บทที่ 6 แรงภายใน

(Internal Forces)

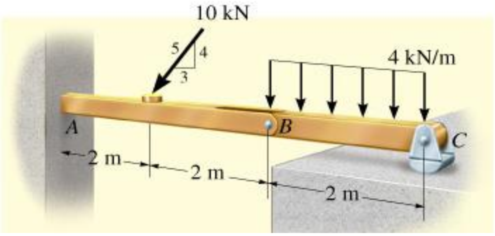
ผู้สอน: รศ.วิชุดา เสถียรนาม

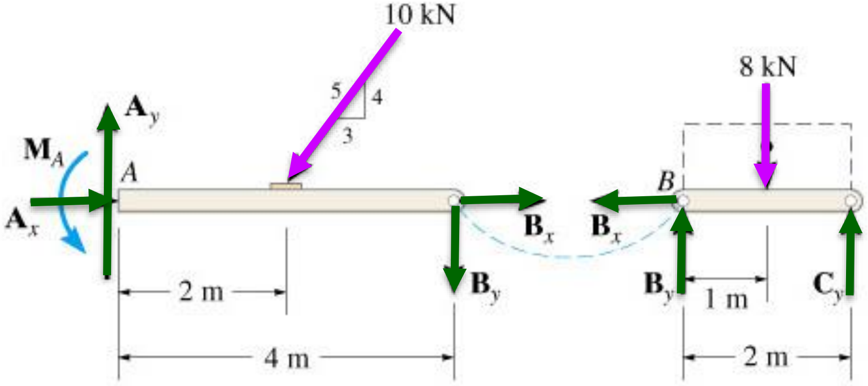
ห้อง: ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

E-mail: wichsa@kku.ac.th

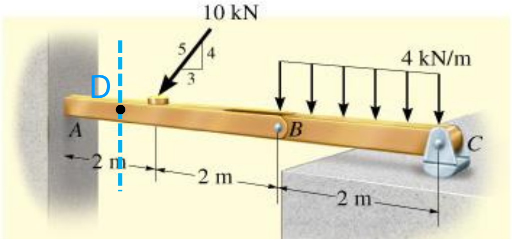
สิ่งที่เรียนมาแล้ว

- เมื่อมีแรงกระทำต่อวัตถุ เราสามารถวิเคราะห์หา**แรงปฏิกริยาที่จุดรองรับหรือแรงปฏิกริยาที่จุดต่อเชื่อม**ได้



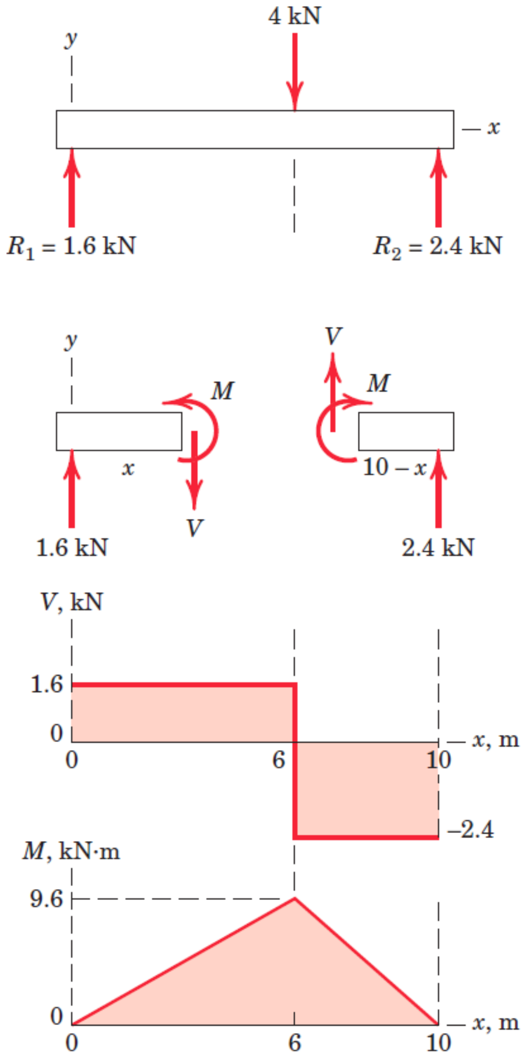


- แต่ในการออกแบบชิ้นส่วนนั้น จำเป็นจะต้องทราบว่า**เกิดแรงขึ้นภายในชิ้นส่วนเป็นขนาดเท่าใด** จึงจะสามารถนำไปออกแบบได้



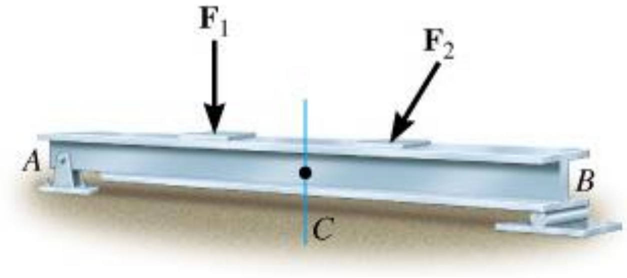
วัตถุประสงค์

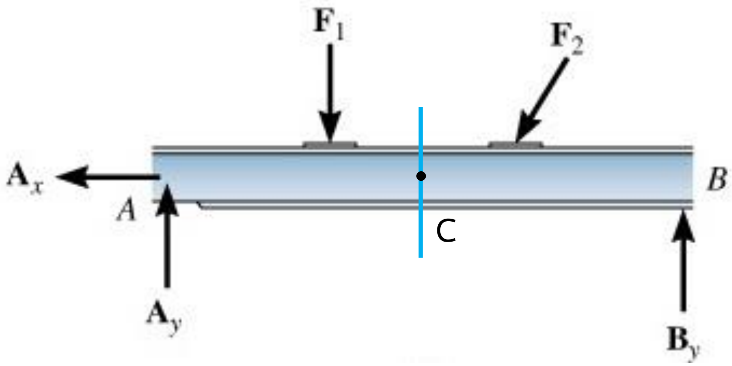
- เพื่อศึกษาวิธีที่จะใช้วิเคราะห์หา **แรงภายใน**ชิ้นส่วน
- เพื่อศึกษาวิธีการเขียน**แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์**สำหรับแสดงแรงภายในของคาน ณ ตำแหน่งต่างๆ



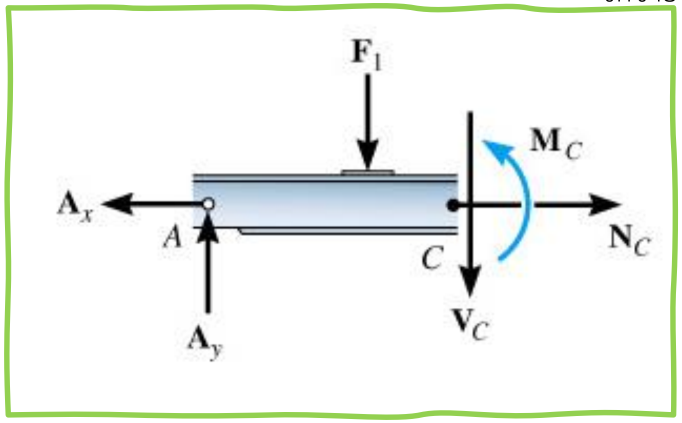
แรงภายในคืออะไร

- เป็นแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน
- ตัดวัตถุ (ที่อยู่ในสมดุล) ออกเป็น 2 ส่วน วัตถุที่ตัดนั้นยังสามารถอยู่ในสมดุลได้ก็เพราะมี แรงภายใน

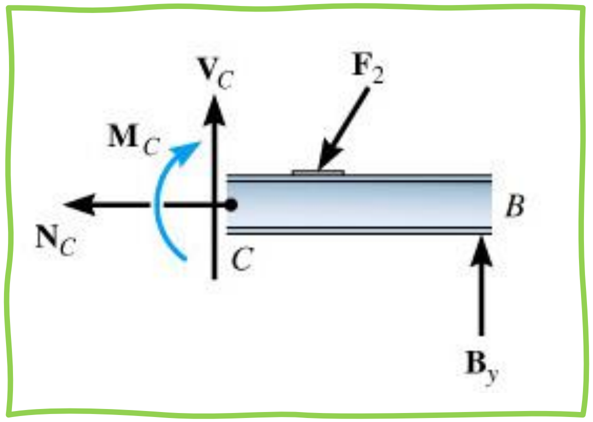




ซีกซ้าย



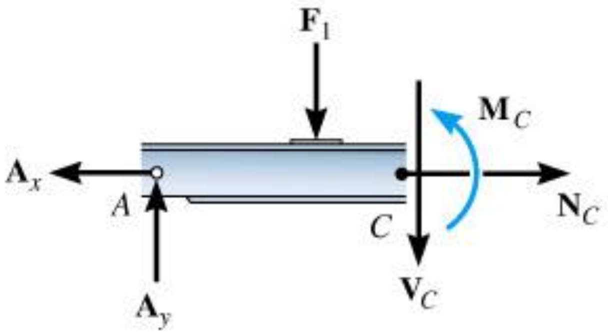
ซีกขวา



แรงภายในคืออะไร

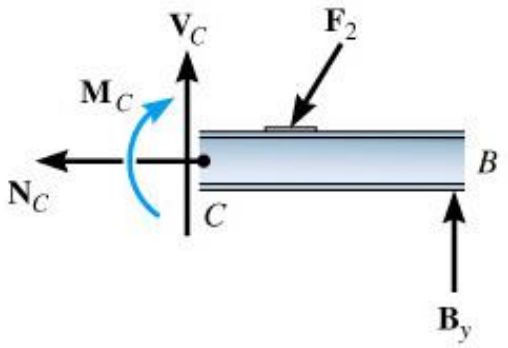
- ชิ้นส่วนของวัตถุที่ถูกตัดจะยังคงอยู่ใน สมดุล เมื่อผลรวมของแรงและโมเมนต์ทั้งหมดที่กระทำต่อชิ้นส่วนเท่ากับศูนย์

ซีกซ้าย



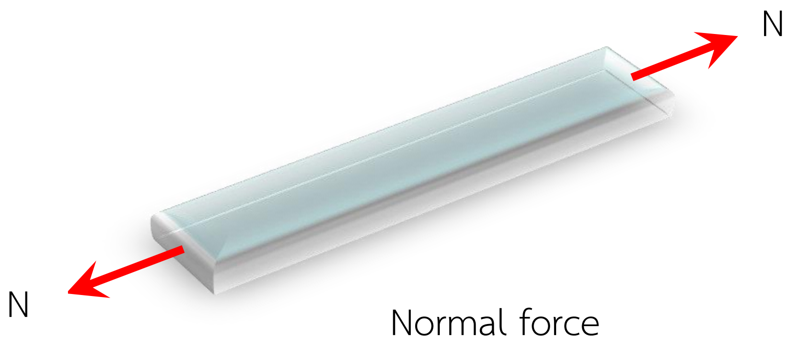
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$$
$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_B = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

ซีกขวา



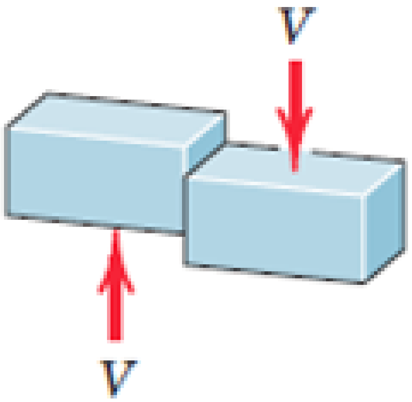
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$$
$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_B = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

