

9.6 อิมพีแดนซ์และแอดมิตแตนซ์

ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์กระแสและแรงดันของตัวต้านทาน ตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำในโดเมนความถี่มีลักษณะเดียวกับกฎของโอห์มซึ่งกล่าวไว้สำหรับตัวต้านทาน เราจะนิยามค่าอิมพีแดนซ์ (Impedance) ขององค์ประกอบวงจรว่าเป็นอัตราส่วนของเฟสเซอร์แรงดันต่อเฟสเซอร์กระแส ใช้สัญลักษณ์ \mathbf{Z} โดยที่

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (9.24)$$

สมการ (9.24) เรียกว่าเป็นกฎของโอห์มในโดเมนความถี่

จาก $\mathbf{V} = V_m \angle \phi$ และ $\mathbf{I} = I_m \angle \beta$ เราจะได้

$$\mathbf{Z} = \frac{V_m \angle \phi}{I_m \angle \beta} = \frac{V_m}{I_m} \angle \phi - \beta \quad (9.25)$$

ค่าอิมพีแดนซ์ \mathbf{Z} จะมีขนาด $|\mathbf{Z}|$ และเฟส θ โดยที่

$$|\mathbf{Z}| = \frac{V_m}{I_m}$$

และ

$$\theta = \phi - \beta$$

อิมพีแดนซ์จะมีบทบาทเช่นเดียวกับตัวต้านทานในวงจรตัวต้านทาน และเนื่องจากมันถูกนิยามเป็นอัตราส่วนของเฟสเซอร์แรงดันต่อเฟสเซอร์กระแส ดังนั้นอิมพีแดนซ์จะมีหน่วยโอห์มเช่นเดียวกับตัวต้านทาน

แม้ว่าค่าอิมพีแดนซ์จะเป็นอัตราส่วนของเฟสเซอร์แรงดันต่อเฟสเซอร์กระแส แต่ตัวมันเองไม่ใช่เฟสเซอร์ เป็นเพียงค่าตัวเลขเชิงซ้อนที่ใช้บอกความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฟสเซอร์สองค่า เมื่อเราแปลงค่าอิมพีแดนซ์กลับไปในโดเมนเวลามันจะไม่มี ความหมาย อย่างไรก็ตามการใช้แนวคิดเกี่ยวกับค่าอิมพีแดนซ์จะช่วยให้เราแก้ปัญหาวงจรที่ถูกกระตุ้นด้วยไซนูซอยด์ในสถานะคงตัวได้เหมือนกับการแก้ปัญหาวงจรตัวต้านทาน และเนื่องจากค่าอิมพีแดนซ์เป็นค่าตัวเลขเชิงซ้อน ดังนั้นจึงสามารถเขียนได้หลายรูปแบบเช่นแบบโพลาร์

$$|\mathbf{Z}| \angle \theta$$

แบบเอกโปเนนเชียล

$$Ze^{j\theta}$$

หรือแบบเรกแทนกูลาร์

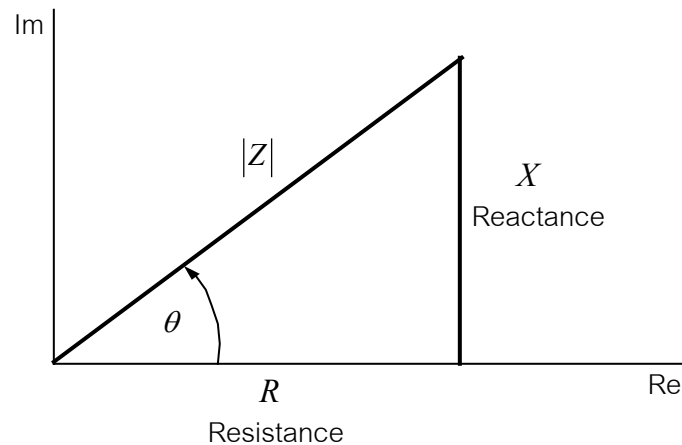
$$R + jX$$

เมื่อ R คือส่วนจริง $R = \text{Re}Z$ เรียกว่าส่วนต้านทาน (Resistive Part) และ X คือส่วนจินตภาพ $X = \text{Im}Z$ เรียกว่าส่วนจินตภาพ (Reactive Part) ของจำนวนเชิงซ้อน Z สังเกตว่าขนาดของ Z เขียนได้สองแบบคือ $|Z|$ และ Z และ

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (9.26)$$

ส่วนเฟส

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X}{R} \quad (9.27)$$



รูปที่ 9.7 การแทนค่าอิมพีแดนซ์ด้วยกราฟบนระนาบเชิงซ้อน

ความสัมพันธ์นี้สรุปได้ดังในกราฟบนระนาบเชิงซ้อน ในรูปที่ 9.7 พิจารณาตัวอย่างของค่าอิมพีแดนซ์

$$Z = 2 + j2$$

จะได้ขนาด

$$|Z| = Z = \sqrt{8}$$

และเฟส

$$\theta = 45^\circ$$

สำหรับองค์ประกอบตัวต้านทาน

$$V = RI$$

ดังนั้นค่าอิมพีแดนซ์ของตัวต้านทาน

$$Z = R \quad (9.28)$$

สำหรับองค์ประกอบตัวเหนี่ยวนำ

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

ดังนั้นค่าอิมพีแดนซ์ของตัวเหนี่ยวนำ

$$\mathbf{Z} = j\omega L \quad (9.29)$$

และสูตรสำหรับองค์ประกอบตัวเก็บประจุ

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

ดังนั้นค่าอิมพีแดนซ์ของตัวเก็บประจุ

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C} \quad (9.30)$$

ตารางที่ 9.4 สรุปค่าอิมพีแดนซ์ขององค์ประกอบวงจรทั้งสาม

ตาราง 9.4 ค่าอิมพีแดนซ์ขององค์ประกอบวงจร

องค์ประกอบ	ค่าอิมพีแดนซ์
ตัวต้านทาน	$\mathbf{Z} = R$
ตัวเหนี่ยวนำ	$\mathbf{Z} = j\omega L$
ตัวเก็บประจุ	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$

ค่าแอดมิตแตนซ์ (Admittance) ก็จะคล้ายกับค่าความนำในวงจรตัวต้านทาน หน่วยของแอดมิตแตนซ์คือ ซีเมนส์ จาก $\mathbf{Z} = Z\angle\theta$ เราจะได้

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{|Z|\angle\theta} = |\mathbf{Y}|\angle-\theta \quad (9.31)$$

และสำหรับแบบเรคแทงกูลาร์ $\mathbf{Z} = R + jX$ จะได้

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB \quad (9.32)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าส่วนจริง G เรียกว่าความนำ ของค่าแอดมิตแตนซ์ ไม่ใช่ส่วนกลับของ R และค่าส่วนจินตภาพ B เรียกว่าซัสเซปแตนซ์ ของค่าแอดมิตแตนซ์ ก็ไม่ใช่ส่วนกลับของ X

สำหรับค่าอิมพีแดนซ์ขององค์ประกอบหนึ่ง $\mathbf{Z} = R + jX$ องค์ประกอบนี้จะมีค่าความเหนี่ยวนำเมื่อค่ารีแอกแตนซ์ X มีค่าเป็นบวก และจะมีค่าความจุเมื่อค่ารีแอกแตนซ์ X มีค่าเป็นลบ เนื่องจากค่า

แอดมิตแตนซ์เป็นส่วนกลับของค่าอิมพีแดนซ์ ดังนั้นเราสามารถกล่าวในทำนองเดียวกันว่า สำหรับค่าแอดมิตแตนซ์ขององค์ประกอบหนึ่ง $\mathbf{Y} = G + jB$ องค์ประกอบนี้จะมีค่าความเหนี่ยวนำเมื่อค่าซัสเซปแตนซ์ B มีค่าเป็นลบ และจะมีค่าความจุเมื่อค่าซัสเซปแตนซ์ B มีค่าเป็นบวก

พิจารณาตัวอย่าง ตัวเก็บประจุมีค่าความจุ $C = 1 \text{ mF}$ ต้องการหาค่าอิมพีแดนซ์และค่าแอดมิตแตนซ์ของตัวเก็บประจุนี้ จะได้ว่า

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

ซึ่งนอกจากค่าความจุแล้วเรายังต้องการค่าความถี่เชิงมุม ω ด้วย สมมติให้ค่า $\omega = 100 \text{ rad/s}$ จะได้

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j0.1} = \frac{10}{j} = -10j = 10 \angle -90^\circ \Omega$$

เพื่อหาค่าแอดมิตแตนซ์ เราใช้

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = j\omega C = j0.1 = 0.1 \angle 90^\circ \text{ S}$$

9.7 การใช้กฎของเคอชชอฟฟ์กับเฟสเซอร์

เราได้ศึกษาการใช้กฎของเคอชชอฟฟ์ในโดเมนเวลามาแล้วในบทที่ 4 พิจารณา KVL รอบวงรอบใดๆ ซึ่งต้องการ

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0 \quad (9.33)$$

สำหรับแรงดันไซน์ชอยด์ในสภาวะคงตัว เราเขียนสมการในรูป cosine ได้

$$V_{m1} \cos(\omega t + \theta_1) + V_{m2} \cos(\omega t + \theta_2) + \dots + V_{mn} \cos(\omega t + \theta_n) = 0 \quad (9.34)$$

