บทที่ 8

ผลตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรอันดับสอง

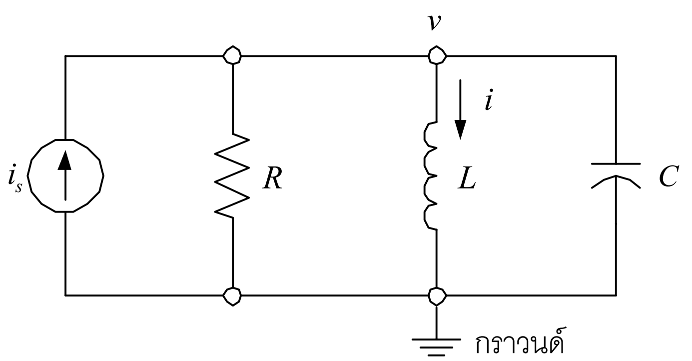
The Complete Response of a Second-Order Circuit

ในบทที่แล้วได้ศึกษาการหาผลตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรที่ประกอบด้วยตัวต้านทานและตัวเก็บประจุหรือตัวเหนี่ยวนำเพียงหนึ่งตัวเรียกว่าวงจรอันดับหนึ่ง ในบทนี้จะได้กล่าวถึงผลตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรที่ประกอบด้วยตัวต้านทานและอุปกรณ์เก็บพลังงานสองตัวคืออาจเป็นตัวเก็บประจุสองตัวหรือตัวเหนี่ยวนำสองตัวหรือตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำอย่างละตัว เรียกว่าวงจรอันดับสอง (Second-Order Circuit) เนื่องจากสมการที่ใช้อธิบายวงจรเหล่านี้จะเป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง สำหรับกรณีที่วงจรมีเฉพาะองค์ประกอบเชิงเส้น โดยจะได้กล่าวถึงวิธีการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสอง จากวงจรอันดับสอง และการหาคำตอบ

แม้ว่าในบทนี้จะเน้นที่การวิเคราะห์วงจรอันดับสอง แต่วิธีการที่ใช้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับวงจรที่มีอุปกรณ์เก็บพลังงานมากกว่าสองตัวได้

8.1 สมการอนุพันธ์สำหรับวงจรอันดับสอง

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงวิธีการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองสำหรับวงจรที่ประกอบด้วยอุปกรณ์เก็บพลังงานที่ไม่สามารถลดรูปอีกต่อไปแล้วสองตัว คำว่าไม่สามารถลดรูปอีกต่อไปหมายถึงว่าตัวอุปกรณ์เก็บพลังงานชนิดเดียวกันหลายตัวที่ต่ออนุกรมหรือต่อขนานกันอยู่สามารถลดรูปลงได้เป็นอุปกรณ์เสมือนตัวเดียว เราจะทำการลดรูปอุปกรณ์เหล่านี้จนกระทั่งไม่สามารถลดได้อีกต่อไป



รูปที่ 8.1 วงจร RLC แบบขนานต่อกับแหล่งจ่ายกระแสอิสระ

โดยจะแสดงวิธีการเขียนสมการสองวิธีคือ วิธีตรง (Direct Method) และวิธีใช้ตัวกระทำ (Operator Method) พิจารณาวิธีแรก จากวงจรในรูปที่ 8.1 ซึ่งประกอบด้วยการต่อขนานกันของตัวต้านทาน ตัวเก็บประจุ และตัวเหนี่ยวนำ เขียนสมการโนดที่โนดบนจะได้

$$\frac{v}{R}+i+C\frac{dv}{dt}=i_s \tag{8.1}$$

เขียนสมการความสัมพันธ์กระแสและแรงดันของตัวเหนี่ยวนำ

$$v=L\frac{di}{dt} \tag{8.2}$$

แทนค่าลงในสมการ (8.1) จะได้

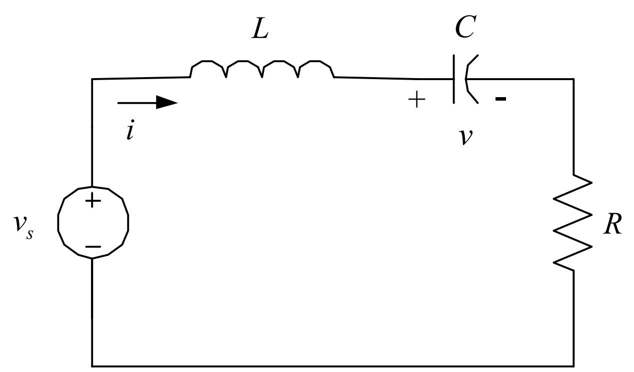
$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i+C\frac{d^2i}{dt^2}=i_s \tag{8.3}$$

ซึ่งคือสมการอนุพันธ์อันดับสองที่เราต้องการ แก้สมการนี้จะได้ค่ากระแส $i(t)$ และหากต้องการค่าแรงดัน $v(t)$ ก็จะหาได้โดยการใช้สมการ (8.2) วิธีการแบบนี้เรียกว่าวิธีตรง ตาราง 8.1 สรุปขั้นตอนในการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีตรง

ตาราง 8.1 ขั้นตอนในการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีตรง

ขั้นที่ 1	หาตัวแปร x_1 และ x_2 โดยที่ตัวแปรเหล่านี้คือแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ และ/หรือกระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำ
ขั้นที่ 2	เขียนสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในรูป $\frac{dx_1}{dt}=f(x_1,x_2)$
ขั้นที่ 3	เขียนสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งอีกหนึ่งสมการในรูปของตัวแปร x_2 โดยที่ $\frac{dx_2}{dt}=Kx_1$ หรือ $x_1=\frac{1}{K}\frac{dx_2}{dt}$
ขั้นที่ 4	แทนสมการจาก ขั้นที่ 3 ในสมการขั้นที่ 2 จะได้สมการอนุพันธ์อันดับสอง

ในตัวอย่างวงจรในรูปที่ 8.1 ที่ผ่านมา เราใช้ $x_1=v$ และ $x_2=i$ แต่ในตัวอย่างของวงจรในรูปที่ 8.2 ต่อไปนี้ เราจะสลับตัวแปรที่ใช้ คือใช้ $x_1=i$ และ $x_2=v$ เมื่อ i คือกระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำและ v คือแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ



รูปที่ 8.2 วงจร RLC แบบอนุกรมต่อกับแหล่งจ่ายแรงดันอิสระ

เริ่มจากการเขียนสมการสำหรับ $dx_1/dt = di/dt$ ใช้ KVL รอบวงรอบได้

$$L\frac{di}{dt} + v + Ri = v_s \tag{8.4}$$

เมื่อ v คือแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ คูณสมการ (8.4) ด้วย $1/L$ จะได้

$$\frac{di}{dt} + \frac{v}{L} + \frac{R}{L}i = \frac{v_s}{L} \tag{8.5}$$

จาก $x_2 = v$ เขียนสมการในรูป $dx_2/dt = dv/dt$

$$C\frac{dv}{dt} = i \tag{8.6}$$

หรือ

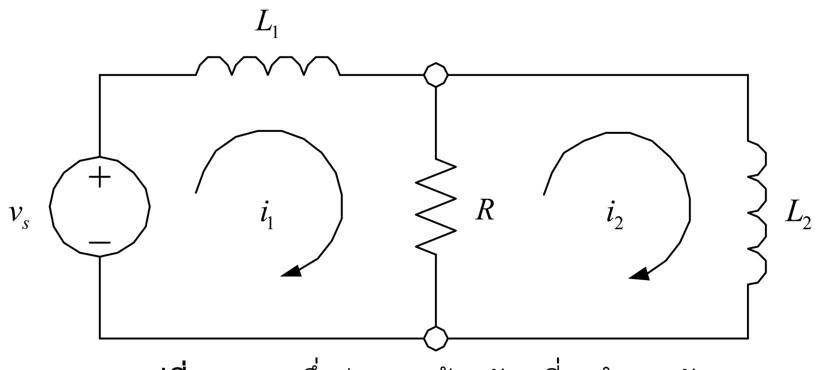
$$C\frac{dx_2}{dt} = x_1 \tag{8.7}$$

แทนสมการ (8.6) ในสมการ (8.5) จะได้สมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L} + \frac{RC}{L}\frac{dv}{dt} = \frac{v_s}{L} \tag{8.8}$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{v_s}{LC} \tag{8.9}$$



รูปที่ 8.3 วงจรซึ่งประกอบด้วยตัวเหนี่ยวนำสองตัว

อีกวิธีหนึ่งในการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองคือวิธีใช้ตัวกระทำ โดยจะเริ่มจากการเขียนสมการโนดหรือเมชและใช้ตัวกระทำดิฟเฟอเรนเทียลในการเขียนสมการอนุพันธ์ของวงจร พิจารณาวงจรในรูปที่ 8.3 ซึ่งประกอบด้วยตัวเหนี่ยวนำสองตัว เราจะใช้วิธีวิเคราะห์ในตัวอย่างนี้โดยที่สมการเมชทั้งสองคือ

$$L_1\frac{di_1}{dt} + R(i_1 - i_2) = v_s \tag{8.10}$$

และ

$$R(i_2 - i_1) + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \tag{8.11}$$