ชนิดของแรงภายใน



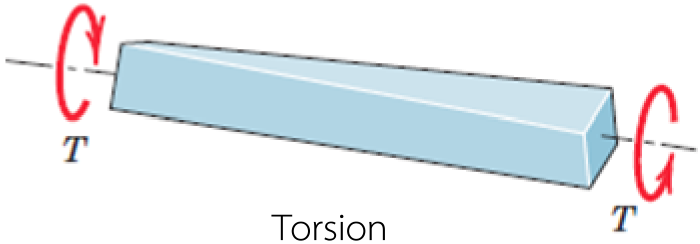
Normal force

แรงในแนวแกน

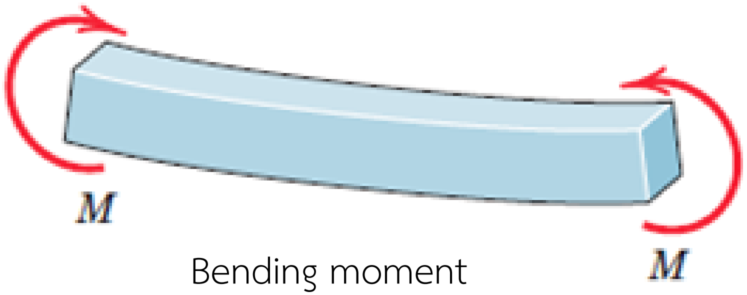


Shear force

แรงเฉือน



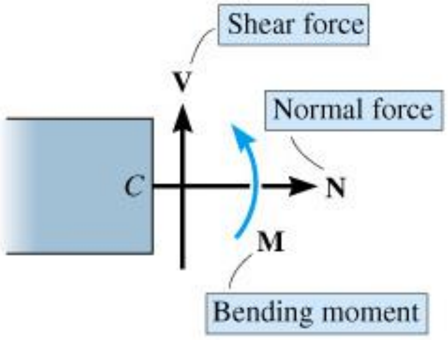
Torsion



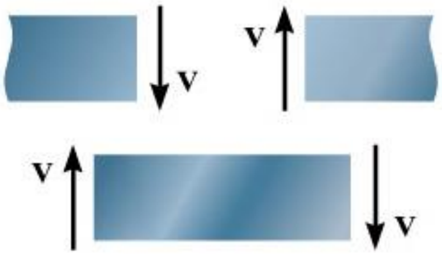
Bending moment

โมเมนต์ดัด

แรงภายในที่เป็น**บวก**



Positive Normal force

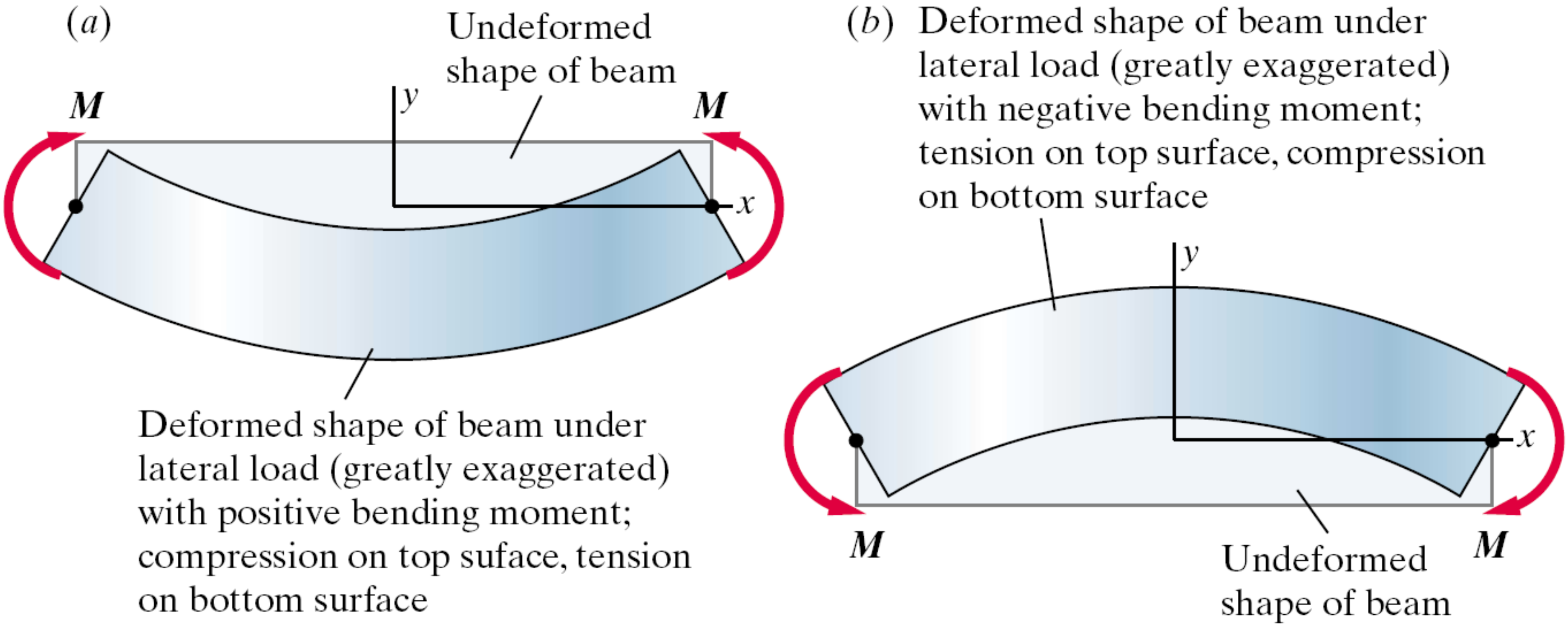


Positive shear

Positive moment

- **แรงในแนวแกนของวัตถุ**
  - เป็นบวกเมื่อเป็นแรงดึง (พยายามทำให้วัตถุยืดตัว)
- **แรงเฉือน**
  - เป็นบวกเมื่อพยายามทำให้วัตถุหมุนตามเข็มนาฬิกา
- **โมเมนต์ดัด**
  - เป็นบวกเมื่อพยายามทำให้วัตถุงอเป็นรูปโค้งหงาย

โมเมนต์ดัดซึ่งเป็น**บวก**

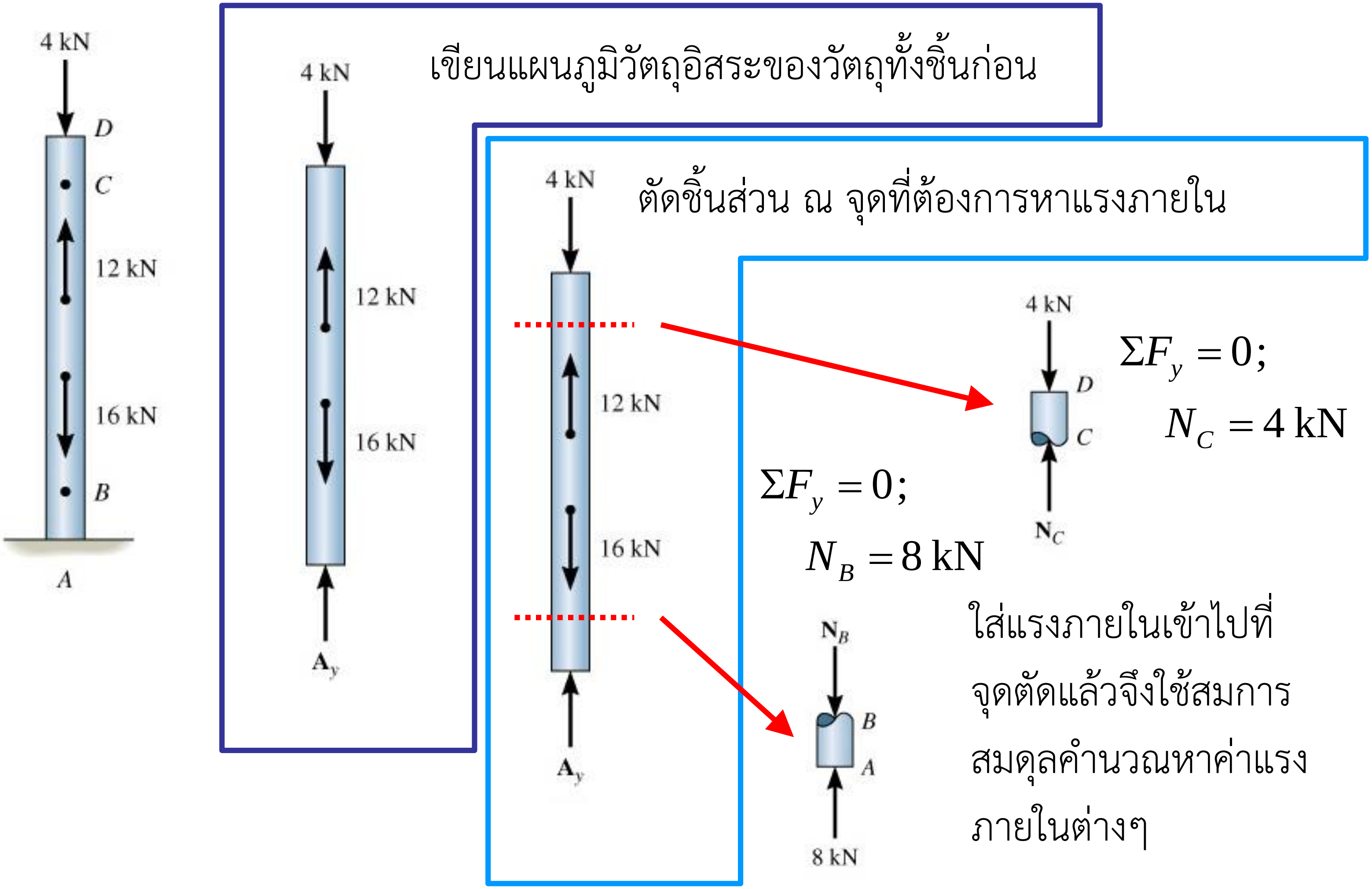


โมเมนต์ดัดซึ่งเป็น**ลบ**

การวิเคราะห์หาแรงภายในชิ้นส่วน

- เขียนแผนภูมิวัตถุอิสระของทั้งชิ้นส่วนก่อน โดยแสดงแรงที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ
- ใช้หลักของสมดุลคำนวณหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ
- ที่จุดที่ต้องการวิเคราะห์หาแรงภายใน ให้ตัดวัตถุที่กำลังพิจารณาออกเป็น 2 ส่วน
- เนื่องจากวัตถุเดิมก่อนการตัดอยู่ในสมดุล ชิ้นส่วนที่ตัดออกมาก็ต้องอยู่ในสมดุล โดยมีแรงภายในชนิดต่างๆกระทำให้วัตถุอยู่ในสมดุลได้

Ex. 6.1 Determine the internal force at point B and C.



เขียนแผนภูมิวัตถุอิสระของวัตถุทั้งชิ้นก่อน

ตัดชิ้นส่วน ณ จุดที่ต้องการหาแรงภายใน

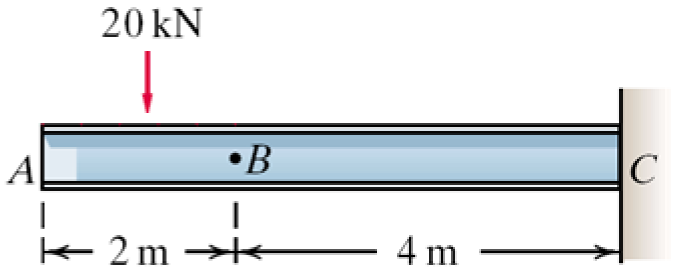
$$\Sigma F_y = 0;$$
$$N_C = 4\ \text{kN}$$

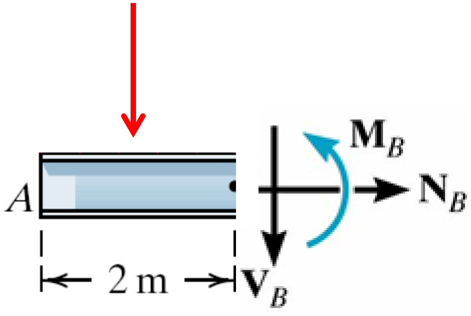
$$\Sigma F_y = 0;$$
$$N_B = 8\ \text{kN}$$

ใส่แรงภายในเข้าไปที่จุดตัดแล้วจึงใช้สมการสมดุลคำนวณหาค่าแรงภายในต่างๆ

Ex. 6.2

Determine the internal normal force, shear force, and moment at point B.





