

Fluid Mechanics

Chapter 3

Elementary Fluid Dynamics

The Bernoulli Equation

Asst.Prof.Denpong Soodphakdee

มหาวิทยาลัยขอนแก่น
Department of Mechanical Engineering



Newton's Second Law

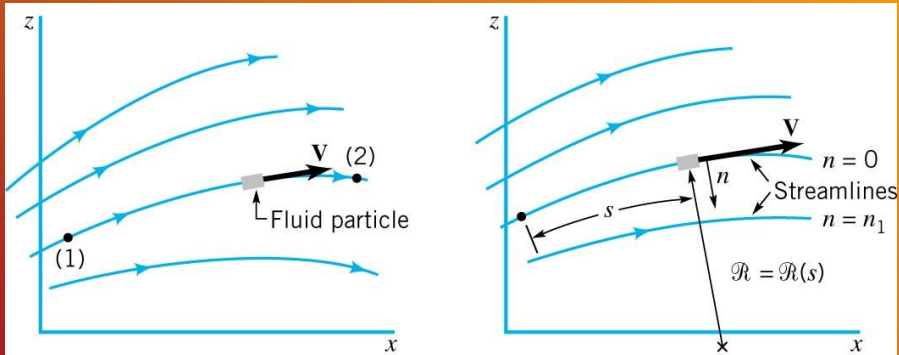
- ♦ The Bernoulli equation may be the **most used and abused** equation in fluid mechanics.
- ♦ Inviscid fluid flow is governed by pressure and gravity forces.

$$(\text{Net pressure force on particle}) + (\text{net gravity force on particle}) = (\text{particle mass}) \times (\text{particle acceleration})$$



Newton's Second Law

- Fluid particles accelerate normal to and along streamlines.



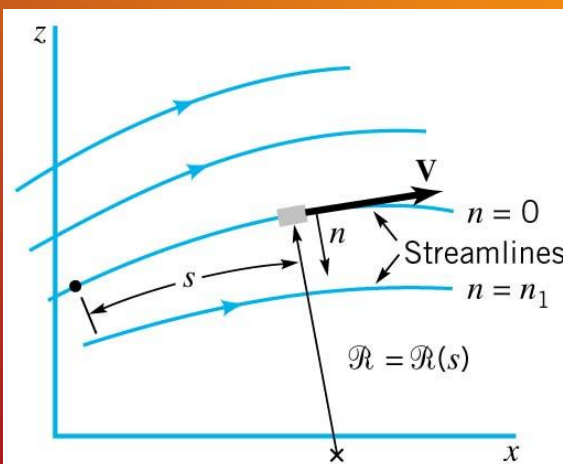
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[3]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



Newton's Second Law



Acceleration in streamlines direction, s

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

$$a_s = V \frac{\partial V}{\partial s}$$

Acceleration in normal direction, n

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

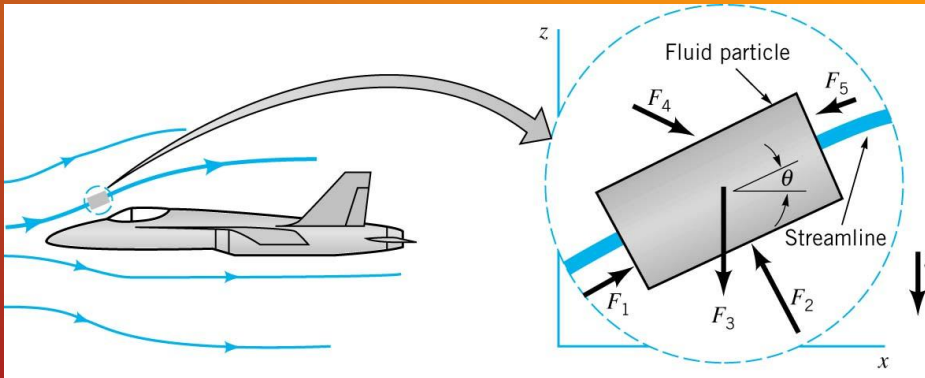
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[4]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



Newton's Second Law



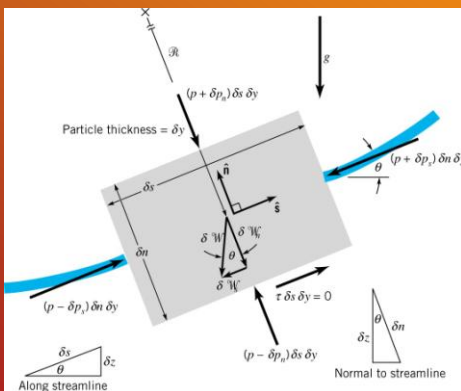
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[5]