ถ้ากำหนดให้ $R = 1\,\Omega$ $L_1 = 1$ H และ $L_2 = 2$ H จะได้

$$\frac{di_1}{dt} + i_1 - i_2 = v_s \tag{8.12}$$

และ

$$-i_1 + i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{8.13}$$

ในการเขียนสมการอนุพันธ์ของวงจร จะใช้ตัวกระทำดิฟเฟอเรนเทียล $s = d/dt$ เขียนสมการอนุพันธ์ในสมการ (8.12) และ (8.13) ให้เป็นสมการพีชคณิต

$$si_1 + i_1 - i_2 = v_s$$

และ

$$-i_1 + i_2 + 2si_2 = 0$$

เรียบเรียงสมการทั้งสองใหม่

$$(s+1)i_1 - i_2 = v_s$$

และ

$$-i_1 + (2s+1)i_2 = 0$$

ใช้กฎของเครมเมอร์แก้สมการหาค่ากระแส i_2 จะได้

$$i_2 = \frac{v_s}{(s+1)(2s+1) - 1}$$

ดังนั้น

$$(2s^2 + 3s)i_2 = v_s$$

และจะได้สมการอนุพันธ์อันดับสองโดยการแทน $s = d/dt$ $s^2 = d^2/dt^2$ ดังนี้

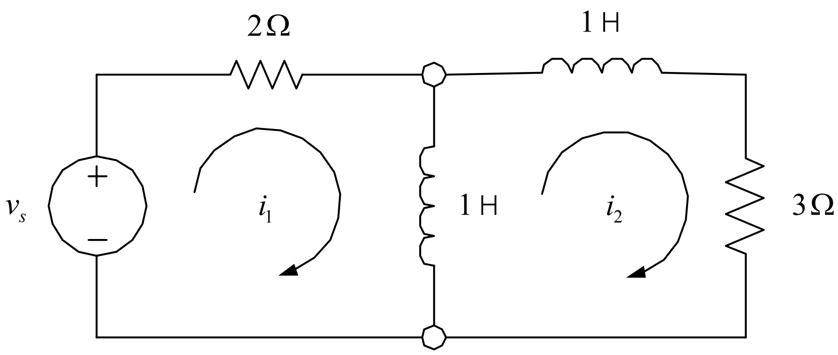
$$2\frac{d^2 i_2}{dt} + 3\frac{di_2}{dt} = v_s \tag{8.14}$$

ตาราง 8.2 สรุปขั้นตอนในการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีใช้ตัวกระทำ

ตาราง 8.2 ขั้นตอนในการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีใช้ตัวกระทำ

ขั้นที่ 1	หาตัวแปร x_1 ที่ต้องการคำตอบ
ขั้นที่ 2	เขียนสมการอนุพันธ์หนึ่งสมการ ในรูปตัวแปรที่ต้องการ x_1 และตัวแปรอีกตัว x_2
ขั้นที่ 3	เขียนสมการอนุพันธ์อีกหนึ่งสมการในรูปของตัวแปร x_2 และตัวแปรที่ต้องการ x_1
ขั้นที่ 4	ใช้ตัวกระทำ $s = d/dt$ และ $1/s = \int dt$ แทนในสมการในขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 จะได้สมการพีชคณิตสองสมการ ในรูปของ x_1 และ x_2
ขั้นที่ 5	ใช้กฎของเครมเมอร์หาคำตอบ x_1 เป็นฟังก์ชันของแหล่งจ่ายและตัวกระทำ $x_1 = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ เมื่อ $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นโพลีโนเมียลของ s
ขั้นที่ 6	เรียบเรียงสมการในขั้นที่ 5 ใหม่ในรูป $Q(s)x_1 = P(s)$
ขั้นที่ 7	แปลงตัวกระทำทั้งหมดในสมการในขั้นที่ 6 กลับเป็นอนุพันธ์ โดยที่ $s = d/dt$ และ $s^2 = d^2/dt^2$ จะได้สมการอนุพันธ์อันดับสองตามต้องการ

ตัวอย่าง 8.1 จงหาสมการอนุพันธ์สำหรับกระแส ในวงจรในรูป Ex 8.1



รูปที่ Ex 8.1

วิธีทำ เขียนสมการเมชสองสมการโดยใช้ KVL จะได้

$$2i_1 + \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = v_s$$

และ

$$-\frac{di_1}{dt} + 3i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0$$

แทนตัวกระทำ $s = d/dt$

$$(2+s)i_1 - si_2 = v_s$$

และ

$$-si_1 + (3+2s)i_2 = 0$$

ใช้กฎของเครมเมอร์หาคำตอบ i_2

$$i_2 = \frac{sv_s}{(2+s)(3+2s)-s^2} = \frac{sv_s}{s^2+7s+6}$$

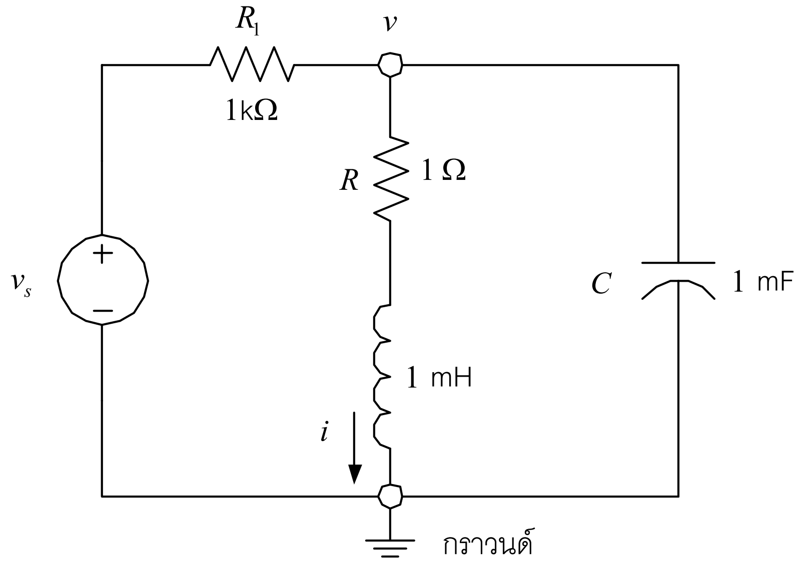
เรียบเรียงใหม่

$$(s^2+7s+6)i_2 = sv_s$$

จะได้สมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 7\frac{di_2}{dt} + 6i_2 = \frac{dv_s}{dt}$$

ตัวอย่าง 8.2 จงหาสมการอนุพันธ์อันดับสองสำหรับแรงดัน v ของวงจรในรูป Ex 8.2



รูปที่ Ex 8.2

วิธีทำ เขียนสมการโนดสำหรับโนดบน โดยใช้ KCL จะได้

$$\frac{v-v_s}{R_1} + i + C\frac{dv}{dt} = 0$$

เนื่องจากเราต้องการหาคำตอบในรูปแรงดัน v ดังนั้นเราต้องการอีกหนึ่งสมการในรูปของกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ i

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v$$

แทนตัวกระทำ $s = d/dt$ ในสมการทั้งสองจะได้

$$\frac{v}{R_1} + i + Csv = \frac{v_s}{R_1}$$

และ

$$-v + Ri + Lsi = 0$$

แทนค่าองค์ประกอบวงจรและเรียบเรียงใหม่

$$(10^{-3} + 10^{-3}s)v + i = 10^{-3}v_s$$

และ

$$-v + (10^{-3}s + 1)i = 0$$

ใช้กฎของเครมเมอร์หาคำตอบ v

$$\begin{aligned} v &= \frac{(s+1000)v_s}{(s+1)(s+1000)+10^6} \\ &= \frac{(s+1000)v_s}{s^2 + 1001s + 1001\times 10^3} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(s^2 + 1001s + 1001\times 10^3)v = (s+1000)v_s$$

จะได้สมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 1001\frac{dv}{dt} + 1001\times 10^3 v = \frac{dv_s}{dt} + 1000v_s$$

8.2 คำตอบสำหรับสมการอนุพันธ์อันดับสอง

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้พบว่าเราสามารถแทนวงจรที่ประกอบด้วยอุปกรณ์เก็บพลังงานสองตัวที่ไม่สามารถลดรูปอีกแล้วด้วยสมการอนุพันธ์อันดับสองในรูป