1. ตัดชิ้นส่วนที่จุด B

$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0; \quad V + 20\text{ kN} = 0$

$$V = -20\text{ kN}$$

$\xrightarrow{+} \ \Sigma F_x = 0; \quad N + 0 = 0$

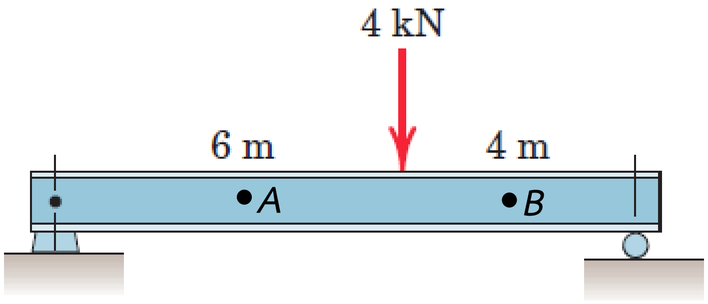
$$N = 0\text{ kN}$$

$\circlearrowleft + \ \Sigma M = 0; \quad M + 20\text{kN}(1\text{ m}) = 0$

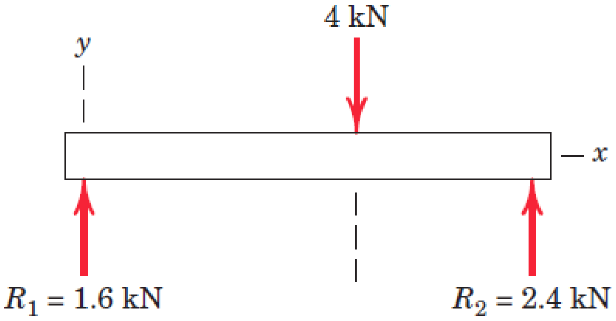
$$M = -20\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ex. 6.3

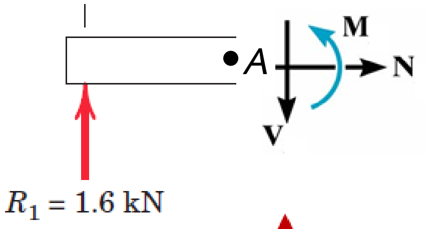
Determine the internal normal force, shear force, and moment at point A, B.



1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ



2. ตัดชิ้นส่วนที่จุด A



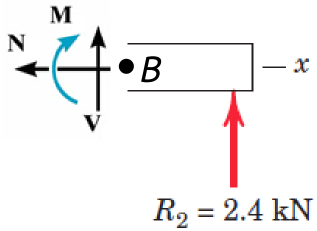
$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0; \quad 1.6 - V_A = 0$

$V_A = 1.6 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \quad \Sigma M = 0; \quad -1.6kN(3m) + M_A = 0$

$M_A = 4.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

3. ตัดชิ้นส่วนที่จุด B



$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0; \quad V_B + 2.4 \text{ kN} = 0$

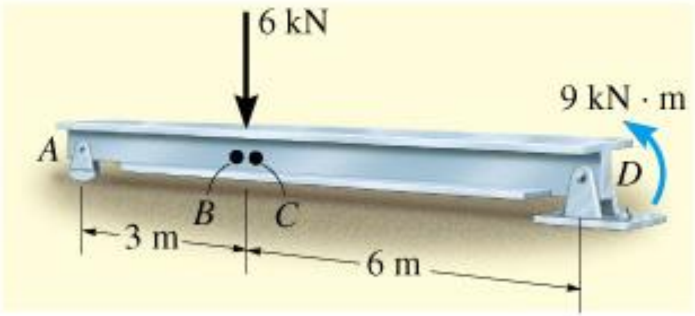
$V_C = -2.4 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \quad \Sigma M = 0; \quad -M_B + 2.4 \text{ kN } (2 \text{ m}) = 0$

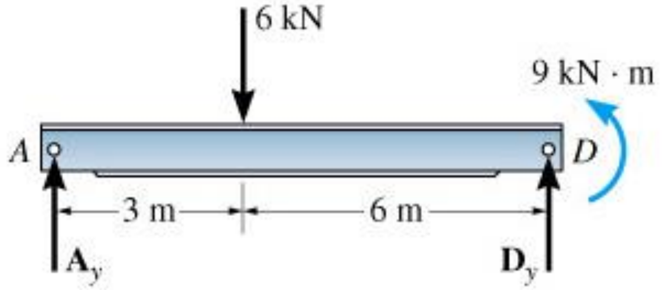
$M_B = 4.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Ex. 6.4

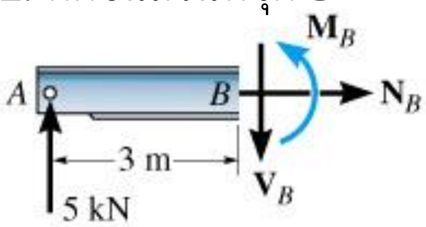
The beam supports the loading. Determine the internal normal force, shear force and bending moment acting to the left, point B and just to the right, point C of the 6kN force.



1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ



2. ตัดชิ้นส่วนที่จุด B



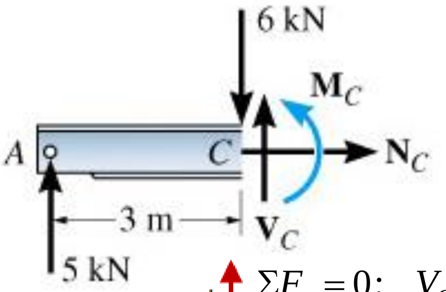
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_B - 5\,\text{kN} = 0$$

$$V_B = 5\,\text{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad M_B - 5\,\text{kN}(3\,\text{m}) = 0$$

$$M_B = 15\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

3. ตัดชิ้นส่วนที่จุด C



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C + 5\,\text{kN} - 6\,\text{kN} = 0$$

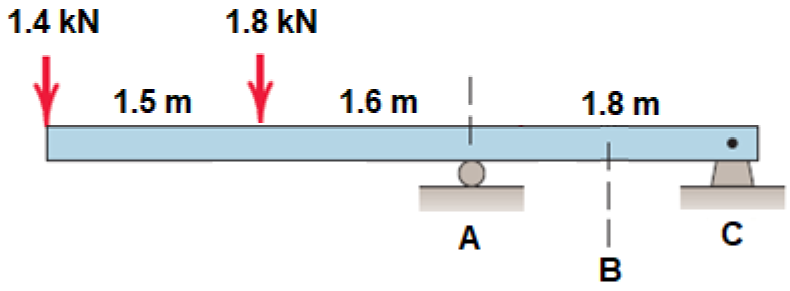
$$V_C = 1\,\text{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad M_C - 5\,\text{kN}(3\,\text{m}) = 0$$

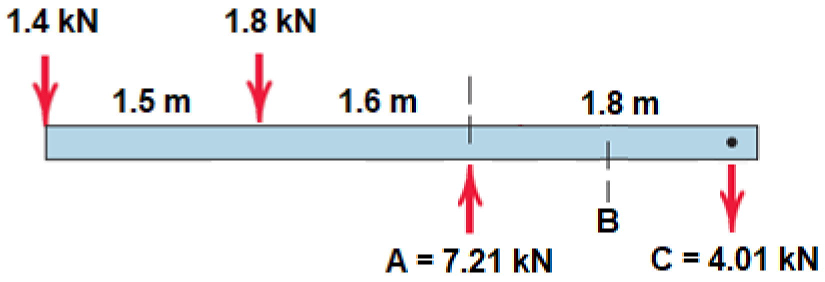
$$M_C = 15\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Quiz

Determine the shear force at a section B between A and C and the moment M at the support A.

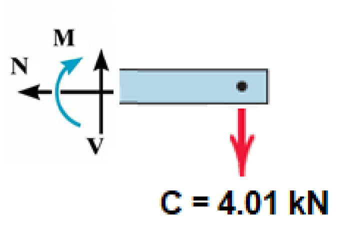


1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ



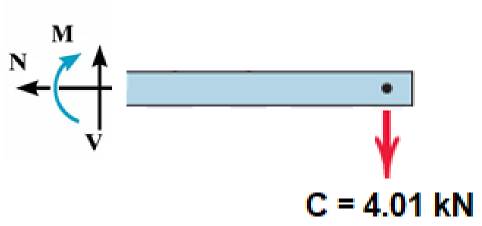
2. หาแรงเฉือนที่ B

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_B - 4.01\ kN = 0$$
$$V_B = 4.01 \text{ kN}$$

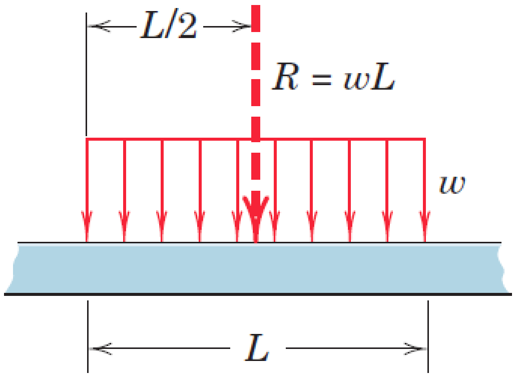


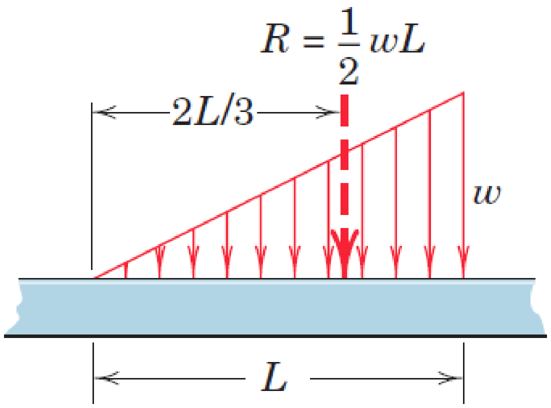
3. หาโมเมนต์ที่ A

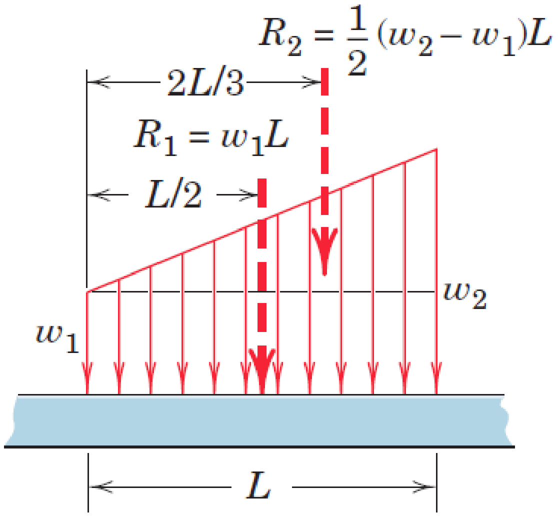
$$\circlearrowleft + \ \Sigma M = 0; \quad -M_A - 4.01kN\ (1.8 \text{ m}) = 0$$
$$M_A = -7.22 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