ข้อมูลที่ต้องการสำหรับแรงดันใดๆ v_n ได้จากขนาด V_{mn} และเฟส θ_n โดยคิดว่าทราบค่าความถี่เชิงมุม ω แล้วซึ่งจะไม่เปลี่ยนแปลงตลอดการคำนวณ อาศัยสมการของออยเลอร์เขียนสมการ (9.34) ใหม่

$$\text{Re}\{V_{m1}e^{j\omega t}e^{j\theta_1}\} + \text{Re}\{V_{m2}e^{j\omega t}e^{j\theta_2}\} + \dots + \text{Re}\{V_{mn}e^{j\omega t}e^{j\theta_n}\} = 0$$

หรือ

$$\text{Re}\{V_{m1}e^{j\omega t}e^{j\theta_1} + V_{m2}e^{j\omega t}e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn}e^{j\omega t}e^{j\theta_n}\} = 0$$

แยกพจน์ร่วม $e^{j\omega t}$ ออกจะได้

$$\text{Re}\{(V_{m1}e^{j\theta_1} + V_{m2}e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn}e^{j\theta_n})e^{j\omega t}\} = 0$$

เขียนแรงดัน $V_{mp}e^{j\theta_p}$ ในรูปเฟสเซอร์ \mathbf{V}_p

$$\operatorname{Re}\{(V_1 + V_2 + \dots + V_n)e^{j\omega t}\} = 0$$

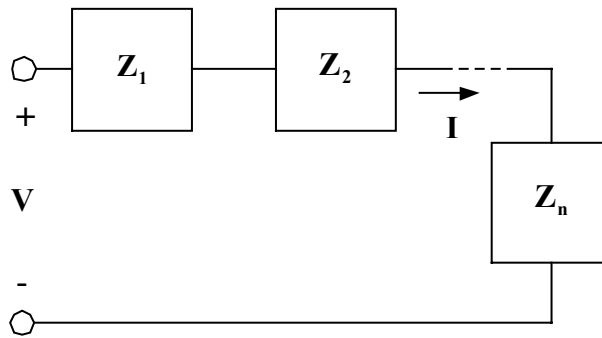
เนื่องจาก $e^{j\omega t}$ ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้ว่า

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0 \quad (9.35)$$

ดังนั้นเราได้ผลสรุปคือผลรวมของเฟสเซอร์แรงดันรอบวงรอบใดๆ มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือกฎแรงดันของเคชชอฟฟ์สามารถใช้ได้ในโดเมนความถี่ ในทำนองเดียวกันจะได้อีกว่ากฎกระแสของเคชชอฟฟ์ก็สามารถใช้ในโดเมนความถี่ได้เช่นเดียวกัน

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = 0 \quad (9.36)$$

และเนื่องจากกฎกระแสและแรงดันของเคชชอฟฟ์สามารถใช้ได้ในโดเมนความถี่ ดังนั้นจะสามารถสรุปได้ว่าเทคนิคและวิธีการที่ได้ศึกษาในบทที่ 4 และบทที่ 5 สำหรับวงจรตัวต้านทานยังคงใช้ได้กับเฟสเซอร์ของกระแสและแรงดัน เช่นเราสามารถให้หลักการซูเปอร์โพสิชัน การแปลงแหล่งจ่าย วงจรสมมูลเทวินินและนอร์ตัน วิเคราะห์โหนดและเมช เป็นต้น ตราบใดที่วงจรเป็นวงจรเชิงเส้น



รูปที่ 9.8 อิมพีแดนซ์ต่อแบบอนุกรม

พิจารณาวงจรที่มีอิมพีแดนซ์ต่ออนุกรมกันดังแสดงในรูปที่ 9.8 เฟสเซอร์กระแส I ไหลผ่านอิมพีแดนซ์แต่ละตัว ใช้ KVL จะได้

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = V$$

เนื่องจาก $V_k = Z_k I_k$ ดังนั้นเราได้

$$(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)I = V \quad (9.37)$$

ดังนั้นค่าอิมพีแดนซ์สมมูลของอิมพีแดนซ์ที่ต่ออนุกรมกันคือผลรวมของค่าอิมพีแดนซ์แต่ละตัวนั่นเอง

ส่วนในกรณีของการต่อแอดมิตแตนซ์ขนานกันดังแสดงในรูปที่ 9.9 จะสามารถหาได้ว่าค่าแอดมิตแตนซ์สมมูลคือ

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n \quad (9.38)$$

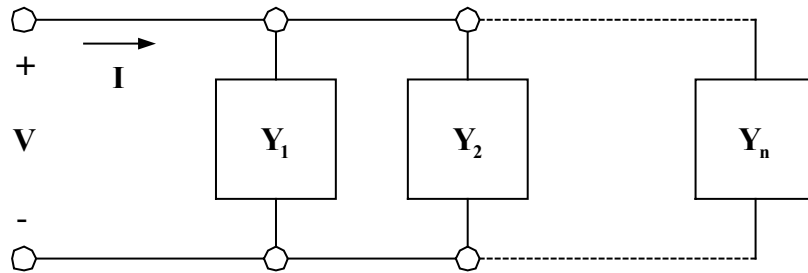
ค่าแอดมิตแตนซ์สมมูลสำหรับการต่อแอดมิตแตนซ์ขนานกันสองตัวคือ

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$

จะได้ค่าอิมพีแดนซ์สมมูลคือ

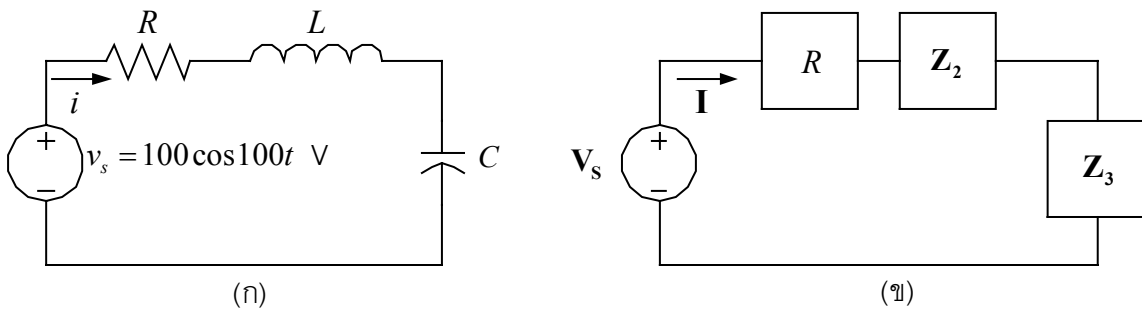
$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad (9.39)$$

หลักการแบ่งกระแสและแรงดันก็ยังคงสามารถใช้กับเฟสเซอร์ของกระแสและแรงดันได้



รูปที่ 9.9 แอดมิตแตนซ์ต่อแบบขนาน

ตัวอย่าง 9.5 พิจารณาวงจร RLC ดังแสดงในรูป Ex 9.5 (ก) เมื่อ $R = 9 \Omega$ $L = 10 \text{ mH}$ และ $C = 1 \text{ mF}$ จงหาค่ากระแสในสภาวะคงตัว i โดยใช้เฟสเซอร์



รูปที่ Ex 9.5

วิธีทำ เราเขียนรูปวงจรใหม่ในรูปของเฟสเซอร์ ดังแสดงในรูป Ex 9.5 (ข) และใช้ KVL รอบเมฆจะได้

$$\mathbf{R}\mathbf{I} + \mathbf{Z}_2\mathbf{I} + \mathbf{Z}_3\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

เมื่อแทนค่า $\omega = 100 \text{ rad/s}$ $C = 1 \text{ mF}$ และ $L = 10 \text{ mH}$ จะได้

$$\mathbf{Z}_2 = j\omega L = j1$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C} = -j10$$

แทนค่าลงในสมการ KVL จะได้

$$(9 + j1 - j10)\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

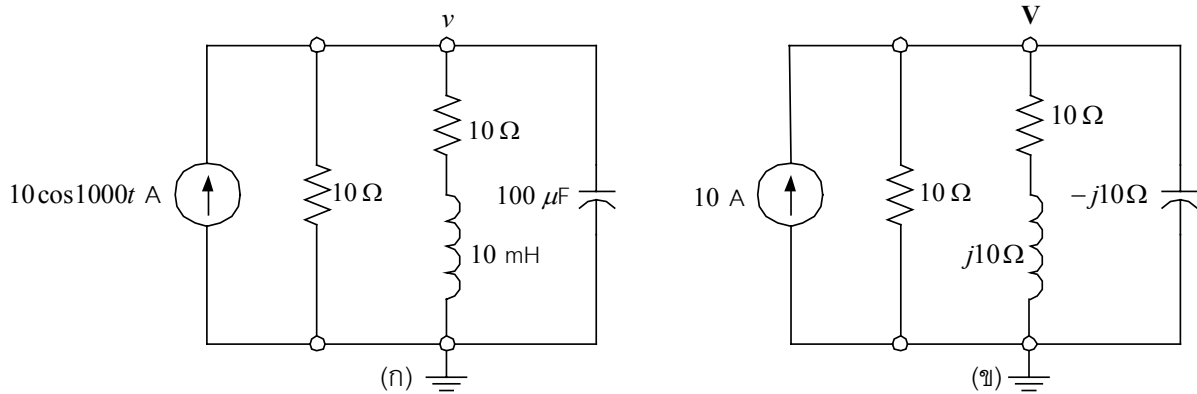
หรือ

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{(9 - j9)} = \frac{100\angle 0^\circ}{9\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 7.86\angle 45^\circ$$

เขียนในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว

$$i = 7.86 \cos(100t + 45^\circ) \text{ A}$$

ตัวอย่าง 9.6 พิจารณาวงจร RLC ดังแสดงในรูป Ex 9.6 (ก) เมื่อ $i_s = 10 \cos 1000t \text{ A}$ $R = 10 \Omega$ $L = 10 \text{ mH}$ และ $C = 100 \mu\text{F}$ จงหาค่าแรงดันในสภาวะคงตัว v โดยใช้เฟสเซอร์



รูปที่ Ex 9.6

วิธีทำ เราเขียนรูปวงจรใหม่ในรูปของเฟสเซอร์ ดังแสดงในรูป Ex 9.6 (ข) และใช้ KCL ที่โนดบนจะได้

$$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V} = \mathbf{I}_s$$

แทนค่า \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_3 และ \mathbf{I}_s ได้

$$\frac{\mathbf{V}}{10} + \frac{\mathbf{V}}{10 + j10} + \frac{\mathbf{V}}{-j10} = 10\angle 0^\circ$$

แก้สมการหาค่าแรงดัน

$$0.1\mathbf{V} + (0.05 - j0.05)\mathbf{V} + j0.1\mathbf{V} = 10$$

$$\mathbf{V} = \frac{10}{0.158\angle 18.4^\circ} = 63.3\angle -18.4^\circ$$

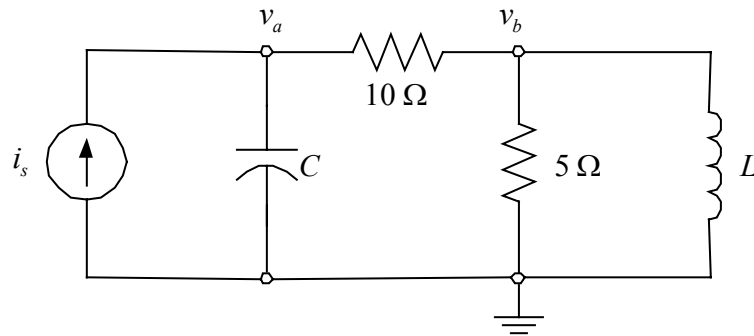
เขียนในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว

$$v = 63.3 \cos(1000t - 18.4^\circ) \text{ V}$$

9.8 การวิเคราะห์ห้วงจรโดยใช้เฟสเซอร์

การวิเคราะห์ห้วงจรในโดเมนความถี่ ใช้ขั้นตอนเช่นเดียวกับวงจรตัวต้านทาน โดยเราจะใช้อิมพีแดนซ์และเฟสเซอร์ของแรงดันและกระแสแทนความต้านทานและฟังก์ชันแรงดันและกระแสในโดเมนเวลา

เนื่องจากสามารถใช้กฎของโอห์มได้ เราใช้ความสัมพันธ์ $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ สำหรับองค์ประกอบวงจรแล้วใช้วิธีวิเคราะห์โหนดหรือเมชต่อไป



รูปที่ 9.10 วงจรตัวอย่าง ต้องการหาค่าแรงดันโหนด v_a และ v_b

ตัวอย่างวิธีการใช้การวิเคราะห์โหนดในโดเมนความถี่ พิจารณาวงจรในรูปที่ 9.10 เมื่อ $i_s = I_m \cos \omega t$ A สำหรับค่า ω L และ C ใดๆ เราสามารถหาค่าอิมพีแดนซ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุได้ เช่น $C = 100 \mu\text{F}$ $L = 5 \text{ mH}$ $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ จะได้

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C} = -j10$$

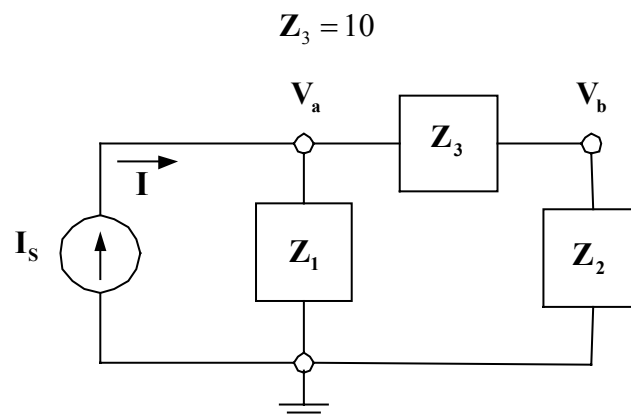
และ

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j5$$

เขียนวงจรใหม่ดังในรูปที่ 9.11 โดยใช้เฟสเซอร์ หาค่าอิมพีแดนซ์ \mathbf{Z}_2 จากการต่อขนานกันของตัวเหนี่ยวนำและความต้านทาน 5Ω โดยจะหาค่าแอดมิตแตนซ์ก่อน

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{5}(1 - j)$$

และ



รูปที่ 9.11 วงจรสมมูลของวงจรในรูปที่ 9.10 ในรูปเฟสเซอร์

ใช้ KCL ที่โหนด a จะได้

$$\frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_3} = \mathbf{I}_s$$

และ KCL ที่โหนด b จะได้

$$\frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_3} + \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_2} = 0$$

เรียบเรียงสมการทั้งสองใหม่

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_a + (-\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_b &= \mathbf{I}_s \\ (-\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_a + (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_b &= 0 \end{aligned} \quad (9.40)$$

หรือเขียนในรูปแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ (Admittance Matrix, \mathbf{Y}) ได้

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3) & -\mathbf{Y}_3 \\ -\mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y} \text{ matrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการหาค่าเฟสเซอร์ \mathbf{V}_a และ \mathbf{V}_b ได้ เช่น ถ้าให้ $I_m = 10 \text{ A}$

$$\mathbf{I}_s = I_m \angle 0^\circ$$

ใช้กฎของคร่อมเมอร์หาค่า \mathbf{V}_a

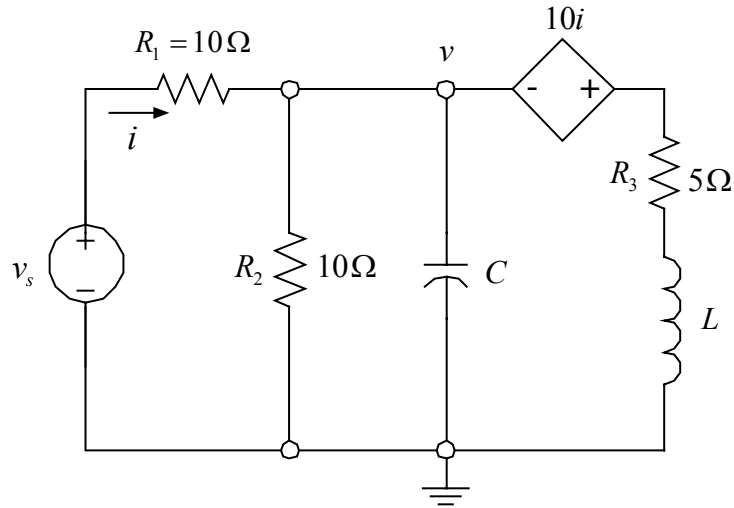
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a &= \frac{100(3-2j)}{4+j} \\ &= \frac{100(3-2j)(4-j)}{17} \\ &= \frac{100}{17}(10-11j) \\ &= 87.5 \angle -47.7^\circ \end{aligned}$$

เขียนในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว

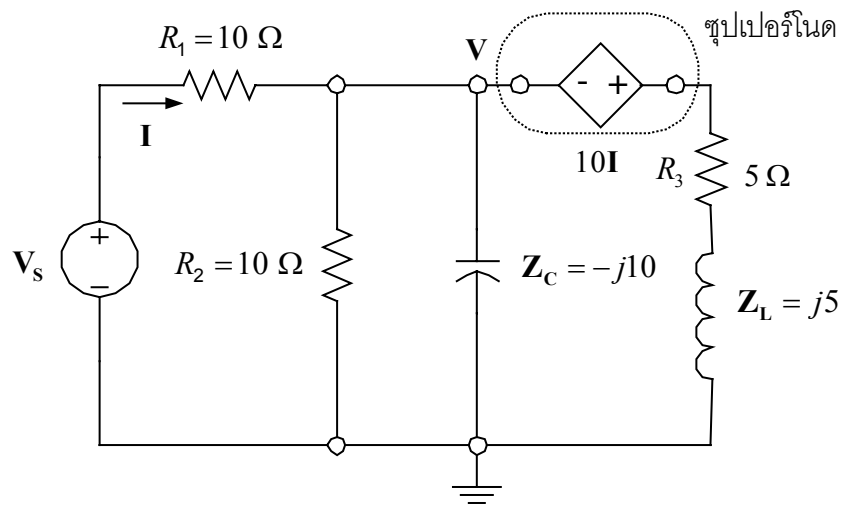
$$v_a = 87.5 \cos(1000t - 47.7^\circ) \text{ V}$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่า แนวทางการวิเคราะห์วงจรโดยวิธีโหนดสามารถนำมาใช้ได้ โดยเราจะใช้ค่าอิมพีแดนซ์และแอดมิตแตนซ์ เฟสเซอร์ของกระแสและแรงดัน เขียนสมการโหนดในรูปเฟสเซอร์ แก้สมการหาค่าเฟสเซอร์ของแรงดันโหนดที่ต้องการ จากนั้นจึงแปลงกลับมาอยู่ในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว

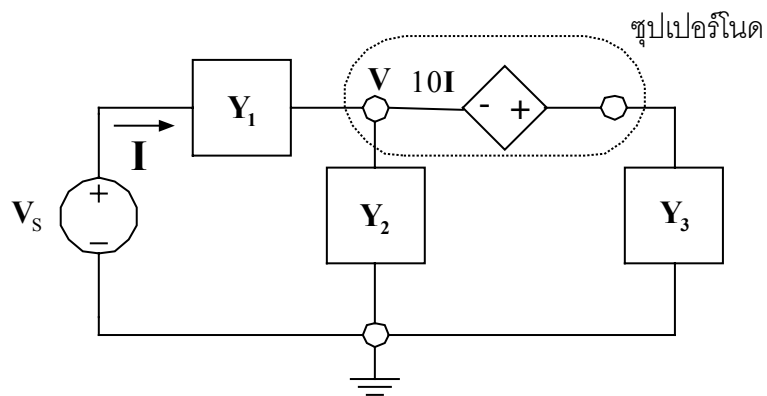
ตัวอย่าง 9.7 พิจารณาวงจร RLC ดังแสดงในรูป Ex 9.7 (ก) เมื่อ $v_s = 10 \cos \omega t \text{ V}$ $L = 0.5 \text{ H}$ และ $C = 10 \text{ mF}$ จงหาค่าแรงดันโหนด v ในสภาวะคงตัวโดยใช้เฟสเซอร์



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ Ex 9.7

วิธีทำ เราเขียนรูปวงจรใหม่ในรูปของเฟสเซอร์ ดังแสดงในรูป Ex 9.7 (ข) โดยที่

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j5$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j10$$

$$\mathbf{Z}_3 = R_3 + \mathbf{Z}_L = 5 + j5$$

และหาค่าแอดมิตแตนซ์ทั้งสาม ดังแสดงในรูป Ex 9.7 (ค)

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_C} = \frac{1}{10}(1 + j)$$

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{1}{50}(5 - j5)$$

สังเกตว่ามีโนดพิเศษหรือซูเปอร์โนดเกิดขึ้น ใช้ KCL ที่ซูเปอร์โนดจะได้

$$\mathbf{Y}_1(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) + \mathbf{Y}_2\mathbf{V} + \mathbf{Y}_3[\mathbf{V} + 10\mathbf{Y}_1(\mathbf{V}_s - \mathbf{V})] = 0$$

เรียบเรียงใหม่

$$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)\mathbf{V} = (\mathbf{Y}_1 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_s$$

แก้สมการหาค่าเฟสเซอร์ของแรงดันโนด

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{Y}_1 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_s}{(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)}$$

แทนค่า

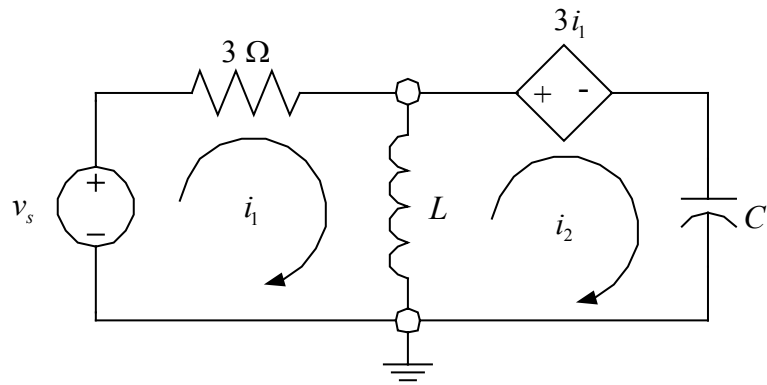
$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \frac{(\mathbf{Y}_1 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)10\angle 0^\circ}{(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)} \\ &= \frac{10j}{2 + j} = \frac{10}{\sqrt{5}}\angle 63.4^\circ\end{aligned}$$

เขียนในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว

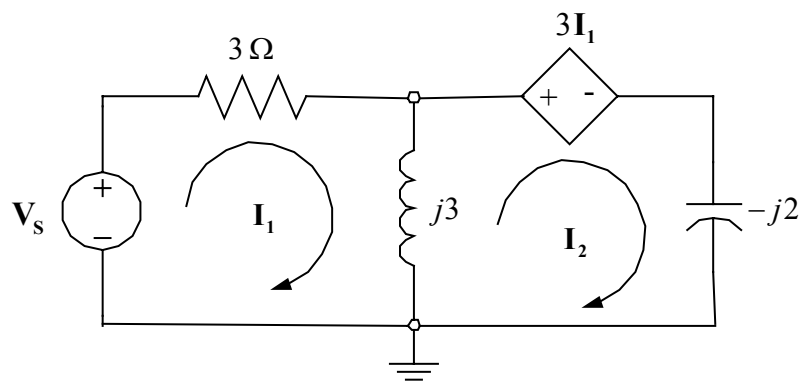
$$v = \frac{10}{\sqrt{5}}\cos(10t + 63.4^\circ) \text{ V}$$

การวิเคราะห์เมซในโดเมนความถี่ ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่าง 9.8 พิจารณาวงจร RLC ดังแสดงในรูป Ex 9.8 (ก) เมื่อ $v_s = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ)\text{V}$ $\omega = 100$ rad/s $L = 30$ mH และ $C = 5$ mF จงหาค่ากระแส i_1 ในสภาวะคงตัวโดยใช้เฟสเซอร์



(ก)



(ข)

รูปที่ Ex 9.8

วิธีทำ เราเขียนรูปวงจรใหม่ในรูปของเฟสเซอร์ ดังแสดงในรูป Ex 9.8 (ข) โดยที่

$$Z_L = j\omega L = j3$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j2$$

$$V_s = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ = 10 + j10$$

เขียน KVL ที่ เมช 1 และเมช 2

$$(3 + j3)I_1 - j3I_2 = V_s$$

$$(3 - j3)I_1 + (j3 - j2)I_2 = 0$$

แก้สมการหาค่าเฟสเซอร์ I_1 โดยใช้กฎของครอมเมอร์

$$I_1 = \frac{(10 + j10)j}{\Delta}$$

เมื่อ คำนวณดีเทอร์มิแนนท์

$$\Delta = (3 + j3)(j) + j3(3 - j3) = 6 + 12j$$

ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(10 + j10)j}{6 + 12j} = 1.05 \angle 71.6^\circ$$

เขียนในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว

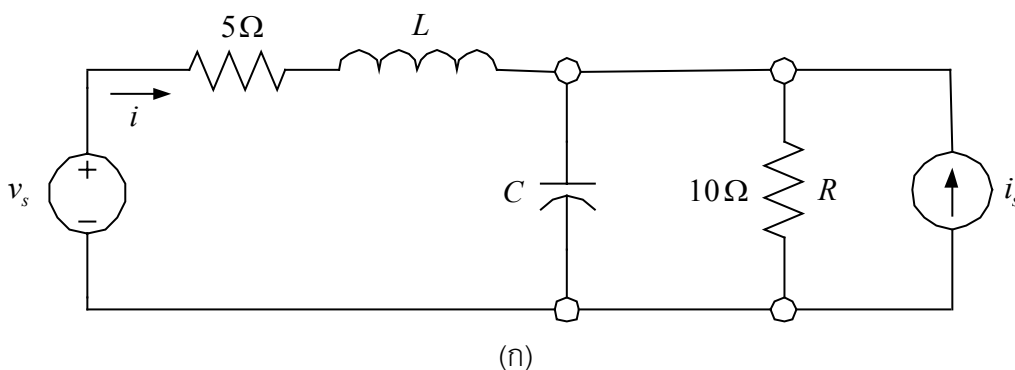
$$i_1 = 1.05 \cos(100t + 71.6^\circ) \text{ A}$$