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t)$$

เมื่อค่าคงที่ a_2 a_1 และ a_0 เป็นค่าที่ทราบแล้วและได้มีการกำหนดฟังก์ชัน $f(t)$

จะได้ผลตอบสนองสมบูรณ์ $x(t)$

$$x = x_n + x_f \tag{8.15}$$

เมื่อ x_n คือผลตอบสนองธรรมชาติได้จากสมการอนุพันธ์ที่ไม่มีการกระตุ้นคือจะทำการแทน $f(t)=0$ และ x_f คือผลตอบสนองกระตุ้นได้จากสมการอนุพันธ์ที่มีการกระตุ้นด้วย $f(t)$ ดังนั้นผลตอบสนองธรรมชาติจะได้จากสมการ

$$a_2\frac{d^2x_n}{dt^2}+a_1\frac{dx_n}{dt}+a_0x_n=0 \tag{8.16}$$

เนื่องจาก x_n และอนุพันธ์ของมันจะต้องทำให้สมการ (8.16) เป็นจริง ดังนั้นเราสมมติคำตอบเป็นสมการเอกโปเนนเทียล เนื่องจากฟังก์ชันนี้มีค่าอนุพันธ์และอินตริกรัลในรูปเดียวกันจึงน่าจะเป็นคำตอบที่เหมาะสมสำหรับสมการอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทิ์เป็นค่าคงที่ในรูปแบบนี้

$$x_n = Ae^{st} \tag{8.17}$$

เมื่อค่า A และ s เป็นค่าที่เราต้องหาต่อไป แทนคำตอบจากสมการ (8.17) ลงในสมการ (8.16) จะได้

$$a_2As^2e^{st}+a_1Ase^{st}+a_0Ae^{st}=0 \tag{8.18}$$

หรือเขียนใหม่โยแทน $x_n = Ae^{st}$ ได้เป็น

$$a_2s^2x_n+a_1sx_n+a_0x_n=0$$

หรือ

$$(a_2s^2+a_1s+a_0)x_n=0$$

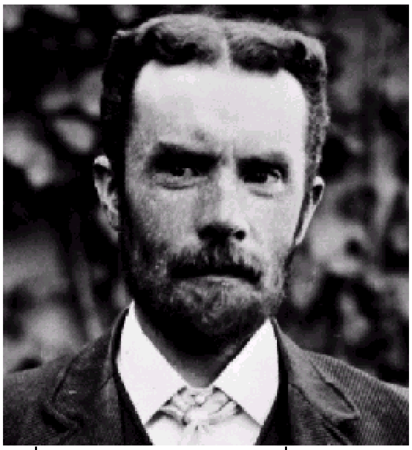
เนื่องจากเราจะไม่พิจารณาคำตอบ $x_n=0$ ดังนั้น

$$a_2s^2+a_1s+a_0=0 \tag{8.19}$$

สมการ (8.19) ในรูปของตัวแปร s เรียกว่าสมการคุณลักษณะ (Characteristic Equation) ซึ่งได้จากการแทนอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วย s และแทนอนุพันธ์อันดับสองด้วย s^2 ซึ่งก็คือตัวกระทำดิฟเฟอเรนเทียล

$$s^n=\frac{d^n}{dt^n}$$

ที่เราได้ศึกษาแล้วนั่นเอง โอลิเวอร์ เฮฟวี่ไซด์ ในรูปที่ 8.4 เป็นผู้ที่พัฒนาทฤษฎีเกี่ยวกับตัวกระทำดิฟเฟอเรนเทียลสำหรับการหาคำตอบของสมการอนุพันธ์



รูปที่ 8.4 โอลิเวอร์ เฮฟวี่ไซด์ ผู้พัฒนาทฤษฎีเกี่ยวกับตัวกระทำดิฟเฟอเรนเทียล

คำตอบของสมการควอดราติก (8.19) มีสองรากคือ s_1 และ s_2 เมื่อ

$$s_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \tag{8.20}$$

และ

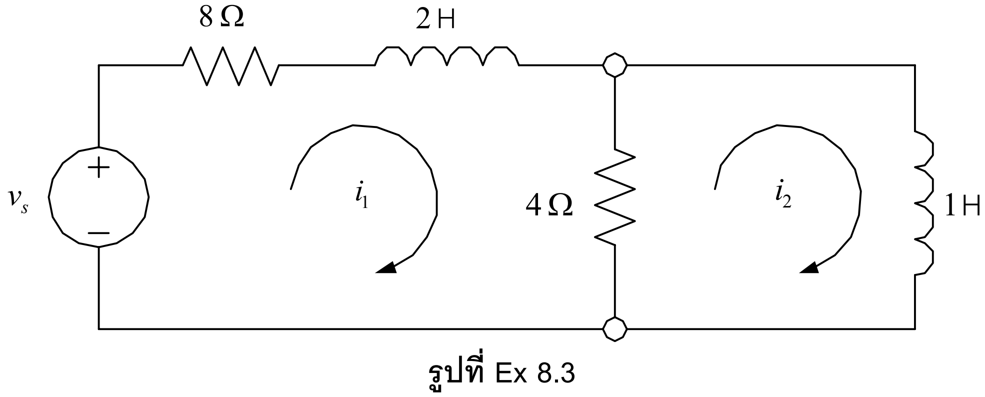
$$s_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \tag{8.21}$$

เมื่อรากทั้งสองแตกต่างกัน $s_2 \neq s_1$ เราจะได้คำตอบ

$$x_n = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \tag{8.22}$$

จะเห็นได้ว่าถึงจะมีสองคำตอบแต่ผลรวมของคำตอบทั้งสองก็จะเป็นคำตอบด้วยเช่นเดียวกัน เนื่องจากสมการเป็นสมการเชิงเส้น และคำตอบทั่วไปก็จะประกอบด้วยหลายพจน์ซึ่งแต่ละพจน์จะมีค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ในที่นี้เราจะยังไม่พิจารณากรณีพิเศษที่รากทั้งสองมีค่าเท่ากัน $s_2 = s_1$

ตัวอย่าง 8.3 จงหาคำตอบธรรมชาติของกระแส i ในวงจรในรูป Ex 8.3 ให้ใช้ตัวกระทำดิฟเฟอเรนเทียลในการเขียนสมการอนุพันธ์แล้วหาคำตอบทั่วไป



รูปที่ Ex 8.3

วิธีทำ เขียนสมการเมชสองสมการ โดยใช้ KVL จะได้

$$12i_1 + 2\frac{di_1}{dt} - 4i_2 = v_s$$

และ

$$-4i_1 + 4i_2 + 1\frac{di_2}{dt} = 0$$

ใช้กฎของเครมเมอร์หาคำตอบ i

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{4v_s}{(12+2s)(4+s)-16} \\ &= \frac{4v_s}{2s^2+20s+32} \\ &= \frac{2v_s}{s^2+10s+16} \end{aligned}$$

ดังนั้น

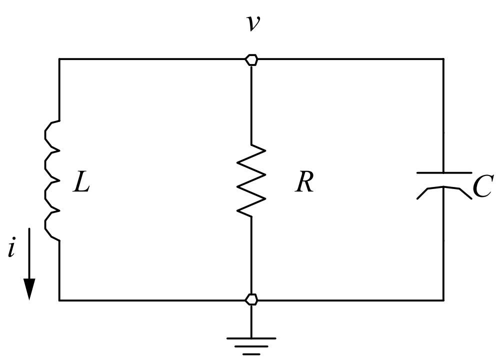
$$(s^2+10s+16)i_2 = 2v_s$$

สังเกตว่าสมการคุณลักษณะ $s^2+10s+16=0$ สามารถหาได้จากค่าดีเทอมิแนนท์ของสมการเมชทั้งสอง จะได้รากของสมการนี้คือ $s_1=-2$ และ $s_2=-8$ ดังนั้นผลตอบสนองธรรมชาติคือ

$$x_n = A_1e^{-2t} + A_2e^{-8t}$$

เมื่อ $x=i_2$ รากของสมการ s_1 และ s_2 คือรากคุณลักษณะ (Characteristic Root) นิยมเรียกว่าค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequencies) ค่าส่วนกลับของขนาดของค่ารากที่เป็นจำนวนจริงคือค่าคงที่เวลา ในกรณีของตัวอย่างนี้จะมีค่าคงที่เวลาคือ $1/2$ และ $1/8$ s

8.3 ผลตอบสนองธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน



รูปที่ 8.5 วงจร RLC แบบขนาน

ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาผลตอบสนองธรรมชาติของวงจร RLC ที่ต่อแบบขนาน ดังแสดงในรูปที่ 8.5 เราเลือกที่จะศึกษาวงจรนี้เพื่อจะแสดงให้เห็นผลตอบสนองธรรมชาติสามรูปแบบ คือ หน่วงต่ำกว่าวิกฤต (Under Damped) หน่วงวิกฤต (Critically Damped) และหน่วงเกินวิกฤต (Over Damped) เราสามารถศึกษาวงจร RLC ที่ต่อแบบอนุกรมได้เช่นเดียวกัน แต่จะไม่นำมาพิจารณาในที่นี้เนื่องจากต้องการให้ได้วิธีการและคำตอบทั่วไป ไม่ใช่เฉพาะสำหรับวงจรใดวงจรหนึ่ง

เขียนสมการโนด โดยใช้ KCL ได้

$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau+i(0)+C\frac{dv}{dt}=0 \tag{8.23}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (8.23) ได้

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=0 \tag{8.24}$$

ใช้ตัวกระทำ s เราจะได้สมการคุณลักษณะ

$$s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}=0 \tag{8.25}$$

จะได้รากทั้งสองคือ

$$s_1=-\frac{1}{2RC}+\left[\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.26}$$

และ

$$s_2=-\frac{1}{2RC}-\left[\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.27}$$

เมื่อ $s_2 \neq s_1$ เราจะได้คำตอบ

$$v_n=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t} \tag{8.28}$$

รากของสมการคุณลักษณะอาจเขียนได้เป็น

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{8.29}$$

และ

$$s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{8.30}$$

เมื่อ $\alpha=1/2RC$ และ $\omega_0^2=1/LC$ เราจะเรียก ω_0 ว่าความถี่กำธร (Resonant Frequency)