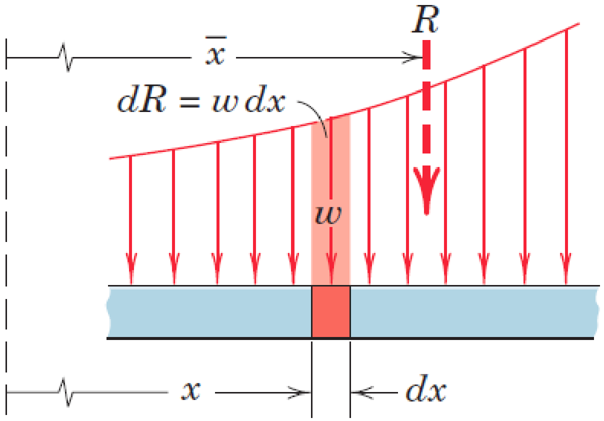


Distributed Loads

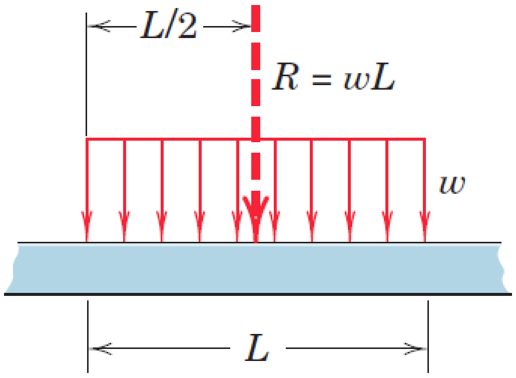


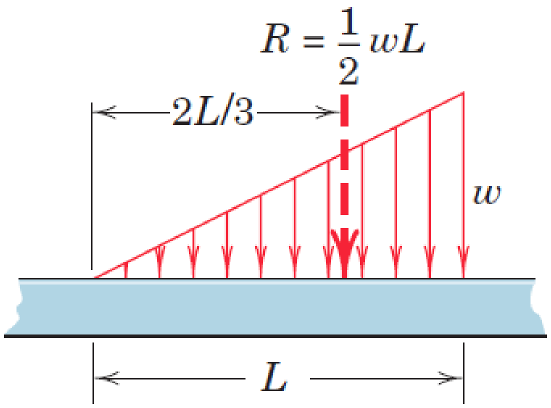




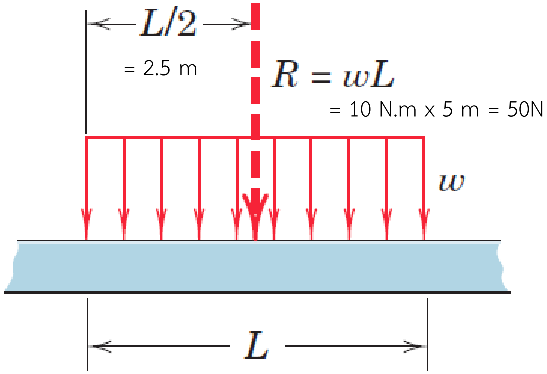


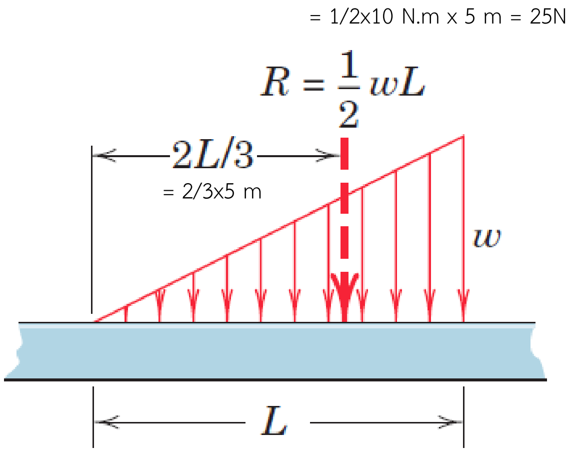
Ex. Distributed Loads



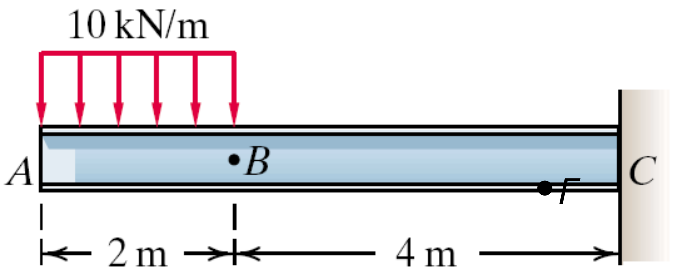


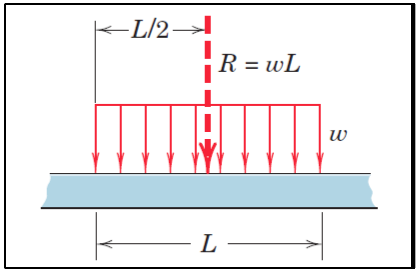
If w = 10 N/m, L = 5m

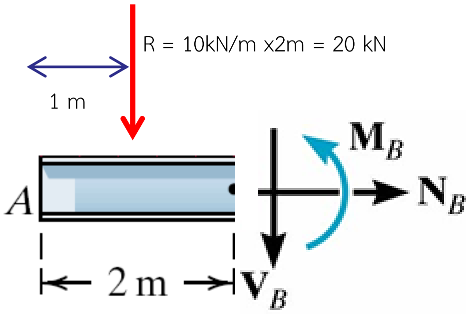




Ex. 6.5 Determine the internal normal force, shear force, and moment at point B and F.



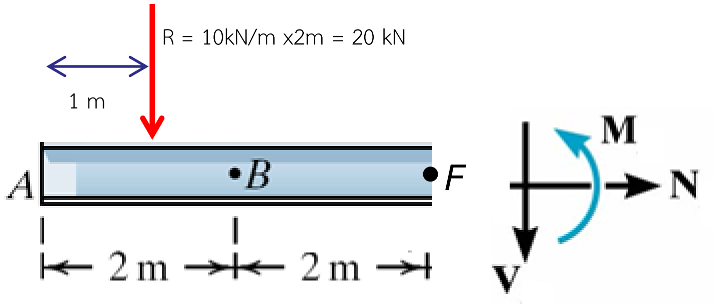




1. ตัดชิ้นส่วนที่จุด B

$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0; \quad V + 20 \text{ kN} = 0\,;\; V = -20 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \quad \Sigma M = 0; \quad M + 20\text{kN}(1 \text{ m}) = 0;\; M = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$



2. ตัดชิ้นส่วนที่จุด F

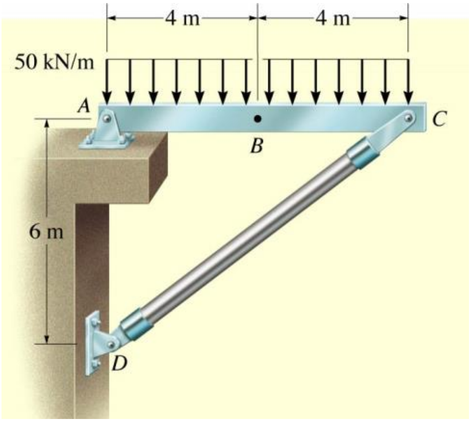
$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0; \quad V + 20 \text{ kN} = 0;\; V = -20 \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \quad \Sigma M = 0; \quad M + 20\text{kN}(3 \text{ m}) = 0$

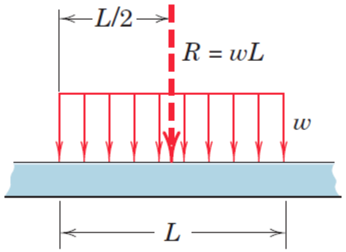
$M = -60 \text{ kN} \cdot \text{m}$

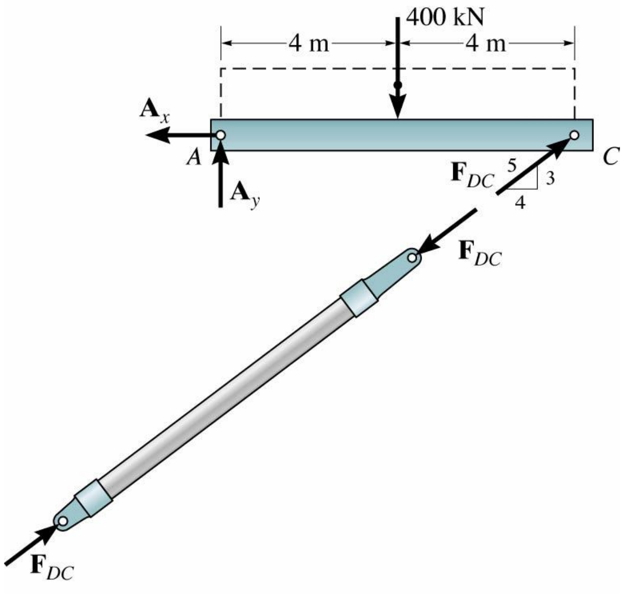
Ex. 6.6

Determine the internal force, shear force and the bending moment acting at point B of the two-member frame.



R = 50kN/m x8m = 400 kN





1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ

$$\Sigma M_A = 0; \quad -400 \text{ kN}(4 \text{ m}) + \frac{3}{5} F_{DC}(8 \text{ m}) = 0$$

$$F_{DC} = 333.3 \text{ kN}$$

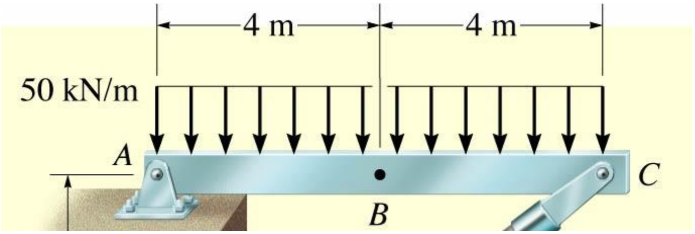
$$\Sigma F_x = 0; \quad \frac{4}{5} F_{DC} - A_x = 0$$

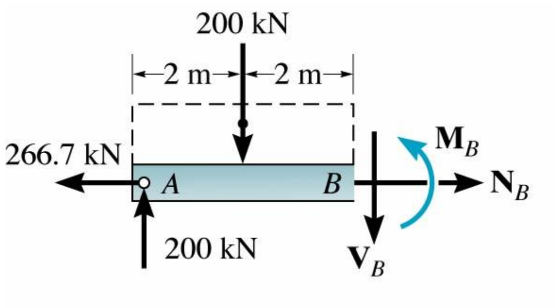
$$A_x = 266.7 \text{ kN}$$

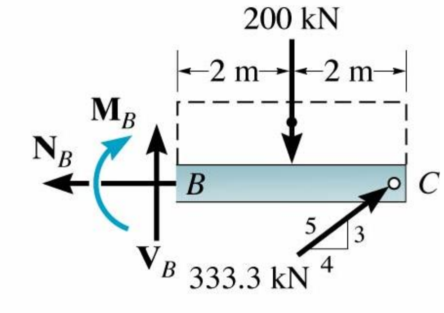
$$\Sigma F_y = 0; \quad A_y - 400 \text{ kN} + \frac{3}{5} F_{DC} = 0$$

$$A_y = 200 \text{ kN}$$

Ex. 6.6 (ต่อ)







2. ตัดชิ้นส่วนที่จุด B

ชิ้นส่วน AB

$\Sigma M_B = 0;$

$M_B + 200\text{kN}(2\text{m}) - 200\text{kN}(4\text{m}) = 0$

$M_B = 400 \text{ kN}$

$\Sigma F_x = 0;$

$N_B - 266.7 \text{ kN} = 0$

$N_B = 266.7 \text{ kN}$

$\Sigma F_y = 0;$

$-V_B + 200 \text{ kN} - 200 \text{ kN} = 0$

$V_B = 0 \text{ kN}$

ชิ้นส่วน BC

$\Sigma M = 0;$

$-M_B - 200\text{kN}(2\text{m}) + 333.3\text{kN}(3/5)(4\text{m}) = 0$

$M_B = 400 \text{ kN}$

$\Sigma F_x = 0;$

$-N_B + 333.3 \text{ kN}(4/5) = 0$

$N_B = 266.7 \text{ kN}$

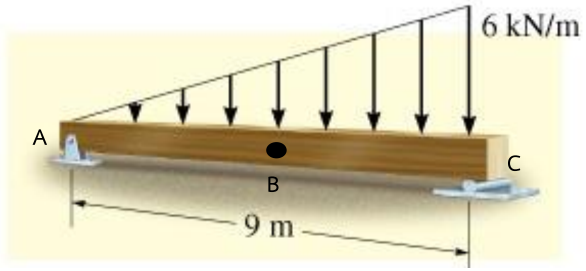
$\Sigma F_y = 0;$

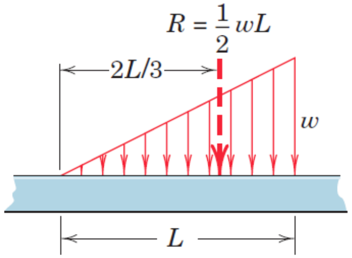
$V_B - 200 \text{ kN} + 333.3\text{kN}(3/5) = 0$

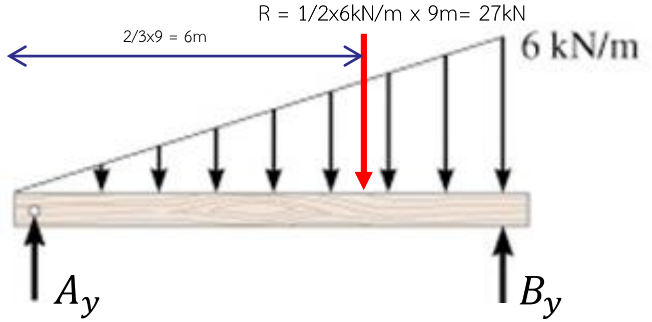
$V_B = 0 \text{ kN}$

Ex. 6.7

Determine the internal force, shear force and the bending moment acting at point B.





