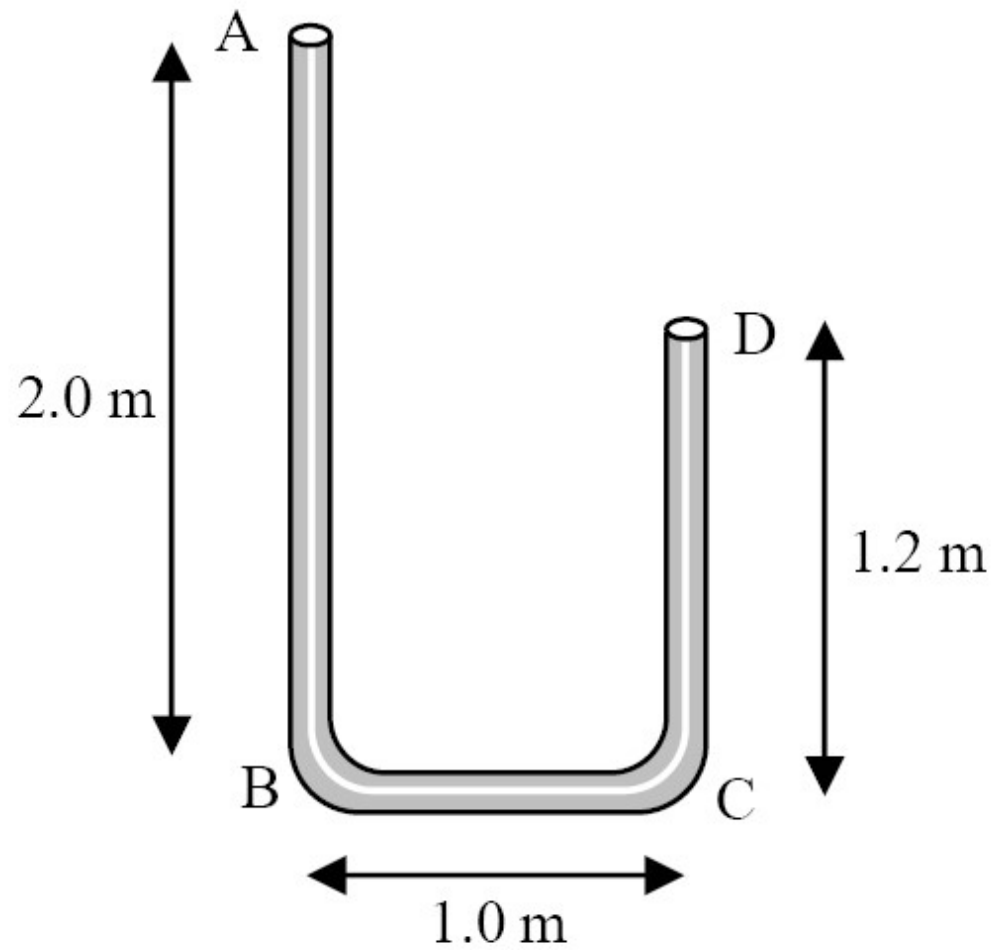
โมเมนต์ของพื้นที่รอบแกน y = 40.05 m³

พิกัดของจุดcentroidของแผ่นโลหะแบน $x = \sum x.A / \sum A = 40.05 / 14.9 = 2.7 \text{ m}$

พิกัดของจุดcentroidของแผ่นโลหะแบน $y = \sum y.A / \sum A = 22.35 / 14.9 = 1.5 \text{ m}$



ตัวอย่าง แท่งโลหะ ABCD มีขนาดสม่ำเสมอ ถูกงอให้มีรูปร่างและความยาวดังแสดงในรูป จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลางทอของแท่งโลหะนี้

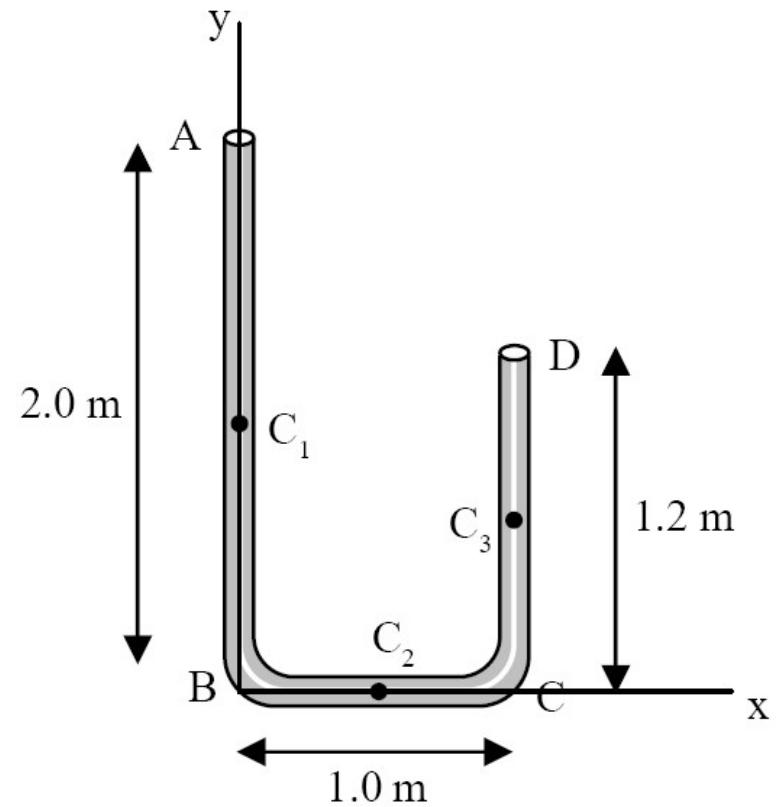


จุดcentroid

ส่วน AB คือ (0, 1.0)

ส่วน BC คือ (0.5, 0) และ

ส่วน CD คือ (1.0, 0.6)



ส่วน	ความยาว L, m	พิกัด x, m	พิกัด y, m	x.L, m ²	y.L, m ²
AB	2.0	0	1.0	0	2.0
BC	1.0	0.5	0	0.5	0
CD	1.2	1.0	0.6	1.2	0.72
	$\Sigma L = 4.2$			$\Sigma x.L = 1.7$	$\Sigma y.L = 2.72$

$$\Sigma L = 4.2$$

$$\Sigma y.L = 2.72$$

$$\Sigma x.L = 1.7$$

พิกัดของจุดศูนย์กลางทรวงของแท่งโลหะ $x = 1.7/4.2 = 0.4 \text{ m}$

พิกัดของจุดศูนย์กลางทรวงของแท่งโลหะ $y = 2.72/4.2 = 0.65 \text{ m}$