ค่ารากของสมการคุณลักษณะมีความเป็นไปได้สามเงื่อนไขคือ

1. มีสองรากค่าจริงที่แตกต่างกัน เกิดเมื่อ $\alpha^2 > \omega_0^2$ เรียกกรณีนี้ว่า หน่วงเกินวิกฤต
2. มีสองรากจริงที่เหมือนกัน เกิดเมื่อ $\alpha^2 = \omega_0^2$ เรียกกรณีนี้ว่า หน่วงวิกฤต
3. มีสองรากเชิงซ้อน เกิดเมื่อ $\alpha^2 < \omega_0^2$ เรียกกรณีนี้ว่า หน่วงต่ำกว่าวิกฤต

พิจารณาผลตอบสนองในกรณีหน่วงเกินวิกฤตของวงจร RLC ในรูปที่ 8.5 เมื่อค่าเริ่มต้นคือ $v(0)$ สำหรับตัวเก็บประจุและ $i(0)$ สำหรับตัวเหนี่ยวนำ สังเกตว่าวงจรนี้ไม่มีสัญญาณกระตุ้น ดังนั้น $v_n(0) = v(0)$ ที่เวลา $t = 0$ จากสมการ (8.28) เราได้

$$v_n(0) = A_1 + A_2 \tag{8.31}$$

เนื่องจากเราไม่ทราบค่าทั้ง A_1 และ A_2 ดังนั้นจึงต้องการอีกหนึ่งสมการ ที่เวลา $t = 0$ เขียนสมการ (8.23) ใหม่ได้

$$\frac{v(0)}{R} + i(0) + C\frac{dv(0)}{dt} = 0$$

เนื่องจากเราทราบค่า $v(0)$ และ $i(0)$ ดังนั้น

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \tag{8.32}$$

ทำให้เราทราบค่าเริ่มต้นของอัตราการเปลี่ยนแปลงหรืออนุพันธ์ของ v หาค่าอนุพันธ์ของสมการ (8.28) ที่เวลา $t = 0$ จะได้

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \tag{8.33}$$

ให้สมการ (8.33) เท่ากับสมการ (8.32) จะได้สมการที่สองที่ต้องการ

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \tag{8.34}$$

แก้สมการ (8.31) และ(8.34) จะได้ค่า A_1 และ A_2

ตัวอย่าง 8.4 จงหาคำตอบธรรมชาติของแรงดัน v ในวงจร RLC ขนานในรูปที่ 8.5 กำหนดให้ $R = 2/3\,\Omega$ $L = 1$ H $C = 1/2$ F $v(0) = 10$ V และ $i(0) = 2$ A

วิธีทำ สมการคุณลักษณะของวงจรนี้คือ

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

แทนค่าองค์ประกอบวงจรจะได้

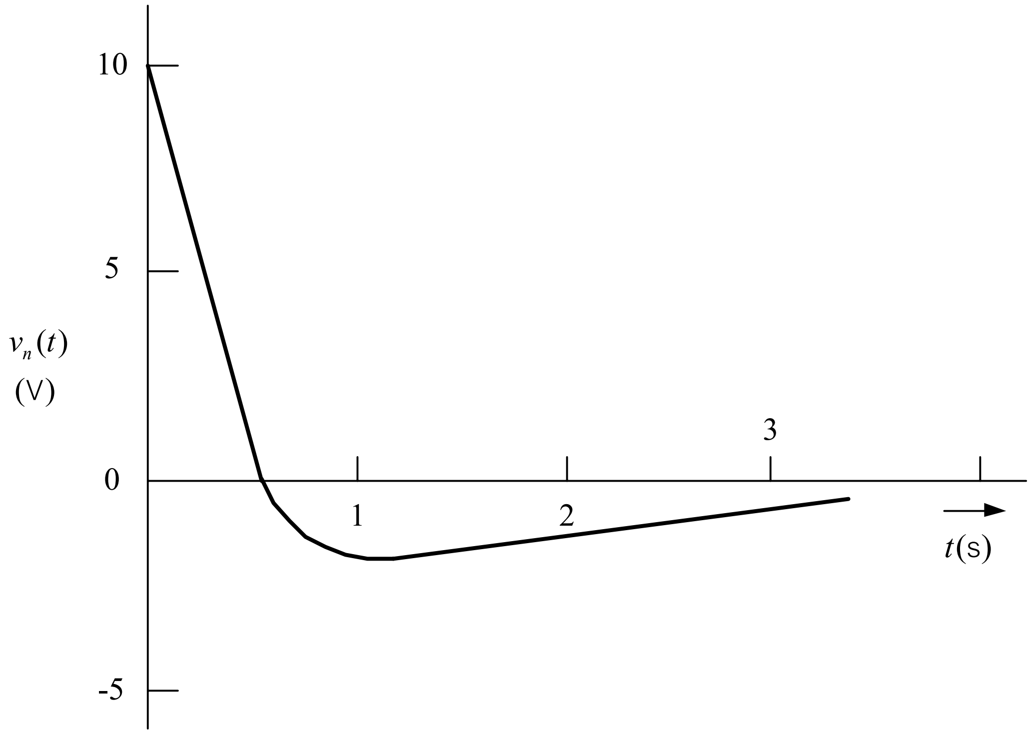
$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

ดังนั้นจะได้ค่าราก

$$s_1 = -1$$

และ

$$s_2 = -2$$



รูปที่ Ex 8.4

ผลตอบสนองธรรมชาติคือ

$$v_n = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

ค่าแรงดันเริ่มต้นของตัวเก็บประจุคือ $v(0) = 10$ V ดังนั้น

$$v_n(0) = A_1 + A_2 = 10$$

จากสมการ (8.34) ได้

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

แทนค่า

$$-A_1 - 2A_2 = -\frac{10}{1/3} - \frac{2}{1/2}$$

หรือ

$$-A_1 - 2A_2 = -34$$

แก้สมการทั้งสองหาค่า $A_1 = -14$ และ $A_2 = 24$
ดังนั้นจะได้ผลตอบสนองธรรมชาติ

$$v_n = -14e^{-t} + 24e^{-2t} \text{ V}$$

ซึ่งสามารถเขียนกราฟเทียบกับเวลาได้ดังในรูปที่ Ex 8.4

ในกรณีหน่วงวิกฤต จะมีสองรากจริงที่เหมือนกัน $s_1 = s_2$ เกิดเมื่อ $\alpha^2 = \omega_0^2$ จะได้ผลตอบสนองธรรมชาติคือ

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_1 t} = A_3 e^{s_1 t} \tag{8.35}$$

เมื่อ $A_3 = A_1 + A_2$ เนื่องจากรากทั้งสองมีค่าเท่ากัน ดังนั้นเราจะต้องการหาค่าคงที่เพียงค่าเดียว แต่มีสองเงื่อนไขเริ่มต้นที่จะต้องเป็นจริง ดังนั้นคำตอบในสมการ (8.35) จึงยังไม่ใช่คำตอบทั้งหมด เราต้องการคำตอบที่มีค่าคงที่สองตัว ลองพิจารณา

$$x_n = g(t)e^{s_1 t}$$

เมื่อ $g(t)$ คือฟังก์ชันโพลีโนเมียลของ t โดยจะลองพิจารณาคำตอบเมื่อ

$$g(t) = A_2 + A_1 t$$

แทนค่า $x_n = g(t)e^{s_1 t}$ ลงในสมการอนุพันธ์ ใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นทั้งสองเพื่อหาค่า A_1 และ A_2 ดังนั้นสำหรับกรณีที่รากทั้งสองมีค่าเท่ากันจะได้ผลตอบสนองธรรมชาติ

$$v_n = (A_2 + A_1 t)e^{s_1 t} \tag{8.36}$$

พิจารณาวงจรซึ่งมีค่า $R = 1\,\Omega$ $L = 1$ H $C = 1/4$ F $v(0) = 5$ V และ $i(0) = -6$ A สมการคุณลักษณะของวงจรนี้คือ

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

หรือ

$$s^2 + 4s + 4 = 0$$

รากทั้งสองคือ $s_1 = s_2 = -2$ ใช้สมการ (8.36) จะได้

$$v_n = (A_2 + A_1 t)e^{-2t}$$

เนื่องจาก $v(0) = 5$ V จะได้ที่เวลา $t = 0$

$$5 = A_2$$

ในการหาค่า A_1 เราจะหาค่าอนุพันธ์ของ v_n และแทนค่าที่เวลา $t = 0$

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1te^{-2t} + A_1e^{-2t} - 2A_2e^{-2t}$$

ที่เวลา $t = 0$ จะได้

$$\frac{dv(0)}{dt} = A_1 - 2A_2$$

จากสมการ (8.32) ได้

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

แทนค่า

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{5}{1/4} - \frac{6}{1/4} = 4$$