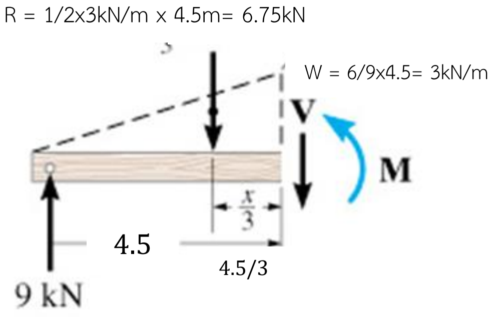


1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad -A_y(9\text{m}) + 27\text{kN}(3\text{m}) = 0$$

$$A_y = 9\ \text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad B_y = 18\ \text{kN}$$



2. ตัดชิ้นส่วนที่จุด B

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad -9kN(4.5\text{m}) + 6.75\text{kN}\left(\frac{4.5}{3}\text{m}\right) + M = 0$$

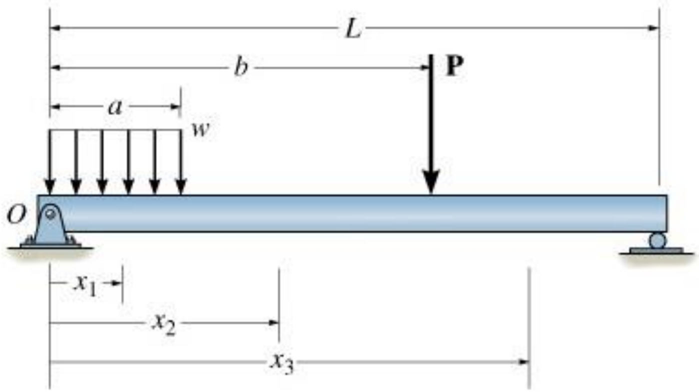
$$M = 30.375\ \text{kN.m}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 9kN - 6.75kN - V = 0$$

$$V = 2.25\ \text{kN}$$

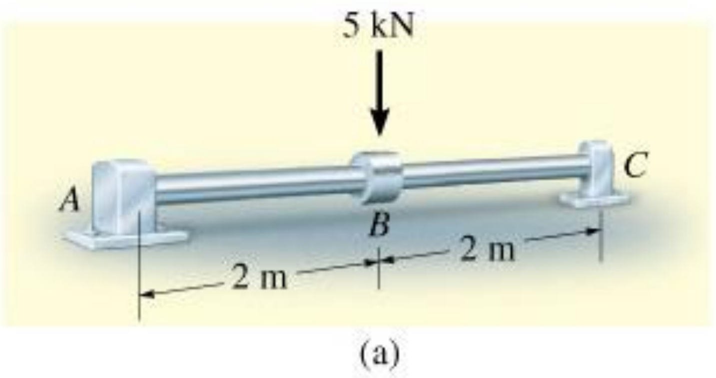
แผนภูมิของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

- ต้องการแสดงแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในทุกตำแหน่งของคาน
- เขียนแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดให้อยู่ในรูปฟังก์ชั่นของระยะ x ใดๆบนคาน
- เมื่อเกิดความไม่ต่อเนื่องของแรงภายนอก ต้องแบ่งคานออกเป็นช่วงๆ
- ใช้หลักของรูปตัดและสมดุล วิเคราะห์หาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสำหรับคานแต่ละช่วง



Ex. 6.8

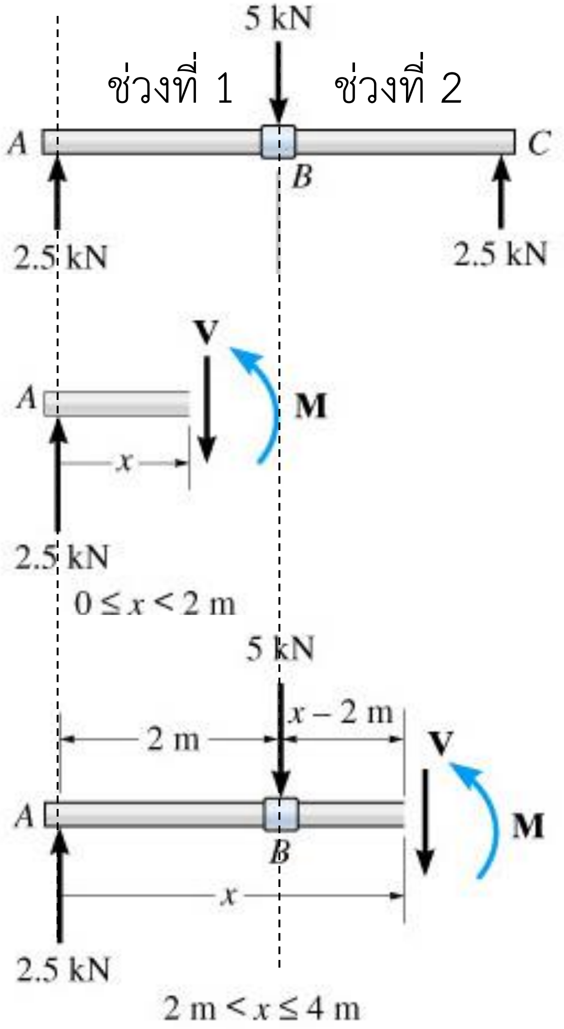
Draw the shear and bending moments diagrams for the shaft. The support at A is a thrust bearing and the support at C is a journal bearing.



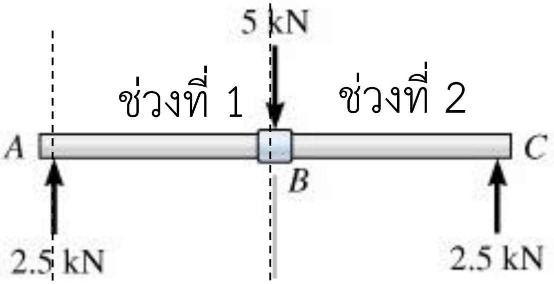
(a)

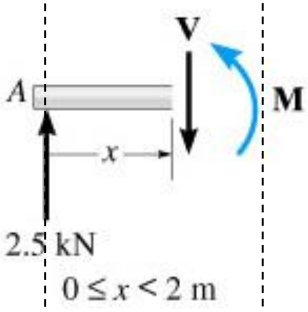
1. หาแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ

2. มีความไม่ต่อเนื่องของแรงภายนอก 1 แห่ง ฉะนั้น จะต้องแบ่งคานออกเป็น 2 ช่วง



Ex. 6.8 (ต่อ)





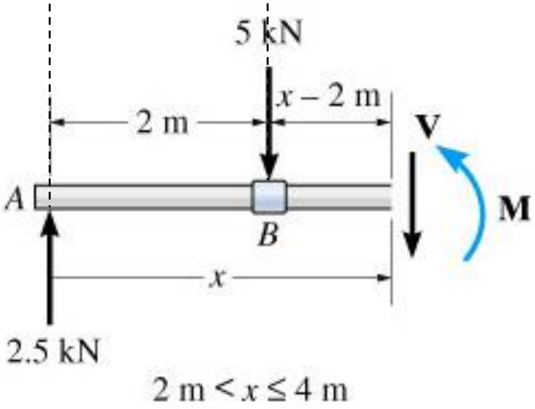
ช่วงที่ 1

$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0; \quad 2.5\ \text{kN} - V = 0$

$$V = 2.5\ \text{kN}$$

$\circlearrowleft + \quad \Sigma M = 0; \quad -2.5\ \text{kN}(x\ \text{m}) + M = 0$

$$M = 2.5x\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



ช่วงที่ 2

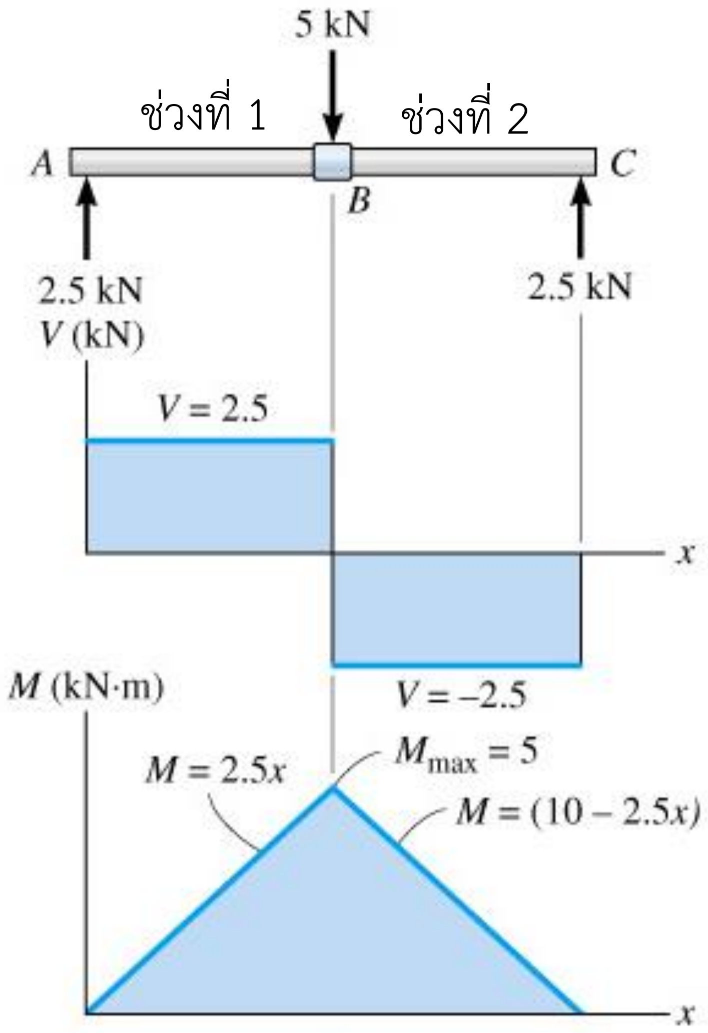
$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0; \quad 2.5\ \text{kN} - 5\ \text{kN} - V = 0$

$$V = -2.5\ \text{kN}$$

$\circlearrowleft + \quad \Sigma M = 0; \quad -2.5\ \text{kN}(x\ \text{m}) + 5\ \text{kN}(x - 2\ \text{m}) + M = 0$

$$M = 10 - 2.5x\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Ex. 6.8 (ต่อ)



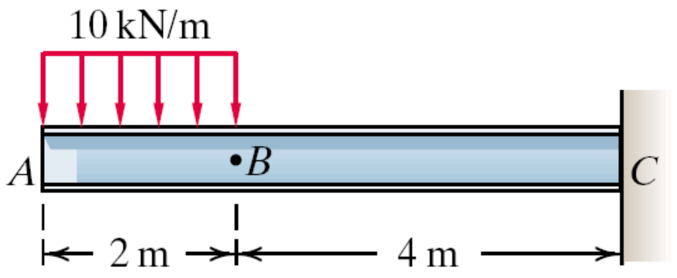
- เขียนแผนภูมิของแรงเฉือนและแผนภูมิของโมเมนต์ดัดโดยใช้สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ที่วิเคราะห์ได้ในแต่ละช่วงของคาน