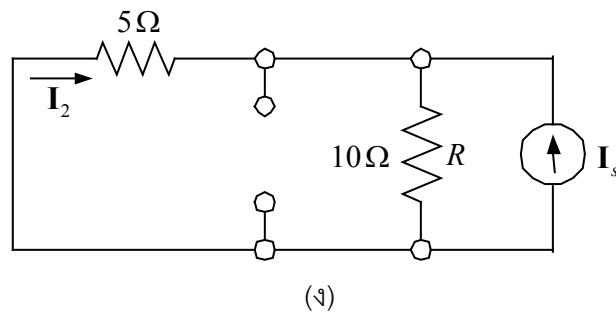
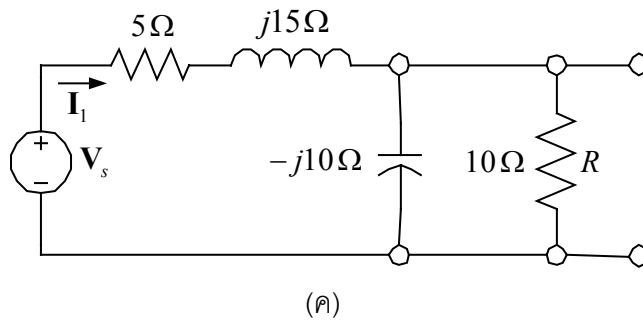
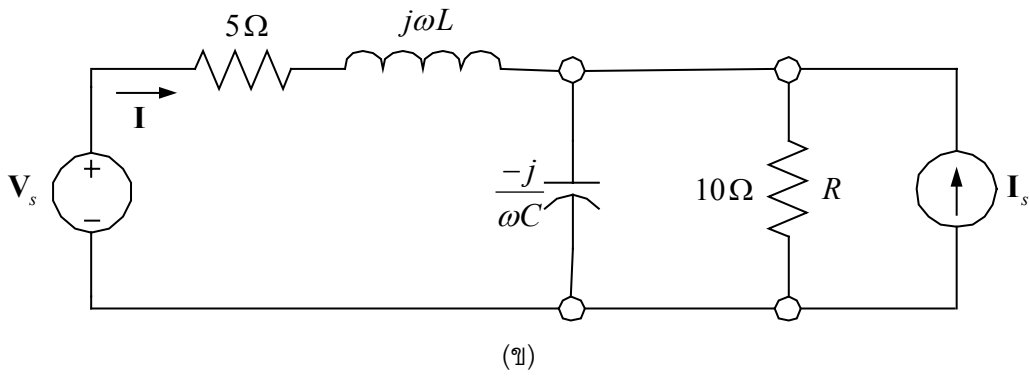
เนื่องจากวงจรที่เราศึกษาเป็นวงจรเชิงเส้น ดังนั้นหลักการซูเปอร์โพสิชันและวิธีการแปลงแหล่งจ่าย รวมทั้งวงจรสมมูลเทวินินและวงจรสมมูลนอร์ตันในรูปของแหล่งจ่ายสมมูลและอิมพีแดนซ์หรือแอดมิตแตนซ์สมมูล ยังคงใช้ได้โดเมนความถี่

เริ่มจากหลักการซูเปอร์โพสิชันอาจกล่าวได้ดังนี้ สำหรับวงจรเชิงเส้นใดๆ ที่ประกอบด้วยแหล่งจ่ายอิสระตั้งแต่สองแหล่งจ่ายขึ้นไป ค่ากระแสหรือแรงดันใดๆ ในวงจรสามารถคำนวณได้จากผลรวมพีชคณิตของกระแสหรือแรงดันที่ได้จากการป้อนแหล่งจ่ายทีละแหล่งจ่าย

ถ้าวงจรเชิงเส้นถูกกระตุ้นด้วยแหล่งจ่ายแบบไซน์ซอชอยด์ที่มีความถี่ ω เดียวกันหลายแหล่งจ่าย เราอาจใช้หลักการซูเปอร์โพสิชันในกรณีนี้ได้ หากแหล่งจ่ายแบบไซน์ซอชอยด์แต่ละแหล่งจ่ายมีความถี่ ω คนละความถี่ เราต้องใช้หลักการซูเปอร์โพสิชันในการรวมผลแรงดันหรือกระแสในวงจร โดยที่วงจรจะมีค่าอิมพีแดนซ์หรือแอดมิตแตนซ์ค่าหนึ่งสำหรับความถี่หนึ่ง และอีกค่าหนึ่งสำหรับอีกความถี่หนึ่ง เราจะหาค่าผลตอบสนองในรูปของเฟสเซอร์ที่แต่ละความถี่ แปลงเป็นโดเมนเวลาแล้วรวมผลจากแต่ละความถี่เข้าด้วยกันใน สังเกตว่าเราจะรวมผลในโดเมนเวลาไม่ใช้การรวมเฟสเซอร์หรือการรวมในโดเมนความถี่

ตัวอย่าง 9.9 พิจารณาวงจร RLC ดังแสดงในรูป Ex 9.9 (ก) เมื่อ $v_s = 10 \cos 10t \text{ V}$ $i_s = 3 \text{ A}$ $L = 1.5 \text{ H}$ และ $C = 10 \text{ mF}$ จงหาค่ากระแส i ในสภาวะคงตัวโดยใช้เฟสเซอร์และหลักการซูเปอร์โพสิชัน





รูปที่ Ex 9.9

วิธีทำ เราเขียนรูปวงจรใหม่ในรูปของเฟสเซอร์ โดยที่

$$\mathbf{V}_s = 10\angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I}_s = 3\angle 0^\circ$$

หาค่าเฟสเซอร์ของกระแส \mathbf{I}_1 ซึ่งเกิดจากแหล่งจ่ายแรงดัน เราทำให้แหล่งจ่ายกระแสไม่มีผลต่อวงจรโดยการแทนแหล่งจ่ายกระแสด้วยเปิดวงจร ดังแสดงในรูป Ex 9.9 (ค)

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_s}{5 + j\omega L + \mathbf{Z}_p}$$

แทนค่าอิมพีแดนซ์ของตัวต้านทานขนานกับตัวเก็บประจุ

$$\mathbf{Z}_p = \frac{\mathbf{Z}_C R}{R + \mathbf{Z}_C} = 5(1 - j)$$

และ $\omega L = 15$ แล้วแก้สมการหาค่า

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{10\angle 0^\circ}{5 + j15 + (5 - j5)} \\ &= \frac{10}{10 + j10} = \frac{10}{\sqrt{200}} \angle -45^\circ \end{aligned}$$

เขียน \mathbf{I}_1 ในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว

$$i_1 = 0.71 \cos(10t - 45^\circ) \text{ A}$$

ต่อมาพิจารณาผลจากแหล่งจ่ายกระแส หาค่าเฟสเซอร์ของกระแส \mathbf{I}_2 โดยทำการลัดวงจรแหล่งจ่ายแรงดัน ดังแสดงในรูป Ex 9.9 (ง)

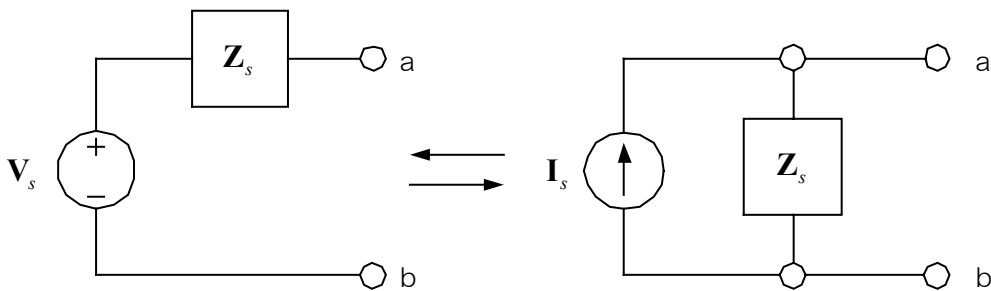
$$\mathbf{I}_2 = -\frac{10}{15}(3) = -2 \text{ A}$$

เขียน \mathbf{I}_2 ในรูปโดเมนเวลาที่สภาวะคงตัว ได้ $i_2 = -2 \text{ A}$

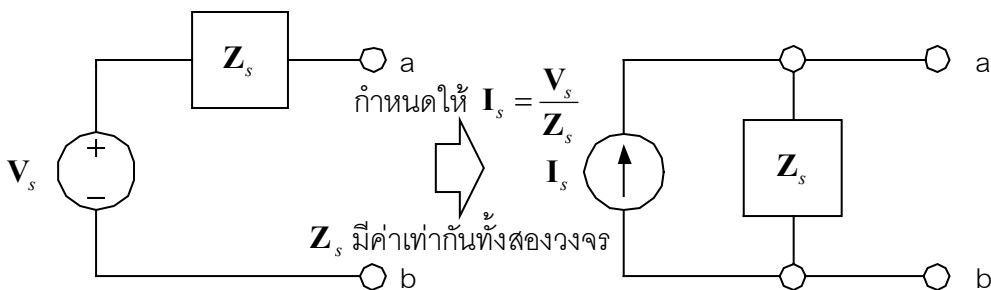
ใช้หลักการการซูเปอร์โพสิชันหากระแสรวมในโดเมนเวลา $i = i_1 + i_2$

$$i = 0.71 \cos(10t - 45^\circ) - 2 \text{ A}$$

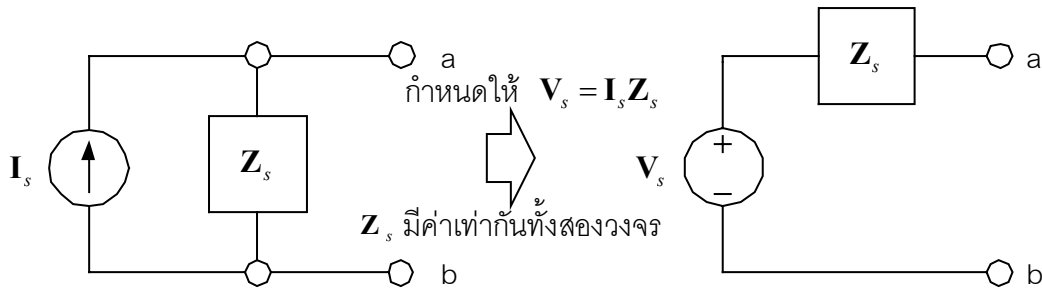
พิจารณาการแปลงแหล่งจ่ายสำหรับโดเมนความถี่ วิธีการที่ได้ศึกษาในวงจรตัวต้านทานสามารถนำมาใช้ได้เช่นเดิม โดยที่การแปลงแหล่งจ่ายจะเกี่ยวกับการแปลงไปมาระหว่างแหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับอิมพีแดนซ์กับแหล่งจ่ายกระแสขนานกับอิมพีแดนซ์ ดังแสดงในรูปที่ 9.12 และวิธีการแปลงได้สรุปไว้ในรูปที่ 9.13