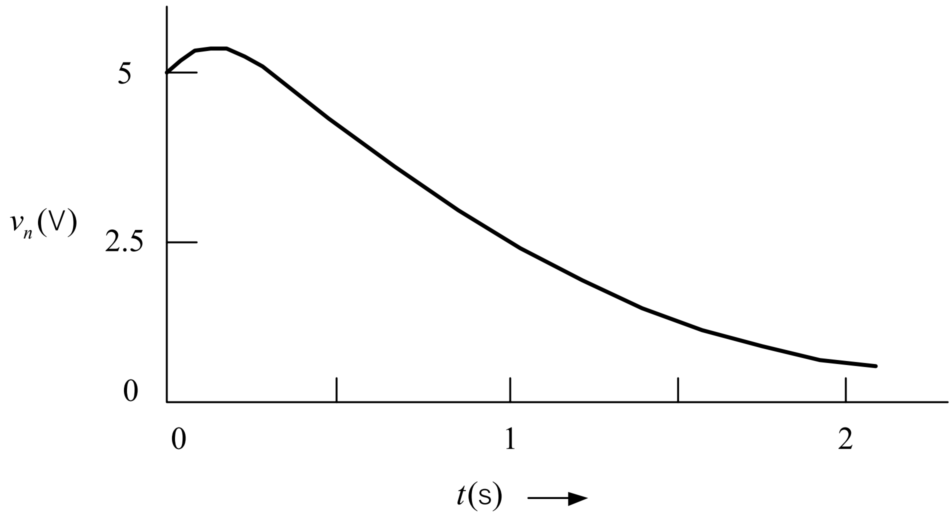
หรือ

$$A_1 = 14$$

ดังนั้นจะได้ผลตอบสนองธรรมชาติ

$$v_n = (14t + 5)e^{-2t} \text{ V}$$

ซึ่งสามารถเขียนกราฟเทียบกับเวลาได้ดังในรูปที่ 8.6



รูปที่ 8.6 ผลตอบสนองของวงจร RLC แบบขนานในกรณีหน่วงวิกฤต

ในกรณีหน่วงต่ำกว่าวิกฤต จะมีสองรากเชิงซ้อนที่เป็นคอนจูเกตกัน เกิดเมื่อ $\alpha^2 < \omega_0^2$ หรือ $LC < (2RC)^2$ หรือ $L < 4R^2C$ จะได้ผลตอบสนองธรรมชาติคือ

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{8.37}$$

เมื่อ

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

เนื่องจาก $\omega_0^2 > \alpha^2$ ดังนั้น

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

เมื่อ $j = \sqrt{-1}$

รากที่เป็นค่าเชิงซ้อนนำไปสู่ผลตอบสนองธรรมชาติแบบออสซิลเลท เรานิยาม $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ว่าเป็นความถี่กำธรหน่วง (Damped Resonant Frequency) และค่าตัวประกอบ α คือสัมประสิทธิ์การหน่วง (Damping Coefficient) ซึ่งจะเป็นตัวบอกว่าการออสซิลเลทจะหายไปเร็วหรือช้า แทนค่าความถี่กำธรหน่วงจะได้ราก

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \tag{8.38}$$

จะได้ผลตอบสนองธรรมชาติคือ

$$v_n = A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t}$$

ใช้สมการของออยเลอร์

$$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t \tag{8.39}$$

แทน (8.40) โดยที่ให้ $\omega = \omega_d$ ลงในสมการ (8.39)

$$\begin{aligned} v_n &= e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t + jA_1\sin\omega_d t + A_2\cos\omega_d t - jA_2\sin\omega_d t) \\ &= e^{-\alpha t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\sin\omega_d t\right] \end{aligned} \tag{8.40}$$

เนื่องจากเรายังไม่ทราบค่าคงที่ A_1 และ A_2 เราจะแทน $(A_1 + A_2)$ และ $j(A_1 - A_2)$ ด้วยค่าคงที่ใหม่ซึ่งยังไม่ทราบค่าเช่นเดียวกัน คือ B_1 และ B_2 ตามลำดับ ดังนั้นสมการ (8.40) จะเป็น

$$v_n = e^{-\alpha t}\left[B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t\right] \tag{8.41}$$

โดยที่ค่าคงที่ B_1 และ B_2 หาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น $v(0)$ และ $i(0)$

โดยสรุปจะได้ว่าผลตอบสนองธรรมชาติในกรณีหน่วงต่ำกว่าวิกฤตจะมีลักษณะออสซิลเลทด้วยค่าขนาดลดลงขึ้นกับสัมประสิทธิ์การหน่วง และมีค่าความถี่ในการออสซิลเลทตามค่าความถี่กำธรหน่วง

ที่เวลา $t = 0$ เราได้

$$v_n(0) = B_1$$

เพื่อหาค่า B_2 ทำการหาอนุพันธ์ของ v_n เทียบกับเวลาของที่เวลา $t=0$ ดังนั้น

$$\frac{dv_n}{dt} = e^{-\alpha t}\left[(\omega_d B_2 - \alpha B_1)\cos\omega_d t - (\omega_d B_1 + \alpha B_2)\sin\omega_d t\right]$$

แทนค่าที่เวลา $t=0$

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = \omega_d B_2 - \alpha B_1 \qquad (8.42)$$

จากสมการ (8.32)

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

ดังนั้น

$$\omega_d B_2 = \alpha B_1 - \frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \qquad (8.43)$$

ตัวอย่าง 8.5 จงหาผลตอบสนองธรรมชาติของแรงดัน $v_n(t)\quad t>0$ ในวงจร RLC แบบขนานในรูปที่ 8.5 กำหนดให้ $R = 25/3\,\Omega$ $L = 0.1$ H $C = 1$ mF $v(0) = 10$ V และ $i(0) = -0.6$ A

วิธีทำ เริ่มจากการหาค่า α^2 และ ω_0^2 เพื่อพิจารณาว่าผลตอบสนองเป็นกรณีใด

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 60$$

และ

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^4$$

ดังนั้น $\omega_0^2 > \alpha^2$ จึงอยู่ในกรณีหน่วงต่ำกว่าวิกฤต หาค่าความถี่กำธรหน่วง

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 80 \text{ rad/s}$$

จะได้รากคุณลักษณะของวงจรนี้คือ

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -60 + j80$$

และ

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = -60 - j80$$

และได้ผลตอบสนองธรรมชาติตามสมการ (8.41)

$$v_n = B_1 e^{-60t}\cos 80t + B_2 e^{-60t}\sin 80t$$

จาก $v(0)=10$ จะได้

$$B_1 = v(0) = 10$$

และหาค่า B_2 จากสมการ (8.43)

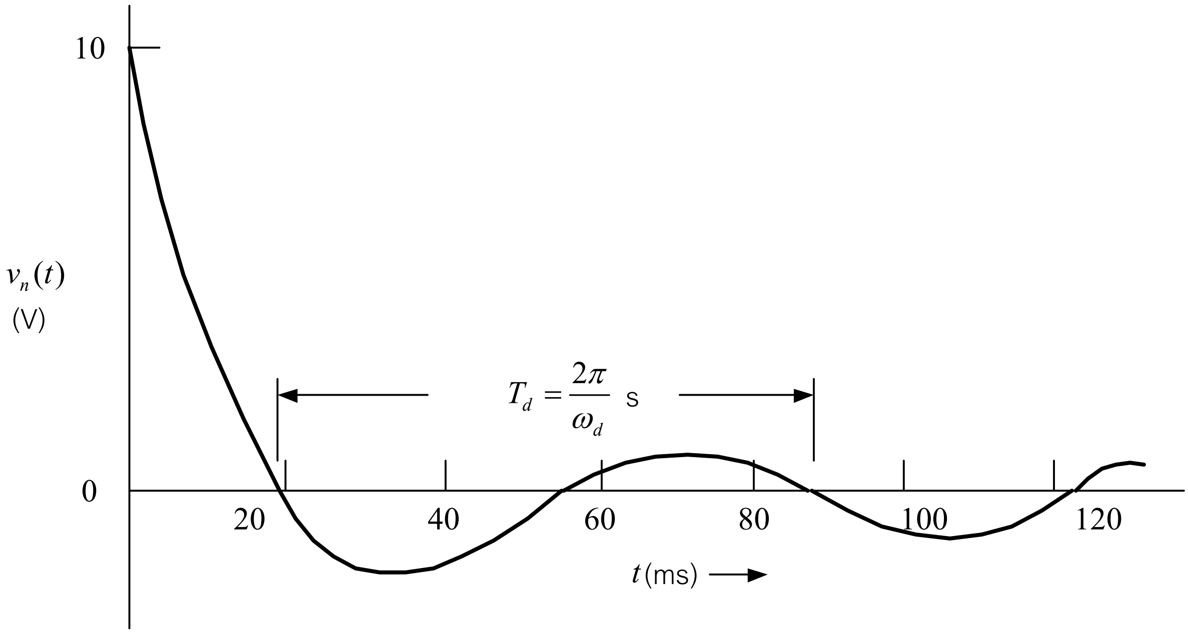
$$B_2 = \frac{\alpha}{\omega_d}B_1 - \frac{v(0)}{\omega_d RC} - \frac{i(0)}{\omega_d C}$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{60}{80}10 - \frac{10}{80\times 25/3000} - \frac{-0.6}{80\times 10^{-3}} \\ &= 7.5 - 15 + 7.5 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นได้ผลตอบสนองธรรมชาติ

$$v_n = 10e^{-60t}\cos 80t \text{ V}$$



รูปที่ Ex8.5

รูปที่ Ex8.5 แสดงกราฟผลตอบสนองธรรมชาติเทียบกับเวลาในกรณีหน่วงต่ำกว่าวิกฤต ค่าคาบของการออสซิลเลทหน่วงคือ

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \text{ s}$$

ผลตอบสนองธรรมชาติของวงจรในกรณีหน่วงต่ำกว่าวิกฤตไม่ใช่การออสซิลเลทแบบถาวรดังนั้นเราอาจประมาณค่าคาบของการออสซิลเลทหน่วงจากจุดตัดศูนย์ครั้งแรกและครั้งที่สามดังแสดงในรูปที่ Ex8.5