แผนภูมิของแรงเฉือน (Shear Force Diagram)

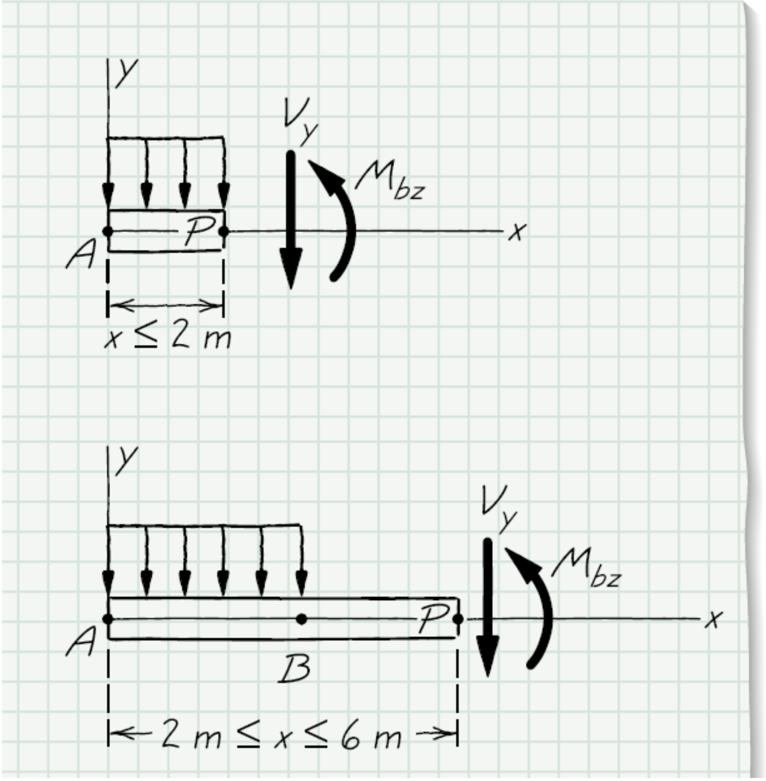
แผนภูมิของโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram)

x (m)	0	1	2	3	4
M (kN.m)	0	2.5	5	2.5	0

Ex. 6.9 จงเขียนแผนภูมิของแรงเฉือน (Shear Force Diagram) และแผนภูมิของโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram) ของคานในรูป



มีความไม่ต่อเนื่องของแรงภายนอก 1 จุด ฉะนั้น จะต้องแบ่งคานออกเป็น 2 ช่วง



<u>ช่วงที่ 1</u>

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -10x \text{ kN} - V = 0$

$V = -10x \text{ kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad 10x \text{ kN}\left(\frac{1}{2}x \text{ m}\right) + M = 0$

$M = (-5x^2) \text{ kN} \cdot \text{m}$

<u>ช่วงที่ 2</u>

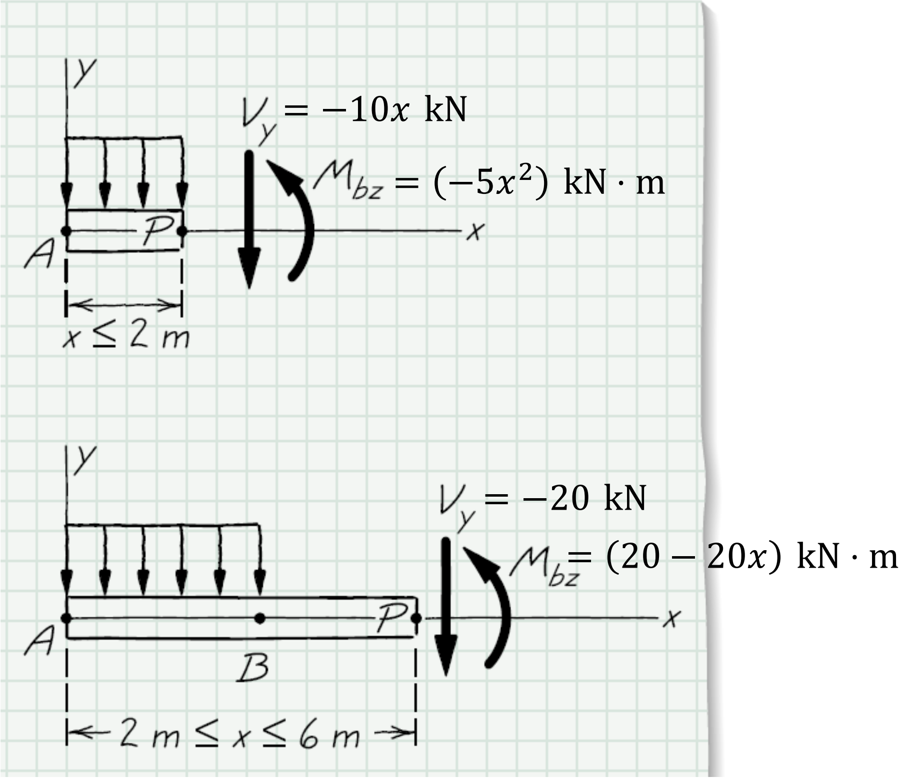
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -10(2) \text{ kN} - V = 0$

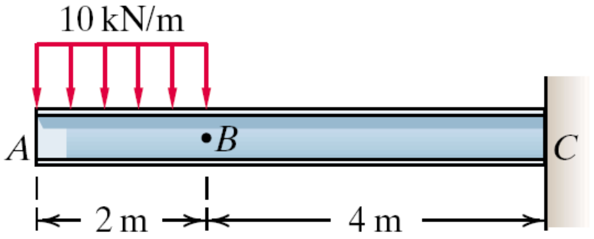
$V = -20 \text{ kN}$

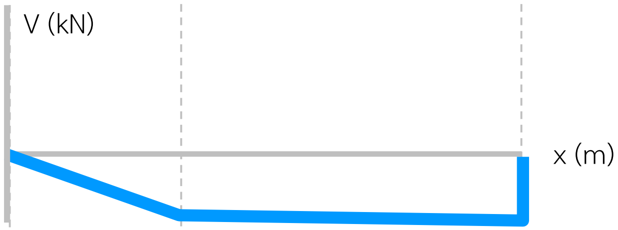
$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad 10(2) \text{ kN}(x - 1 \text{ m}) + M = 0$

$M = (20 - 20x) \text{ kN} \cdot \text{m}$

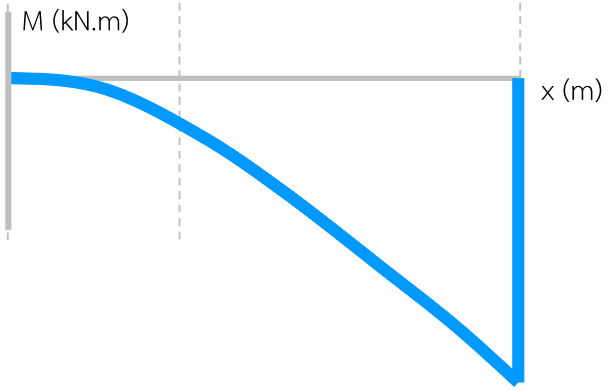
Ex. 6.9 (ต่อ)





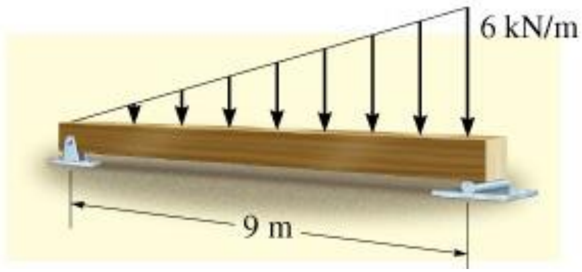


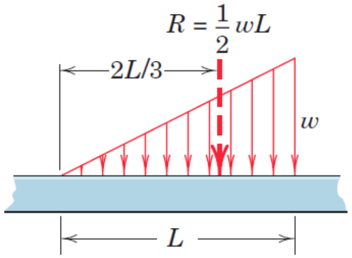
x	0	1	2	3	4	5	6
V	0	-10	-20	-20	-20	-20	-20
M	0	-5	-20	-40	-60	-80	-100

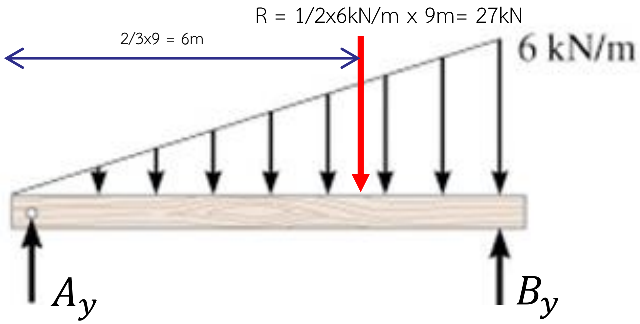


Ex. 6.9

จงเขียนแผนภูมิของแรงเฉือน (Shear Force Diagram) และแผนภูมิของโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram) ของคานในรูป





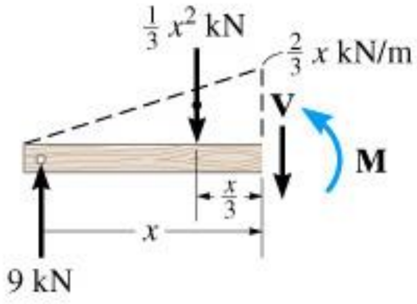


1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ

$$+\Sigma M = 0; \quad -A_y(9\text{m}) + 27\text{kN}(3\text{m}) = 0$$

$$A_y = 9 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad B_y = 18 \text{ kN}$$



2. วิเคราะห์หาแรงที่ระยะ x ใดๆจากปลายคาน

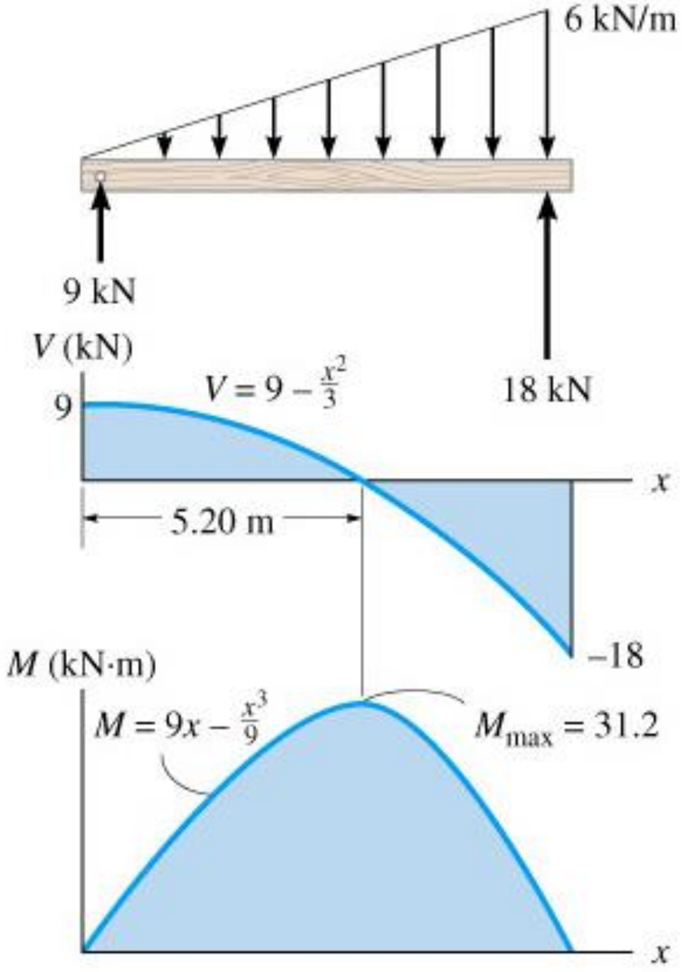
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + \frac{1}{3}x^2 \text{ kN} - 9 \text{ kN} = 0$$

$$V = 9 - \frac{1}{3}x^2 \text{ kN}$$

$$+\Sigma M = 0; \; M + \frac{1}{3}x^2 \text{ kN}\left(\frac{1}{3}x \text{ m}\right) - 9 \text{ kN}(x \text{ m}) = 0$$

$$M = \left(9x + \frac{1}{9}x^3\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ex. 6.9 (ต่อ)