รูปที่ 9.12 แหล่งจ่ายสมมูล



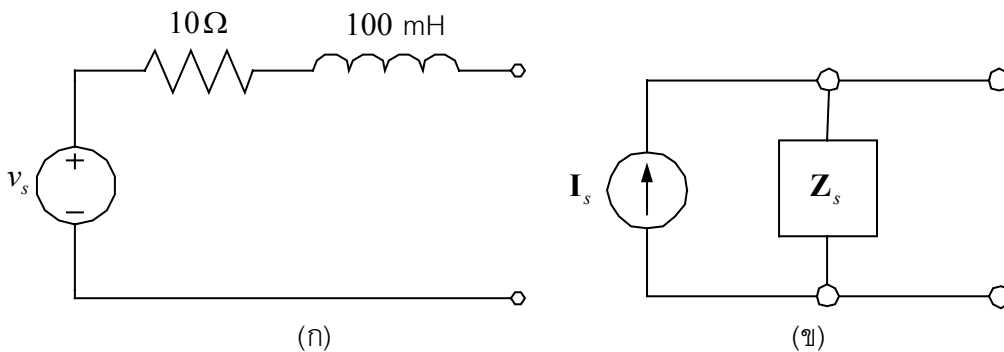
(ก) การแปลงแหล่งจ่ายแรงดันเป็นแหล่งจ่ายกระแส



(ข) การแปลงแหล่งจ่ายกระแสเป็นแหล่งจ่ายแรงดัน

รูปที่ 9.13 สรุปวิธีการแปลงแหล่งจ่าย

ตัวอย่าง 9.10 พิจารณาวงจรดังแสดงในรูป Ex 9.10 (ก) ซึ่งประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำ เมื่อ $v_s = 10 \cos(100t + 45^\circ)$ V จงหาเฟสเซอร์ของแหล่งจ่ายกระแสสมมูล



รูปที่ Ex 9.10

วิธีทำ จากวงจร

$$Z_s = 10 + j10$$

$$V_s = 10 \angle 45^\circ$$

เราหาเฟสเซอร์ของแหล่งจ่ายกระแสได้

$$I_s = \frac{10 \angle 45^\circ}{\sqrt{200} \angle 45^\circ}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{200}} \angle 0^\circ$$

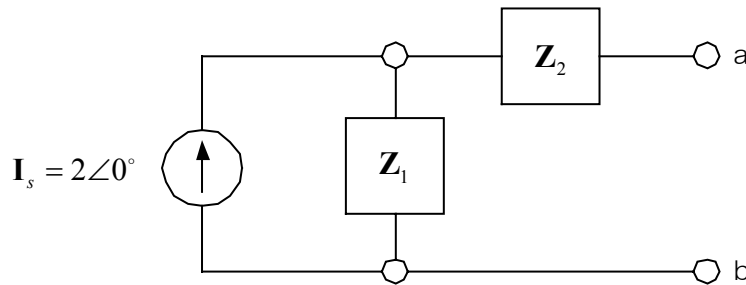
ได้วงจรสมมูลดังแสดงในรูป Ex 9.10 (ข)

ทฤษฎีบทเทวินินและนอร์ตันก็สามารถนำมาใช้ในโดเมนความถี่ได้เช่นเดียวกัน โดยในการหาวงจรสมมูลเทวินินคือการหาเฟสเซอร์ของแรงดันเทวินิน V_t อนุกรมกับอิมพีแดนซ์สมมูล Z_t ดังแสดงในรูปที่ 9.14 โดยมีขั้นตอนสรุปได้ดังนี้

1. แบ่งวงจรส่วนที่ต้องการหาวงจรสมมูล
2. หาค่าเฟสเซอร์ของแรงดันเทวินิน $V_t = V_{oc}$ ซึ่งก็คือแรงดันเปิดวงจรที่ขั้วที่พิจารณา
3. หาค่าอิมพีแดนซ์สมมูล Z_t โดย

- (ก) ทำให้แหล่งจ่ายอิสระทั้งหมดไม่ส่งผลต่อวงจร จากนั้นลดรูปอิมพีแดนซ์จนได้ค่าอิมพีแดนซ์สมมูล
- (ข) ถ้าวางจรมีแหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น หาค่ากระแสลัดวงจร I_{sc} และจะได้อิมพีแดนซ์สมมูล $Z_t = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$
- (ค) ทำให้แหล่งจ่ายอิสระทั้งหมดไม่ส่งผลต่อวงจร ต่อแหล่งจ่ายแรงดันหรือแหล่งจ่ายกระแสทดสอบ หาค่าเฟสเซอร์ V และ I จะได้อิมพีแดนซ์สมมูล $Z_t = \frac{V}{I}$

ตัวอย่าง 9.11 พิจารณาวงจรดังแสดงในรูป Ex 9.11 เมื่อ $Z_1 = 1 + j$ $Z_2 = -j$ จงหาวงจรมมูลเทวินินของวงจรนี้



รูปที่ Ex 9.11

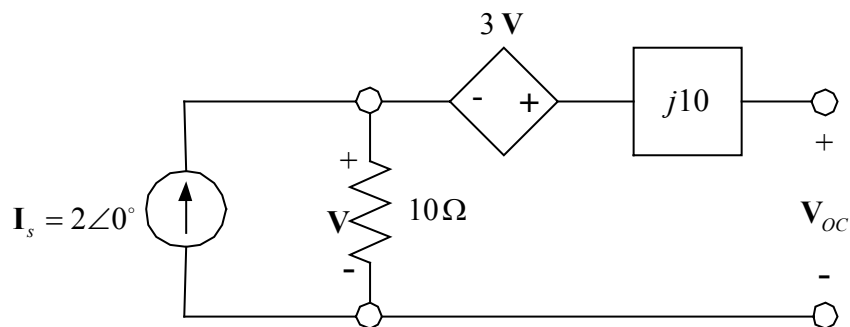
วิธีทำ จากวงจรแรงดันเปิดวงจร

$$V_{oc} = I_s Z_1 = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

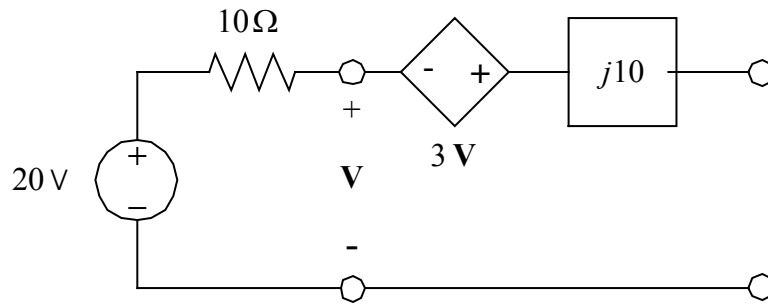
ค่าอิมพีแดนซ์สมมูลได้จากการทำให้แหล่งจ่ายกระแสอิสระไม่ส่งผลต่อวงจรคือแทนด้วยเปิดวงจร จากนั้นลดรูปอิมพีแดนซ์จะได้

$$Z_t = Z_1 + Z_2 = 1 \Omega$$

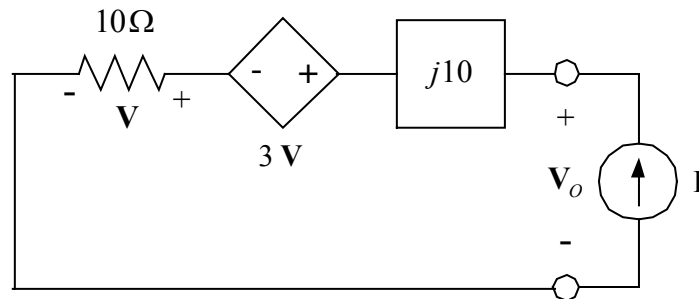
ตัวอย่าง 9.12 พิจารณาวงจรดังแสดงในรูป Ex 9.12 (ก) จงหาวงจรมมูลเทวินินในรูปเฟสเซอร์ของวงจรนี้