8.4 ผลตอบสนองกระตุ้น

ผลตอบสนองกระตุ้นของวงจร RLC ต่อฟังก์ชันกระตุ้นแบบหนึ่ง จะมีรูปแบบลักษณะเดียวกับฟังก์ชันกระตุ้นนั้น พิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \tag{8.44}$$

ผลตอบสนองกระตุ้น x_f จะต้องทำให้สมการ (8.44) เป็นจริง ดังนั้นแทนค่า x_f จะได้

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1\frac{dx_f}{dt} + a_0x_f = f(t) \tag{8.45}$$

เราต้องการหาค่า x_f ซึ่งค่า x_f และอนุพันธ์ของมันทำจะให้สมการ (8.45) เป็นจริง

ถ้าฟังก์ชันกระตุ้นคือค่าคงที่ เราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้นก็จะเป็นค่าคงที่เช่นเดียวกัน เนื่องจากอนุพันธ์ของค่าคงที่คือศูนย์ แต่ถ้าฟังก์ชันกระตุ้นอยู่ในรูป $f(t) = Be^{-at}$ อนุพันธ์ของ $f(t)$ จะเป็นฟังก์ชันเอกโปเนนเทียลทั้งหมด ในรูป Qe^{-at} เราคาดว่า

$$x_f = De^{-at}$$

ถ้าฟังก์ชันกระตุ้นอยู่ในรูป $f(t) = A\sin\omega_0 t$ เราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้นจะเป็นฟังก์ชันไซนูซอยด์

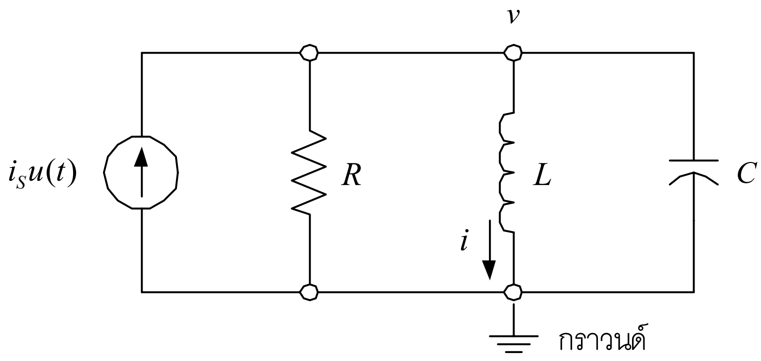
$$x_f = M\sin\omega_0 t + N\cos\omega_0 t = Q\sin(\omega_0 t + \theta)$$

ตารางที่ 8.3 สรุปผลการตอบสนองกระตุ้นที่คาดว่าจะได้จากการกระตุ้นด้วยฟังก์ชันกระตุ้นแบบต่างๆ

ตาราง 8.3 ผลการตอบสนองกระตุ้นต่อฟังก์ชันกระตุ้นแบบต่างๆ

ฟังก์ชันกระตุ้น	**ผลตอบสนองกระตุ้นที่คาดว่าจะได้**
K	A
Kt	$At + B$
Kt^2	$At^2 + Bt + C$
$K\sin\omega t$	$A\sin\omega t + B\cos\omega t$
Ke^{-at}	Ae^{-at}

ตัวอย่าง 8.6 จงหาผลตอบสนองกระตุ้นของกระแสในตัวเหนี่ยวนำ $i_f(t)$ $t > 0$ ในวงจร RLC แบบขนานในรูปที่ Ex 8.6 กำหนดให้ $R = 6\,\Omega$ $L = 7$ H $C = 1/42$ F และ $i_s = 8e^{-2t}$ A



รูปที่ Ex 8.6

วิธีทำ เริ่มทำการป้อนแหล่งจ่ายกระแสที่เวลา $t = 0$ ดังแสดงด้วยฟังก์ชันยูนิตสเตป $u(t)$ ใช้ KCL ที่โนดบนจะได้

$$i + \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = i_s \tag{8.46}$$

เราต้องการสมการอนุพันธ์อันดับสองในรูปของกระแส i โดยที่

$$v = L\frac{di}{dt}$$

และ

$$\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2i}{dt^2}$$

แทนค่าลงในสมการ (8.46)

$$i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + CL\frac{d^2i}{dt^2} = i_s$$

หารตลอดด้วย LC และเรียบเรียงใหม่

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{i_s}{LC} \tag{8.47}$$

แทนค่าองค์ประกอบวงจรและแหล่งจ่ายจะได้

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 48e^{-2t} \tag{8.48}$$

เราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้นจะอยู่ในรูป

$$i_f = Be^{-2t}$$

เมื่อ B คือค่าคงที่ที่จะต้องหาค่า แทนค่าคำตอบลงในสมการ (8.48) จะได้

$$4Be^{-2t} + 7(-2Be^{-2t}) + 6Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

หรือ

$$(4-14+6)Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

ดังนั้นจะได้ $B=-12$ และ

$$i_f = -12e^{-2t} \text{ A}$$

ตัวอย่าง 8.7 จงหาผลตอบสนองกระตุ้นของกระแสในตัวเหนี่ยวนำ $i_f(t) \quad t>0$ ในวงจร RLC ในรูปที่ Ex 8.6 เมื่อกำหนดให้ $i_s = I_0$ A โดยที่ I_0 เป็นค่าคงที่

วิธีทำ เนื่องจากแหล่งจ่ายกระแสเป็นค่าคงที่และจ่ายให้กับวงจรที่เวลา $t=0$ เราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้นจะเป็นค่าคงที่เช่นเดียวกัน สมการอนุพันธ์ซึ่งมีแหล่งจ่ายคงที่ได้จากสมการ (8.47) คือ

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 6I_0$$

ผลตอบสนองกระตุ้นจะอยู่ในรูป

$$i_f = D$$

เนื่องจากอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองของค่าคงที่มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$6D = 6I_0$$

หรือ

$$D = I_0$$

จะได้ผลตอบสนองกระตุ้น

$$i_f = I_0$$

อีกวิธีหนึ่งในการหาคำตอบคือการพิจารณาวงจรในสภาวะคงตัว ซึ่งตัวเหนี่ยวนำจะปรากฏตัวเป็นลัดวงจรและตัวเก็บประจุปรากฏตัวเป็นเปิดวงจร ดังแสดงในรูปที่ Ex 8.7 จะเห็นได้ชัดเจนว่าในสภาวะคงตัวกระแสจากแหล่งจ่ายกระแสจะไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำทั้งหมด คือ

$$i_f = I_0$$

จากตัวอย่างทั้งสองจะเห็นได้ว่าในการหาผลตอบสนองกระตุ้นเนื่องจากฟังก์ชันกระตุ้นสามารถทำได้ไม่ยาก อย่างไรก็ตามในบางครั้งเราอาจพบกรณีพิเศษคือฟังก์ชันกระตุ้นมีรูปแบบเหมือนกับผลตอบสนองธรรมชาติ พิจารณาตัวอย่าง 8.6 และ 8.7 เมื่อสมการอนุพันธ์คือ

$$\frac{d^2i}{dt^2}+7\frac{di}{dt}+6i=6i_s \tag{8.49}$$

และสมการคุณลักษณะของวงจรคือ

$$s^2+7s+6=0$$

หรือ

$$(s+1)(S+6)=0$$

ดังนั้นจะได้ผลตอบสนองธรรมชาติ

$$i_n=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t} \tag{8.50}$$

พิจารณากรณีพิเศษ เมื่อ $i_s=3e^{-6t}$ เราคาดว่าจะได้ผลตอบสนองกระตุ้น

$$i_f=Be^{-6t} \tag{8.51}$$

อย่างไรก็ตามจะได้ว่าผลตอบสนองกระตุ้นและพจน์หนึ่งของผลตอบสนองธรรมชาติอยู่ในรูปแบบเดียวกัน คือ De^{-6t} ลองแทนค่าคำตอบในสมการ (8.51) ลงในสมการ (8.49) จะได้ว่า

$$36Be^{-6t}-42Be^{-6t}+6Be^{-6t}\neq 18e^{-6t}$$

หรือ

$$0\neq 18e^{-6t}$$

ซึ่งเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ ดังนั้นเราต้องการคำตอบในอีกรูปแบบหนึ่งสำหรับกรณีนี้ พิจารณาผลตอบสนองกระตุ้น

$$i_f=Bte^{-6t} \tag{8.52}$$

ลองแทนค่าคำตอบในสมการ (8.52) ลงในสมการ (8.49) จะได้ว่า

$$B(-6e^{-6t}-6e^{-6t}+36te^{-6t})+7B(e^{-6t}-6te^{-6t})+6Bte^{-6t}=18e^{-6t}$$

แก้สมการหาค่า B จะได้

$$B=-\frac{18}{5}$$

ดังนั้นจะได้ผลตอบสนองกระตุ้น

$$i_f=-\frac{18}{5}te^{-6t}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าในกรณีทั่วไปเมื่อฟังก์ชันกระตุ้นมีรูปแบบเหมือนกับองค์ประกอบของผลตอบสนองธรรมชาติ x_{n1} เราจะใช้

$$x_f = t^p x_{n1}$$

โดยที่เลขจำนวนเต็ม p จะถูกเลือกเพื่อให้ x_f มีค่าไม่ซ้ำกับผลตอบสนองธรรมชาติ เราจะเลือกใช้ค่ากำลัง p ที่น้อยที่สุด