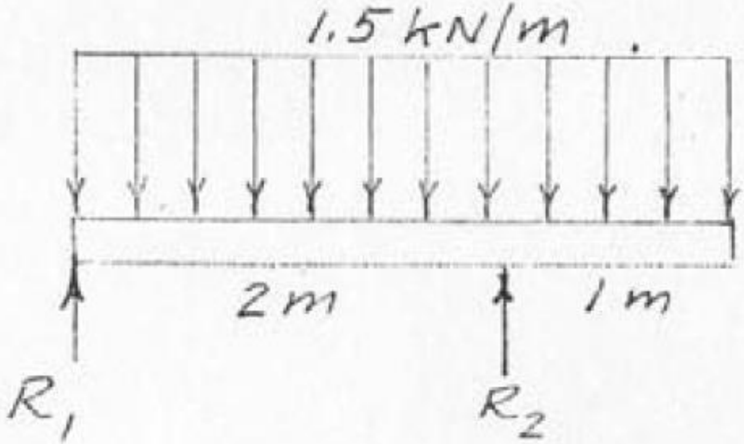
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V	9	9	8	6	4	1	-3	-7	-12	-18
M	0	9	17	24	29	31	30	25	15	0

- เขียนแผนภูมิของแรงเฉือนและแผนภูมิของโมเมนต์ดัดโดยใช้สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ที่วิเคราะห์ได้
- ตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดสามารถหาได้โดย

$$\frac{dM}{dx} = 9 - \frac{x^2}{3} = 0$$

$$x = 5.20\ \text{m}$$

$$M_{max} = 31.2\ \text{kN} \cdot \text{m}$$



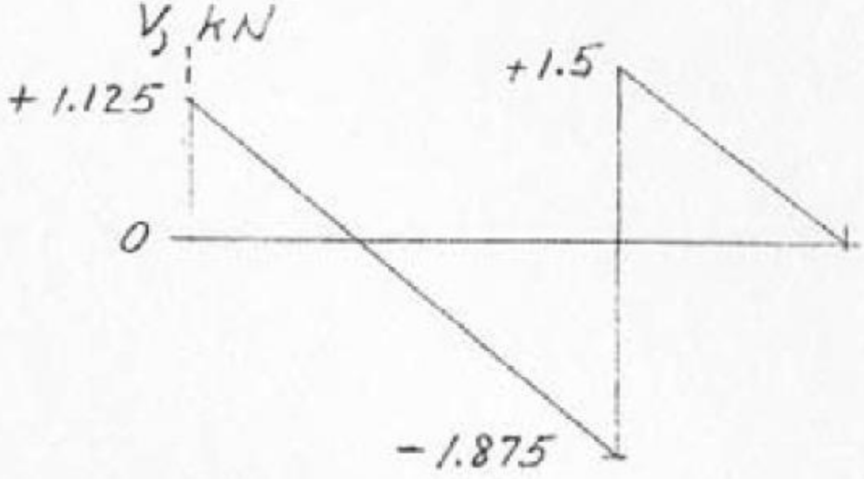
$\Sigma M_{R_1} = 0;$

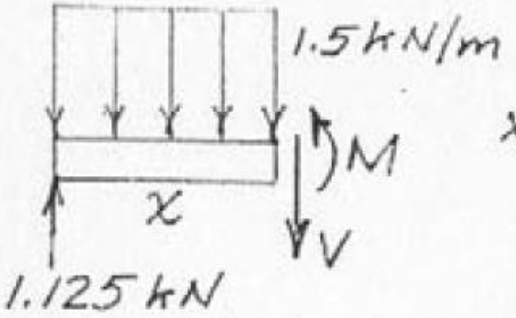
$1.5(3)(1.5) - 2R_2 = 0$

$R_2 = 3.375\ kN$

$\Sigma F = 0;\ R_1 + 3.375 - 1.5(3) = 0$

$R_1 = 1.125\ kN$





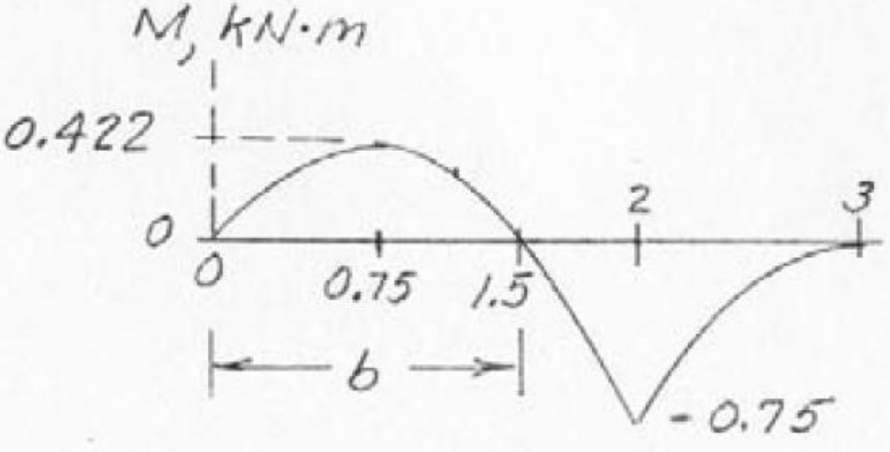
$x < 2m$

$\Sigma F = 0;\ V + 1.5x - 1.125 = 0$

$V = 1.125 - 1.5x$

$\Sigma M_V = 0;\ M + 1.5\dfrac{x^2}{2} - 1.125x = 0$

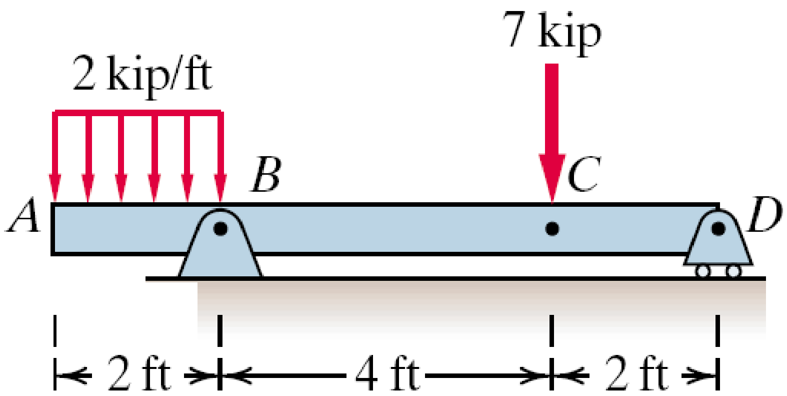
$M = 1.125x - 0.75x^2$

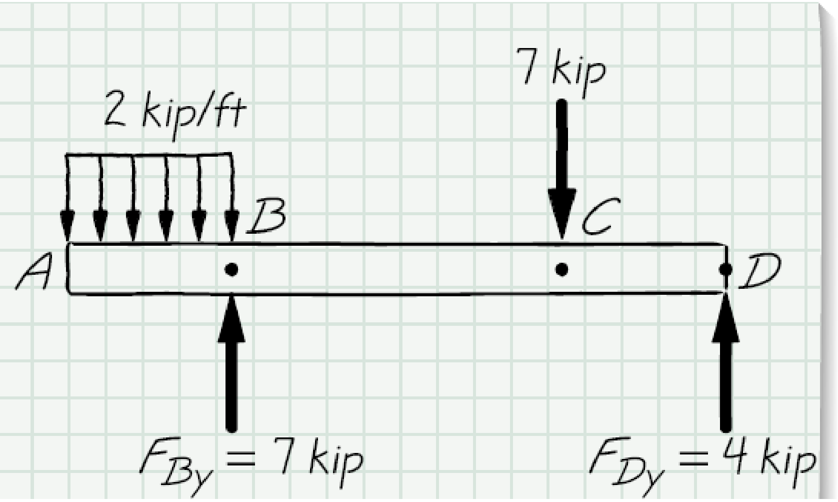


$\underline{b = 1.5\ m}$

Ex. 6.10

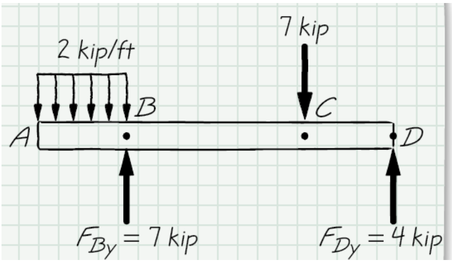
จงเขียนแผนภูมิของแรงเฉือน (Shear Force Diagram) และแผนภูมิของโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram) ของคานในรูป

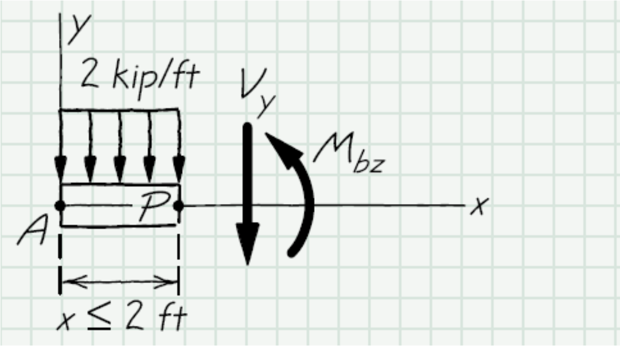




1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ
2. มีความไม่ต่อเนื่องของแรงภายนอก 2 จุด ฉะนั้นจะต้องแบ่งคานออกเป็น 3 ช่วง

Ex. 6.10 (ต่อ)

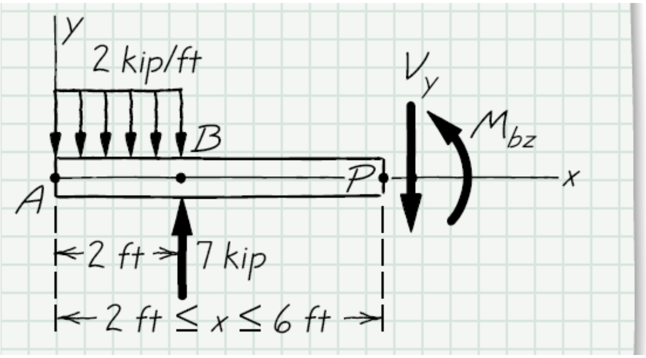




ช่วงที่ 1

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -2(x) - V = 0; \ V = -2x \text{ kips}$

$\circlearrowleft + \ \Sigma M = 0; \quad 2(x)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0; \ M = -x^2 \text{ kips} \cdot \text{ft}$

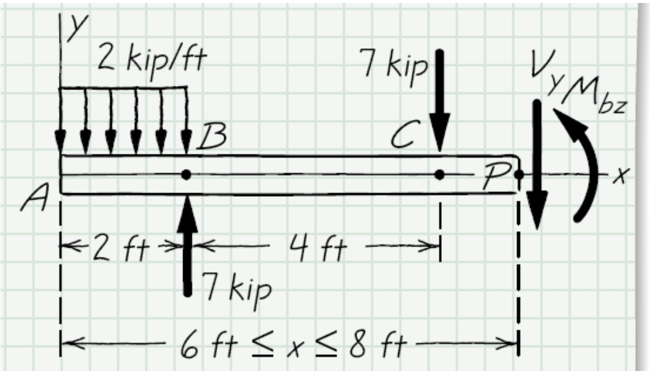


ช่วงที่ 2

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -2(2) + 7 - V = 0; \ V = 3 \text{ kips}$