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ Ex 9.12

วิธีทำ จากวงจรหาค่าแรงดันสมมูลเทวินิน $V_t = V_{oc}$ โดยค่าแรงดัน

$$V = 10I_s = 20\angle 0^\circ$$

ดังนั้น

$$V_{oc} = 3V + V = 80\angle 0^\circ$$

ทำการแปลงแหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทาน $10\ \Omega$ ในรูป Ex 9.12 (ก) เป็นแหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทาน $10\ \Omega$ ได้ดังแสดงในรูป Ex 9.12 (ข) ทำให้แหล่งจ่ายแรงดันอิสระไม่ส่งผลต่อวงจรคือแทนด้วยปัดวงจร และต่อแหล่งจ่ายกระแสทดสอบดังแสดงในรูป Ex 9.12 (ค) ใช้ KVL จะได้

$$V_o = j10I + 4V = (j10 + 40)I$$

ดังนั้น

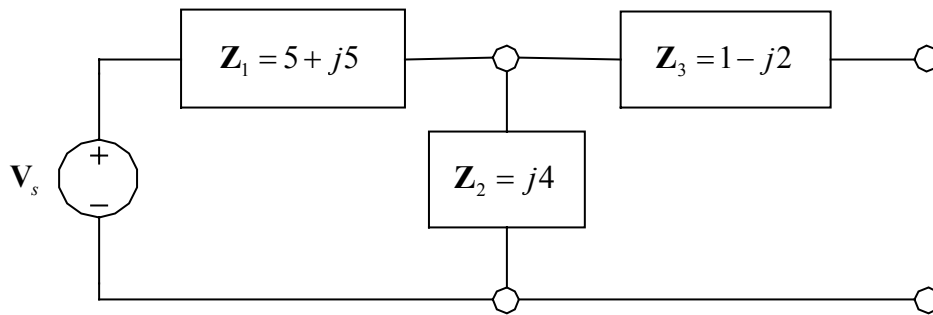
$$Z_t = 40 + j10\ \Omega$$

การหาวงจรสมมูลนอร์ตันคือการหาเฟสเซอร์ของกระแส นอร์ตัน I_N ขนานกับอิมพีแดนซ์สมมูล Z_t ดังแสดงในรูปที่ 9.15 โดยมีขั้นตอนสรุปได้ดังนี้

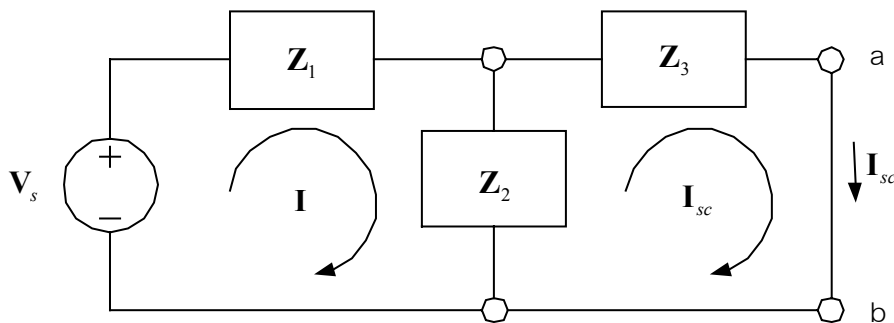
1. แบ่งวงจรส่วนที่ต้องการหาวงจรสมมูล
2. หาค่าเฟสเซอร์ของกระแส นอร์ตัน $I_N = I_{sc}$ ซึ่งก็คือกระแสลัดวงจรที่ขั้วที่พิจารณา
3. หาค่าอิมพีแดนซ์สมมูล Z_t โดย

- (ก) ทำให้แหล่งจ่ายอิสระทั้งหมดไม่ส่งผลต่อวงจร จากนั้นลดรูปอิมพีแดนซ์จนได้ค่าอิมพีแดนซ์สมมูล
- (ข) ถ้าวงจรมีแหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น หาค่ากระแสลัดวงจร I_{sc} และจะได้อิมพีแดนซ์สมมูล $Z_t = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$
- (ค) ทำให้แหล่งจ่ายอิสระทั้งหมดไม่ส่งผลต่อวงจร ต่อแหล่งจ่ายแรงดันหรือแหล่งจ่ายกระแสทดสอบ หาค่าเฟสเซอร์ V และ I จะได้อิมพีแดนซ์สมมูล $Z_t = \frac{V}{I}$

ตัวอย่าง 9.13 พิจารณาวงจรดังแสดงในรูป Ex 9.13 (ก) จงหาวงจรมมูลนอร์ตันในรูปเฟสเซอร์ของวงจรนี้ กำหนด $V_s = 100\angle 0^\circ$



(ก)



(ข)

รูปที่ Ex 9.13

วิธีทำ จากวงจรหาค่าอิมพีแดนซ์สมมูล Z_t

$$Z_t = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

แทนค่า Z_1 Z_2 และ Z_3

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_t &= (1 - j2) + \frac{(5 + j5)(j4)}{(5 + j5) + (j4)} \\ &= (1 - j2) + \frac{20}{53}(2 + j7) \\ &= \frac{93}{53} + j\frac{34}{53} = \frac{1}{53}(93 + j34) \end{aligned}$$

หาค่ากระแสลัดวงจรที่ขั้ว a - b ดังแสดงในรูป Ex 9.13 (ข) ใช้ KVL เขียนสมการของสองเมท

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{I} + (-\mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_{sc} &= \mathbf{V}_s \\ (-\mathbf{Z}_2)\mathbf{I} + (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_{sc} &= 0 \end{aligned}$$

ใช้กฎของคร่อมเมอริหาค่า $\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}_N$

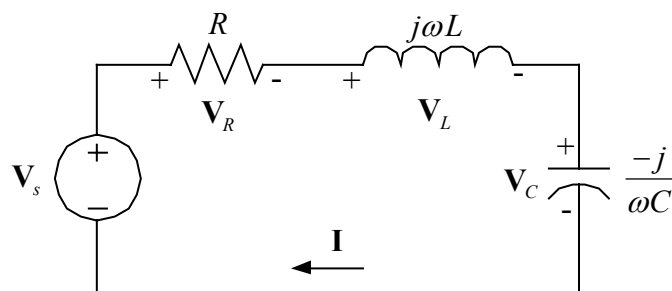
$$\mathbf{I}_{sc} = \frac{\mathbf{Z}_2 \mathbf{V}_s}{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) - \mathbf{Z}_2^2}$$

แทนค่า \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3 และ $\mathbf{V}_s = 100\angle 0^\circ$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{sc} &= \frac{(j4)100}{(5 + j9)(1 + j2) - (-16)} \\ &= \frac{j400}{3 + j19} = \frac{400}{370}(19 + j3) \text{ A} \end{aligned}$$

9.9 การเขียนผังเฟสเซอร์

เฟสเซอร์คือตัวแทนของกระแสหรือแรงดันในโดเมนเวลา โดยทั่วไปเฟสเซอร์จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งสามารถเขียนบนระนาบเชิงซ้อนได้เรียกว่าผังเฟสเซอร์ (Phasor Diagram)



รูปที่ 9.16 วงจร RLC

พิจารณาวงจร RLC ซึ่งมีค่าอิมพีแดนซ์ของแต่ละองค์ประกอบดังแสดงในรูปที่ 9.16 เนื่องจากกระแส \mathbf{I} ไหลผ่านองค์ประกอบทั้งหมดเท่ากัน ดังนั้นเราจะใช้เฟสเซอร์ของกระแส \mathbf{I} เป็นเฟสเซอร์อ้างอิง

$$\mathbf{I} = I\angle 0^\circ$$

และจะได้เฟสเซอร์ของแรงดันดังนี้

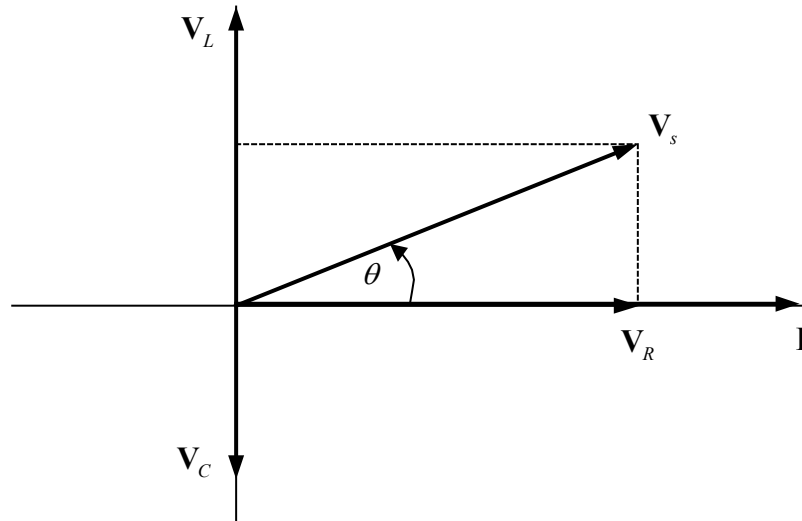
$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} = RI\angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_L = j\omega L\mathbf{I} = \omega LI\angle 90^\circ$$

$$\mathbf{V}_C = \frac{-j}{\omega C}\mathbf{I} = \frac{I}{\omega C}\angle -90^\circ$$