8.5 ผลตอบสนองสมบูรณ์

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราสามารถหาค่าผลตอบสนองธรมชาติและผลตอบสนองกระตุ้นของวงจรอันดับสอง เราจะได้ทำการหาค่าผลตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรเหล่านี้ในหัวข้อนี้

เราทราบมาแล้วว่าผลตอบสนองสมบูรณ์คือผลรวมของค่าผลตอบสนองธรมชาติและผลตอบสนองกระตุ้น

$$x = x_n + x_f$$

จากค่าผลตอบสนองสมบูรณ์และเราอาจหาค่าคงที่ที่ยังไม่ทราบค่าได้จากการหาค่า $x(t)$ และค่า dx/dt ที่เวลา $t = 0$ พิจารณาวงจรในรูปที่ 8.2 ซึ่งมีสมการอนุพันธ์คือ

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = v_s$$

แทนค่า $L = 1$ H $C = 1/6$ F และ $R = 5\,\Omega$ ได้

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = 6v_s \tag{8.53}$$

กำหนดให้ $v_s = \frac{2}{3}e^{-t}$ V $v(0) = 10$ V และ $dv(0)/dt = -2$ V

เราจะเริ่มจากการหารูปแบบของผลตอบสนองธรรมชาติจากนั้นจะหาค่าผลตอบสนองกระตุ้น และรวมผลตอบสนองทั้งสองเป็นผลตอบสนองสมบูรณ์ ซึ่งจะมีค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าสองตัว ซึ่งจะหาค่าได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น

ในการหาค่าผลตอบสนองธรรมชาติ เราเขียนสมการคุณลักษณะโดยใช้ตัวกระทำได้ดังนี้

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

หรือ

$$(s+2)(s+3) = 0$$

จะได้ผลตอบสนองธรรมชาติ

$$v_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

ผลตอบสนองกระตุ้นหาได้จาก การพิจารณาฟังก์ชันกระตุ้น ซึ่งพบว่าฟังก์ชันกระตุ้น $v_s(t)$ มีค่าคงที่เวลาต่างจากผลตอบสนองธรรมชาติ ดังนั้นเราสามารถเขียน

$$v_f = Be^{-t}$$

แทนค่าลงในสมการ (8.53)

$$Be^{-t} + 5(-Be^{-t}) + 6(Be^{-t}) = 4e^{-t}$$

หรือแก้สมการหาค่า

$$B = 2$$

จะได้ผลตอบสนองสมบูรณ์คือ

$$v = v_n + v_f = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + 2e^{-t}$$

หาค่า A_1 และ A_2 จากเงื่อนไขเริ่มต้น $v(0) = 10$ V ที่เวลา $t = 0$

$$10 = A_1 + A_2 + 2$$

และจาก $dv(0)/dt = -2$ V

$$-2A_1 - 3A_2 - 2 = -2$$

แก้สมการทั้งสองหาค่า $A_1 = 24$ และ $A_2 = -16$
ดังนั้นผลตอบสนองสมบูรณ์คือ

$$v = 24e^{-2t} - 16e^{-3t} + 2e^{-t} \text{ V}$$

ตัวอย่าง 8.8 จงหาผลตอบสนองสมบูรณ์ของแรงดัน $v(t)$ $t > 0$ ในวงจร RLC ในรูปที่ Ex 8.8 (ก) เมื่อวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวที่เวลา $t = 0^-$

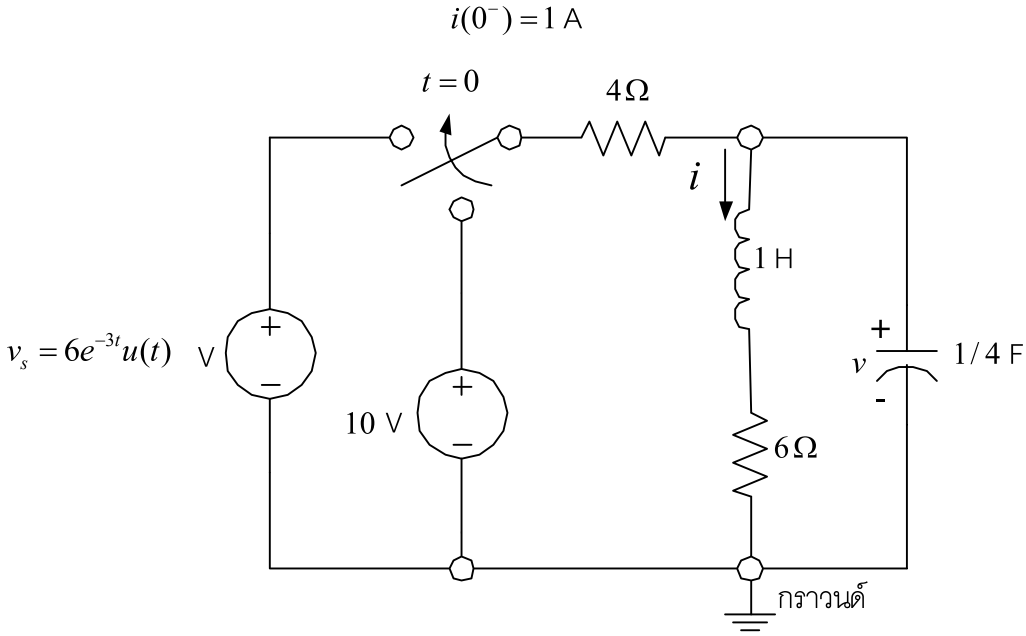
วิธีทำ เริ่มจากการหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลา $t = 0^-$ พิจารณาวงจรในรูปที่ Ex 8.8 (ข) เมื่อตัวเก็บประจุถูกแทนด้วยเปิดวงจรและตัวเหนี่ยวนำถูกแทนด้วยลัดวงจร ค่าแรงดันจะเป็น

$$v(0^-) = 6 \text{ V}$$

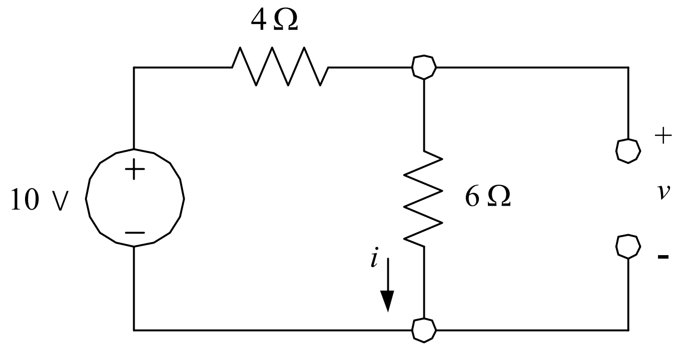
เมื่อสวิทช์เปลี่ยนตำแหน่ง ใช้ KVL ในเมชขวามือจะได้

$$-v + \frac{di}{dt} + 6i = 0 \qquad (8.54)$$

และ



(ก)



(ข)

รูปที่ Ex 8.8

ใช้ KCL ที่โนด a จะได้สมการในรูปของ v และ i

$$\frac{v - v_s}{4} + i + \frac{1}{4}\frac{dv}{dt} = 0 \tag{8.55}$$

เรียบเรียงสมการ (8.54) และ (8.55) ใหม่จะได้

$$\left(\frac{di}{dt} + 6i\right) - v = 0 \tag{8.56}$$

และ

$$i + \left(\frac{v}{4} + \frac{1}{4}\frac{dv}{dt}\right) = \frac{v_s}{4} \tag{8.57}$$

แทนค่าตัวกระทำ $s = d/dt \quad s^2 = d^2/dt^2$ และ $1/s = \int dt$ จะได้

$$\left(s+6\right)i-v=0 \tag{8.58}$$

$$i+\frac{1}{4}\left(s+1\right)v=\frac{v_s}{4} \tag{8.59}$$

สมการคุณลักษณะได้จากค่าดีเทอร์มิแนนท์

$$\Delta=\frac{1}{4}(s+6)(s+1)+1$$

ให้ค่าดีเทอร์มิแนนท์เป็นศูนย์จะได้

$$(s+6)(s+1)+4=0$$

หรือ

$$s^2+7s+10=0$$

ดังนั้นจะได้รากของสมการคือ

$$s_1=-2 \text{ และ } s_2=-5$$

เพื่อหาสมการอนุพันธ์อันดับสองที่ใช้อธิบายวงจรนี้ใช้กฏของเครมเมอร์ กับสมการ (8.58) และ (8.59) เพื่อหาค่า

$$v=\frac{(s+6)(v_s/4)}{\Delta}=\frac{(s+6)v_s}{s^2+7s+10}$$

ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น

$$(s^2+7s+10)v=(s+6)v_s$$

ดังนั้นจะได้สมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2v}{dt^2}+7\frac{dv}{dt}+10v=\frac{dv_s}{dt}+6v_s \tag{8.60}$$

จะได้ผลตอบสนองธรรมชาติคือ

$$v_n=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$$

และเราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้นจะอยู่ในรูป

$$v_f=Be^{-3t} \tag{8.61}$$

แทนค่า v_f ลงในสมการอนุพันธ์

$$9Be^{-3t}-21Be^{-3t}+10Be^{-3t}=-18e^{-3t}+36e^{-3t}$$

แก้สมการได้ค่า

$$B = -9$$

ดังนั้น

$$v_f = -9e^{-3t}$$

และจะได้ผลตอบสนองสมบูรณ์

$$v = v_n + v_f = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} - 9e^{-3t} \tag{8.62}$$