$\circlearrowleft + \ \Sigma M = 0; \quad 2(2)(x-1) - 7(x-2) + M = 0$

$M = (3x - 10) \text{ kips} \cdot \text{ft}$



ช่วงที่ 3

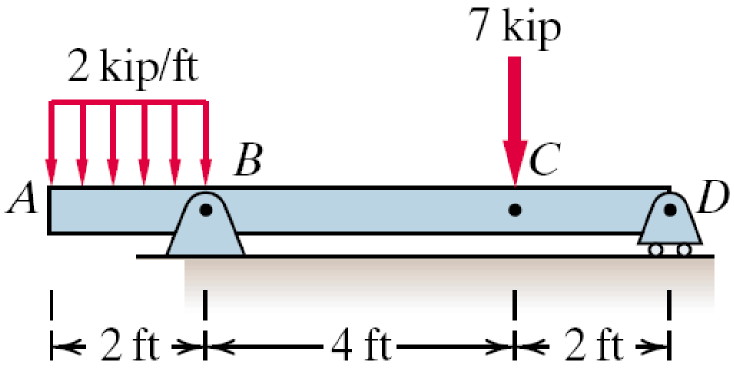
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -2(2) + 7 - 7 - V = 0$

$V = -4 \text{ kips}$

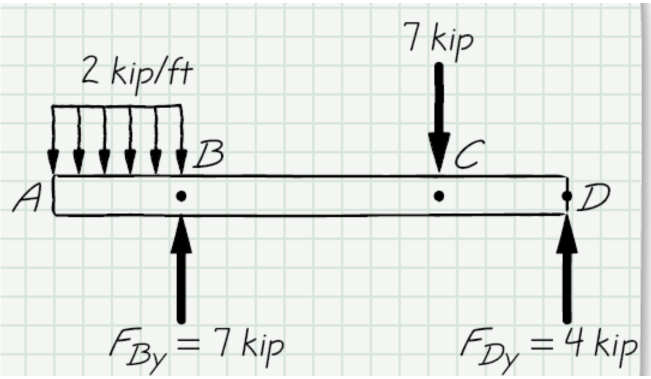
$\circlearrowleft + \ \Sigma M = 0; \quad 2(2)(x-1) - 7(x-2) + 7(x-6) + M = 0$

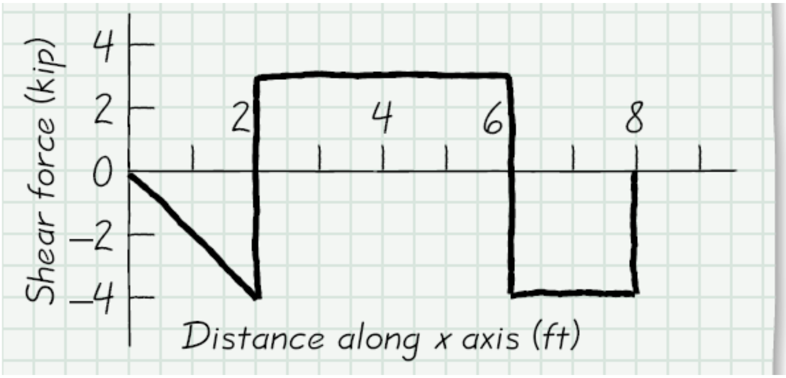
$M = (-4x + 32) \text{ kips} \cdot \text{ft}$

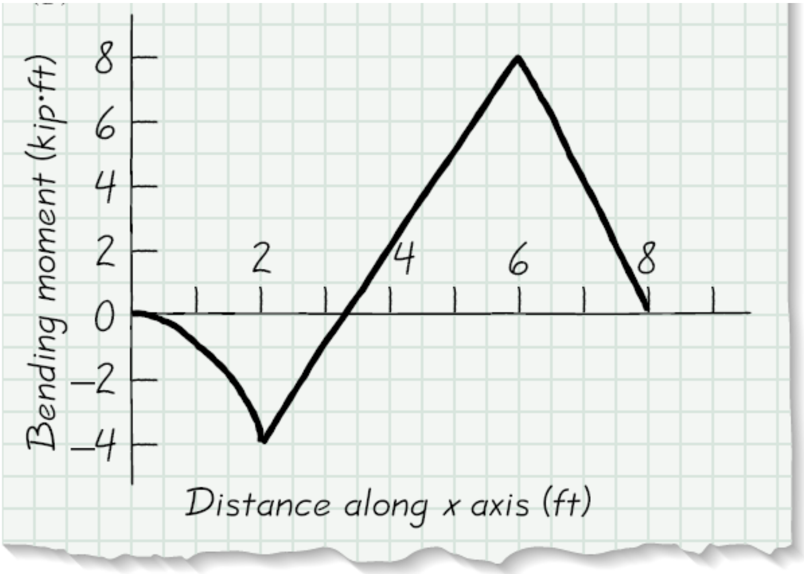
Ex. 6.10 (ต่อ)



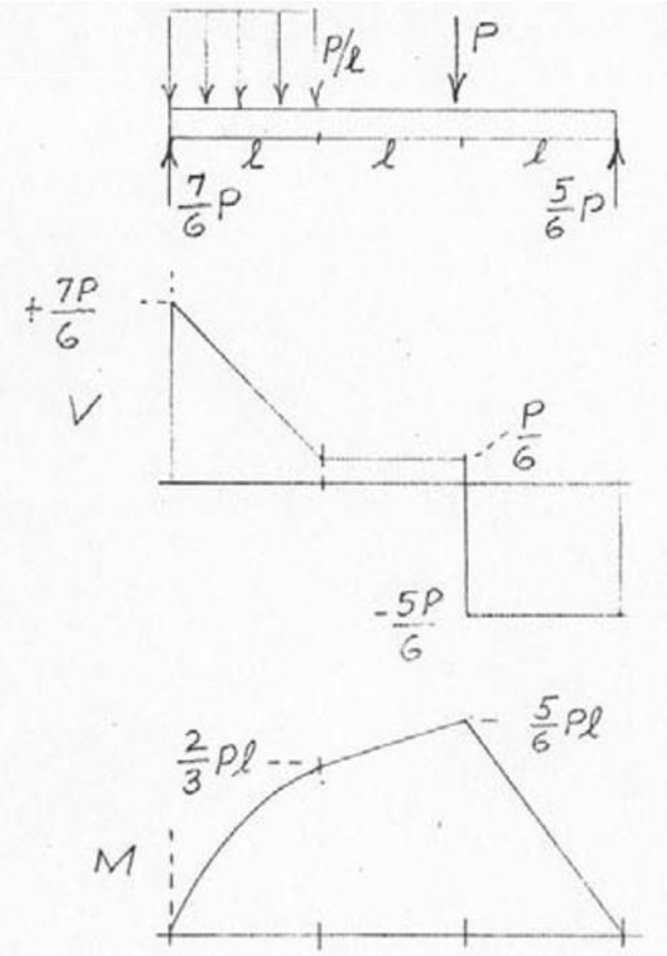
x (ft)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v (kips)	0	-2	-4	3	3	3	3	-4	-4
M(kips.ft)	0	-1	-4	-1	2	5	8	4	0

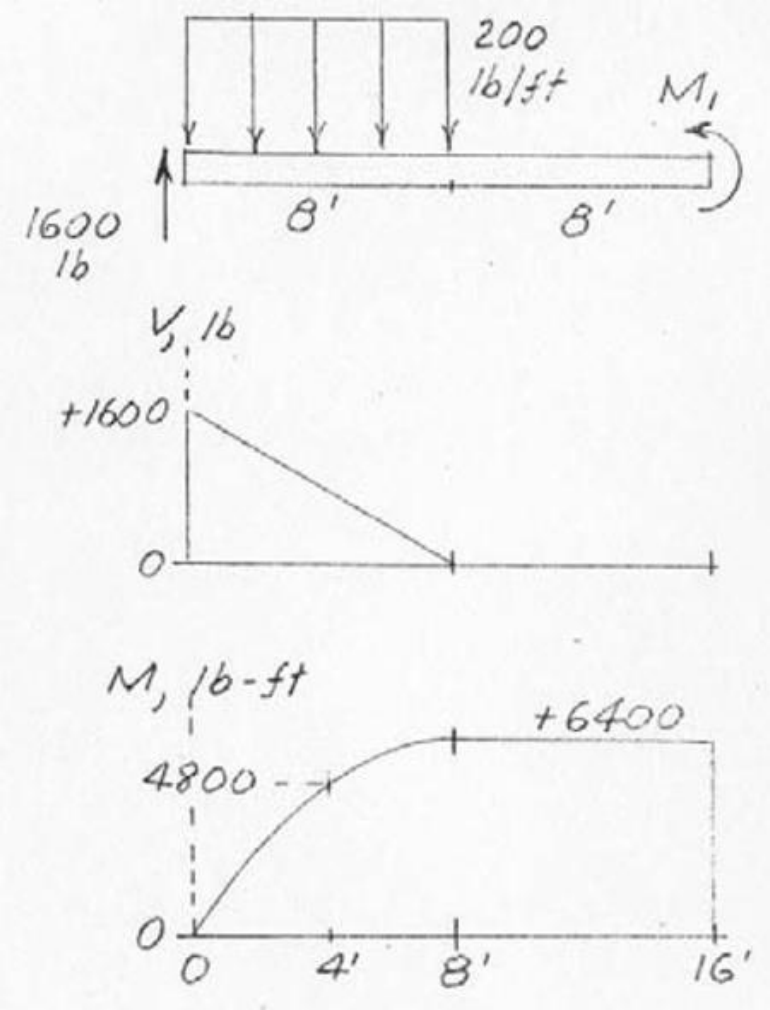






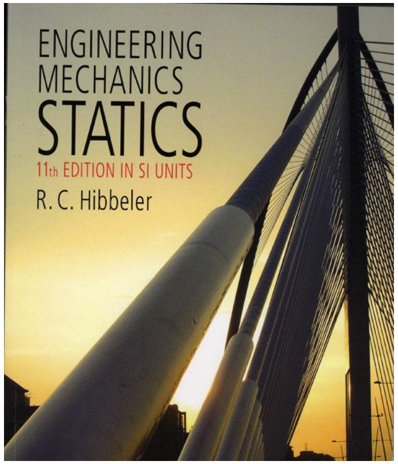
Ex.


P/ℓ
P
ℓ
ℓ
ℓ
7/6 P
5/6 P
+7P/6
V
P/6
-5P/6
2/3 Pℓ
5/6 Pℓ
M

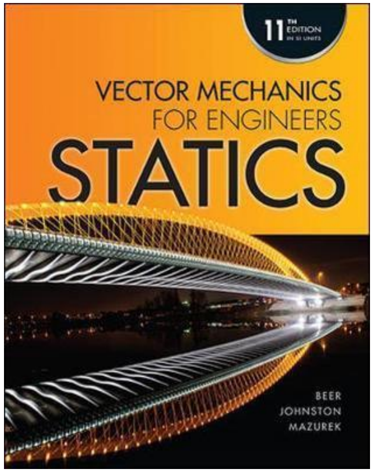

200 lb/ft
M1
1600 lb
8'
8'
V, lb
+1600
0
M, lb-ft
+6400
4800
0
0
4'
8'
16'

อ้างอิง:

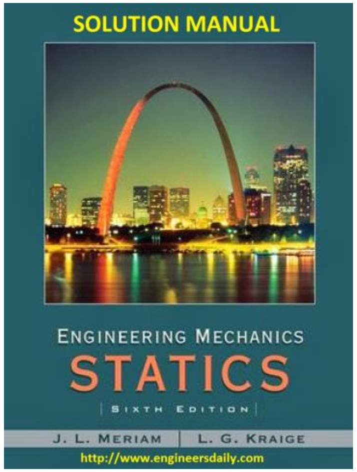
- กลศาสตร์วิศวกรรม โดย รศ. ยิ่งศักดิ์ พรรณเชษฐ์
- เอกสารประกอบการสอน 171100 Statics โดย อ.ดร.ณัฐพงษ์ อารีมิตร
- เอกสารประกอบการสอน 171100 Statics โดย อ.ดร.ธเนศ เสถียรนาม



R.C. Hibbeler



P. Beer



J.L. Meriam