เขียนผังเฟสเซอร์ได้ดังในรูปที่ 9.17 และสังเกตว่า KVL ต้องการให้ผลรวมของแรงดัน

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$



รูปที่ 9.17 ผังเฟสเซอร์ของวงจร RLC ในรูปที่ 9.16

จากผังเฟสเซอร์ในรูปที่ 9.17 จะเห็นว่ากระแสและแรงดันตกคร่อมตัวต้านทานมีเฟสตรงกัน ในขณะที่แรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำจะนำหน้ากระแสอยู่ 90° และแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุจะตามหลังกระแสอยู่ 90° สำหรับค่าตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุค่าหนึ่ง จะมีความถี่ ω ที่ทำให้ขนาดเฟสเซอร์ของแรงดันเท่ากัน

$$|\mathbf{V}_L| = |\mathbf{V}_C|$$

ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

หรือที่ค่าความถี่

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

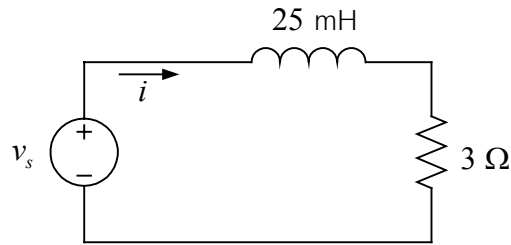
ที่ความถี่นี้ขนาดของเฟสเซอร์ของแรงดันตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุจะเท่ากันและชี้ในทิศทางตรงข้าม ดังนั้นจะหักล้างกันพอดี เหลือแต่แรงดันตกคร่อมตัวต้านทานหรือ

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_R$$

ซึ่ง V_s และ V_R จะมีเฟสตรงกัน เราเรียกเงื่อนไขแบบนี้ว่าเกิดการเรโซแนนซ์ (Resonance) ขึ้นในวงจร

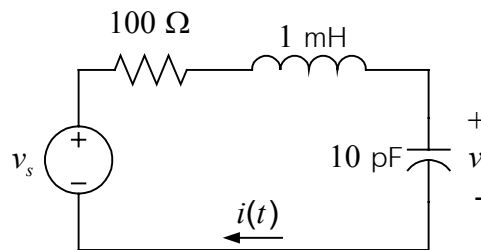
9.10 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาผลตอบสนองของกระแสด้าน i สำหรับวงจร RL ในรูป P9.1 เมื่อ $v_s(t) = 10 \cos 300t$ V



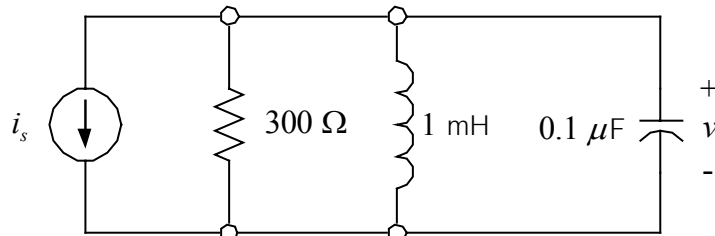
รูปที่ P 9.1

2. จงหาค่ากระแส $i(t)$ สำหรับวงจร RLC ในรูป P9.2 เมื่อ $v_s(t) = 0.1 \cos(10^7 t + 90^\circ)$ V



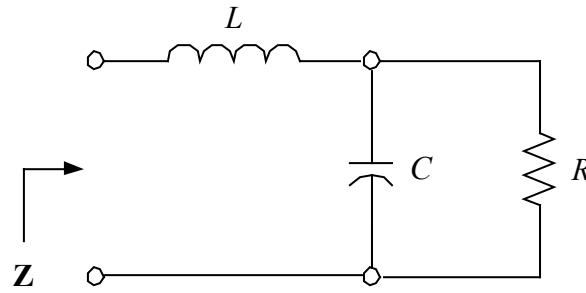
รูปที่ P 9.2

3. จงหาค่าแรงดัน $v(t)$ สำหรับวงจร RLC ในรูป P9.3 เมื่อ $i_s(t) = 5 \cos(10^5 t - 120^\circ)$ V



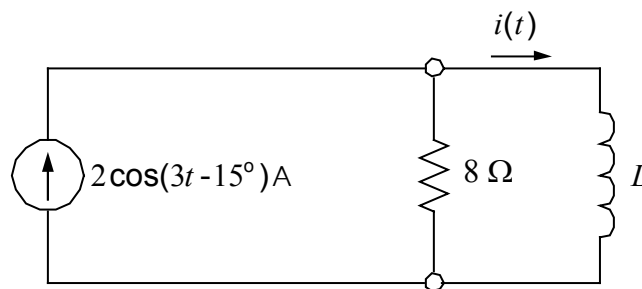
รูปที่ P 9.3

4. แรงดันรวม v เกิดจากการต่ออนุกรมของแรงดัน v_1 และ v_2 นั่นคือ $v = v_1 + v_2$ ถ้า $v_1 = 150 \cos(377t - \pi/6)$ V และ $V_2 = 200 \angle 60^\circ$ V จงหาค่าแรงดันรวม v
5. พิจารณาวงจร RLC ในรูป P9.5 เมื่อ $R = 10 \text{ k}\Omega$ และความถี่ $f = 10 \text{ kHz}$ จงหาค่าความเหนี่ยวนำ L และค่าความจุ C ที่จะทำให้ค่าอิมพีแดนซ์ $Z = 100 + j0 \Omega$



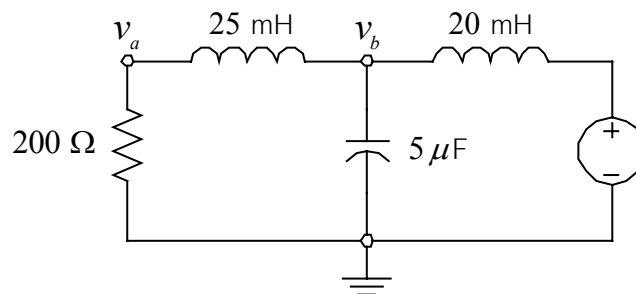
รูปที่ P 9.5

6. จากวงจร RLC ในรูป P9.6 จงหาค่าคงที่ B และค่าความเหนี่ยวนำ L เมื่อ $i(t) = B \cos(3t - 51.87^\circ)$ A



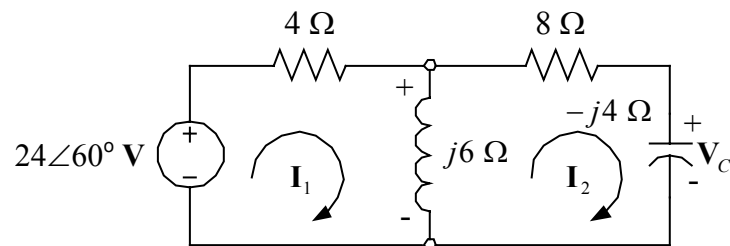
รูปที่ P 9.6

7. จากวงจร RLC ในรูป P9.7 จงหาค่าแรงดันโหนดทั้งสองคือ $v_a(t)$ และ $v_b(t)$ เมื่อ $v_s(t) = 1.2 \cos 4000t$ V



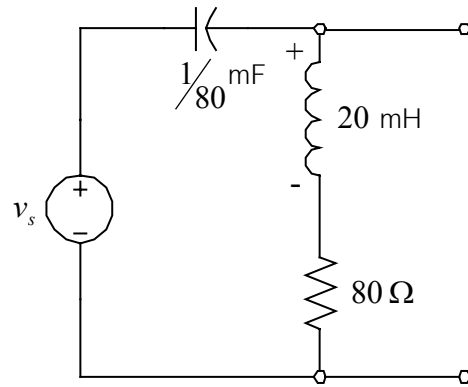
รูปที่ P 9.7

8. จากวงจร RLC ในรูป P9.8 จงหาค่าเฟสเซอร์ของกระแสเมช I_1 I_2 แรงดัน V_L และ V_C โดยใช้ KVL และกฎการวิเคราะห์เมช



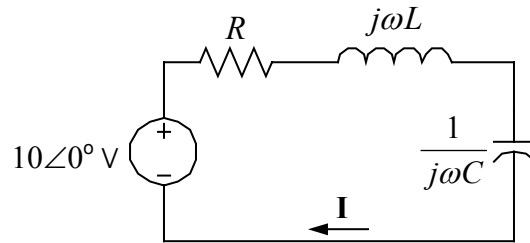
รูปที่ P 9.8

9. จงหาวงจรมมูลเทวินินของวงจรในรูป P9.9 เมื่อ $v_s(t) = 5 \cos(4000t - 30^\circ) \text{ V}$



รูปที่ P 9.9

10. พิจารณาวงจร RLC ในรูป P9.10 เมื่อ $R = 10 \Omega$ $C = 100 \mu\text{F}$ $L = 1 \text{ mH}$ และ $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ จงหาค่าเฟสเซอร์ของกระแส \mathbf{I} และเขียนกราฟฝั่งเฟสเซอร์ของกระแสและแรงดันต่างๆ



รูปที่ P 9.10