จาก $v(0) = 6$ V เราได้

$$v(0) = 6 = A_1 + A_2 - 9$$

หรือ

$$A_1 + A_2 = 15$$

และจาก $i(0) = 1$ A จะหาค่า dv/dt ได้จากสมการ (8.57)

$$\frac{dv}{dt} = -4i - v + v_s$$

แทนค่าที่เวลา $t = 0$ จะได้ $dv(0)/dt$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -4i(0) - v(0) + v_s(0) = -4 - 6 + 6 = -4$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (8.62)

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 5A_2 e^{-5t} + 27e^{-3t}$$

แทนค่าที่เวลา $t = 0$ จะได้

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2A_1 - 5A_2 + 27$$

แต่ $dv(0)/dt = -4$ ดังนั้นจะได้

$$2A_1 + 5A_2 = 31$$

แก้สมการหาค่า A_1 และ A_2 จะได้

$$A_1 = \frac{44}{3} \text{ และ } A_2 = \frac{1}{3}$$

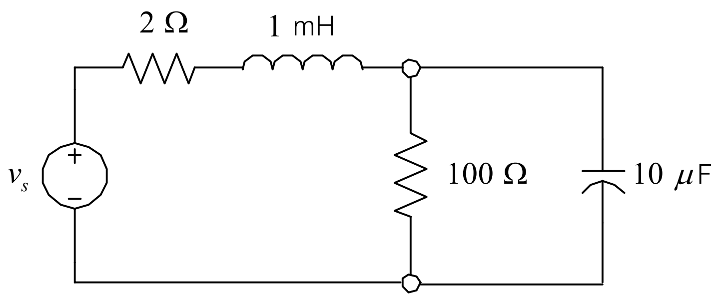
ดังนั้นจะได้ผลตอบสนองสมบูรณ์

$$v = \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} \text{ V}$$

ในตัวอย่างนี้เราใช้ค่าแรงดันของตัวเก็บประจุและกระแสของตัวเหนี่ยวนำเป็นตัวแปรซึ่งจะสะดวกมากเนื่องจากโดยทั่วไปเราจะทราบค่าเริ่มต้นของตัวแปรเหล่านี้ ตัวแปรเหล่านี้เรียกว่าตัวแปรสเตท (State Variable)

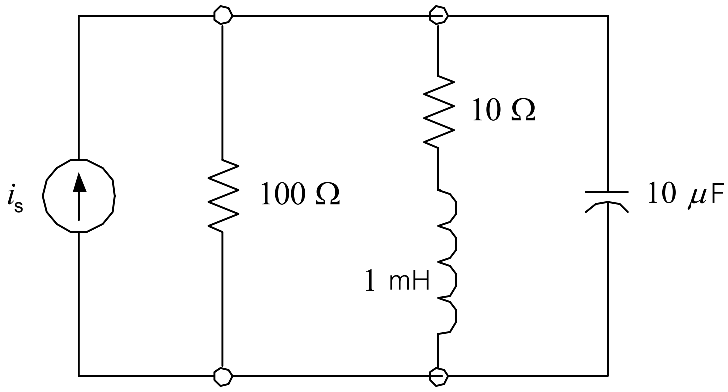
8.6 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาสมการอนุพันธ์อันดับสองสำหรับวงจรในรูป P 8.1 โดยใช้วิธีตรง



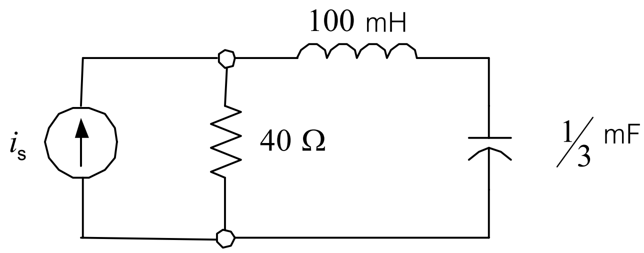
รูปที่ P 8.1

2. จงหาสมการอนุพันธ์อันดับสองสำหรับวงจรในรูป P 8.2 โดยใช้วิธีตัวกระทำ



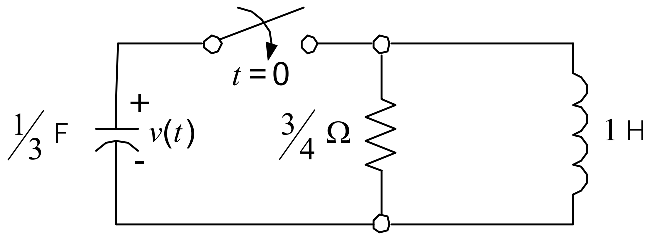
รูปที่ P 8.2

3. จงหาสมการคุณลักษณะและรากของสมการนี้สำหรับวงจรในรูป P 8.3



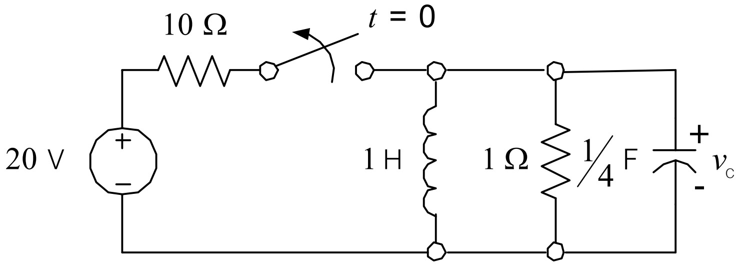
รูปที่ P 8.3

4. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.4 เมื่อ $v(0) = 2$ V และสวิทช์อยู่ในตำแหน่งเปิดวงจรเป็นเวลานานก่อนจะปิดที่เวลา $t = 0$ จงหาค่าและเขียนกราฟของแรงดัน $v(t)$



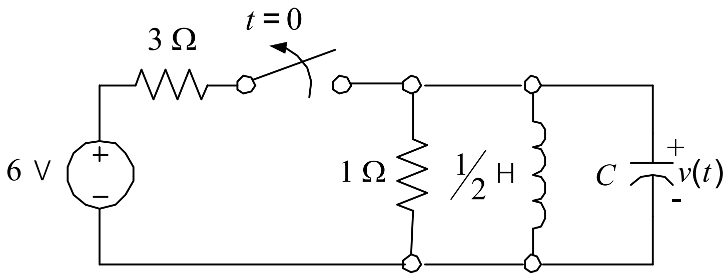
รูปที่ P 8.4

5. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.5 จงหาค่าแรงดัน $v_C(t)$ สำหรับ $t>0$ สมมติว่าวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวเมื่อเวลา $t=0^-$



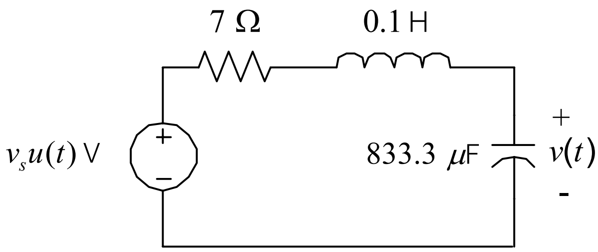
รูปที่ P 8.5

6. สวิทซ์ในวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.6 อยู่ในตำแหน่งปิดวงจรเป็นเวลานานก่อนจะเปิดที่เวลา $t=0$ จงหาค่าและเขียนกราฟของแรงดัน $v(t)$ กำหนด $C=1/4$ F



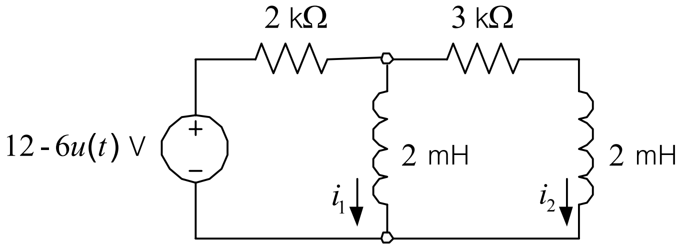
รูปที่ P 8.6

7. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.7 จงหาค่าผลตอบสนองกระตุ้น $v_f(t)$ เมื่อ (ก) $v_s=2$ V (ข) $v_s=0.2t$ V (ค) $v_s=e^{-30t}$ V



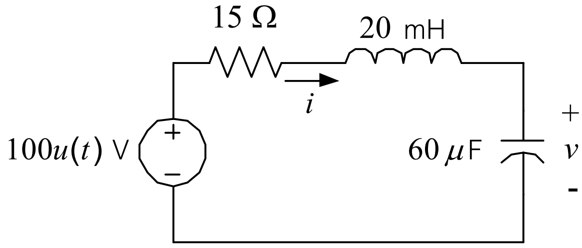
รูปที่ P 8.7

8. สำหรับวงจร RL ดังแสดงในรูป P 8.8 จงหาค่ากระแส $i_1(t)$ และ $i_2(t)$ สมมติว่าวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวเมื่อเวลา $t = 0^-$



รูปที่ P 8.8

9. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.9 จงหาค่าแรงดัน $v(t)$ และกระแส $i(t)$ สำหรับ $t > 0$



รูปที่ P 8.9