ศศ.ดร.เด่นพงษ์ สุดภักดี



$F = ma$ Along a Streamline



The component of Newton's second law along the streamline direction, s .

$$\begin{aligned}\sum \delta F_s &= \delta m a_s \\ &= \delta m V \frac{\partial V}{\partial s} \\ &= \rho \delta \forall V \frac{\partial V}{\partial s}\end{aligned}$$

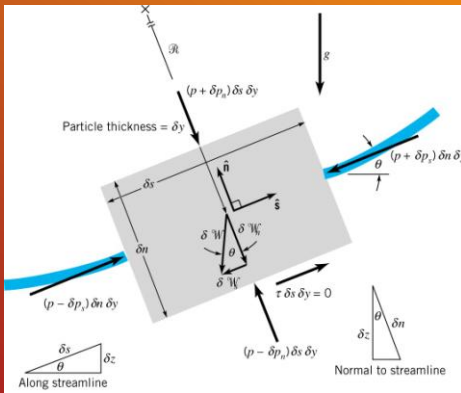
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[6]

ศศ.ดร.เด่นพงษ์ สุดภักดี



$F = ma$ Along a Streamline



The component of weight along a streamline depends on the streamline angle.

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{W}_s &= \delta \mathcal{W} \sin \theta \\ &= -\gamma \delta V \sin \theta\end{aligned}$$

In this case, since the particle is small, one-term Taylor series expansion for the pressure field is used as

$$\delta p_s \approx \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2}$$

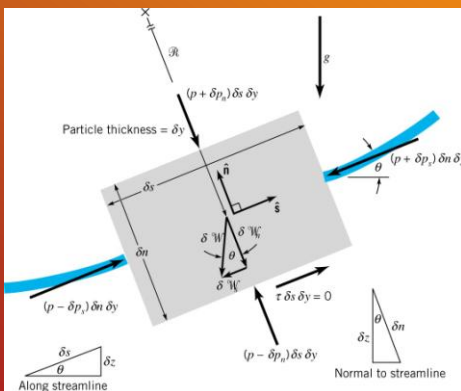
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[7]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



$F = ma$ Along a Streamline



The net pressure force on a particle is determined by the pressure gradient.

$$\begin{aligned}\delta F_{ps} &= (p - \delta p_s) \delta n \delta y - (p + \delta p_s) \delta n \delta y \\ &= -2\delta p_s \delta n \delta y \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta n \delta y \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s} \delta V\end{aligned}$$

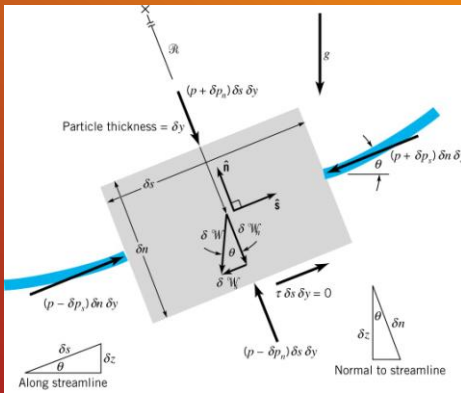
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[8]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



$F = ma$ Along a Streamline



The net force acting in the streamline direction is given by

$$\begin{aligned}\sum \delta F_s &= \delta \mathcal{W}_s + \delta F_{ps} \\ &= \left(-\gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta V\end{aligned}$$

Combine with Newton's second law

$$-\gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho a_s$$

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[9]

ผศ.ดร.เด่นพงษ์ สุดภักดี



Bernoulli Equation

- ✦ Bernoulli equation can be obtained by integrating $F = ma$ along a streamline.

since from graphic $\sin \theta = \frac{dz}{ds}$ and $V \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{ds}$

$$-\gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2} \rho \frac{d(V^2)}{ds}$$

simplify $dp + \frac{1}{2} \rho d(V^2) + \gamma dz = 0$ (along streamline)

simplify $\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = C$ (along streamline)

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[10]

ผศ.ดร.เด่นพงษ์ สุดภักดี



Bernoulli Equation



- It is impossible to integrate the pressure term because the density may not be constant due to its variation with pressure.
- For additional assumption of incompressible fluid which density is assume to be constant, the simple representation of previous equation for **steady, inviscid, incompressible** flow is

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = \text{constant along stramline}$$



$F = ma$ Normal to a Streamline

- Using similar approach as for $F = ma$ along a streamline.

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{V^2}{R} dn + gz = \text{constant across the stramline}$$

- For additional assumption of incompressible fluid which density is assume to be constant, the simple representation of previous equation for **steady, inviscid, incompressible** flow is

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = \text{constant across the stramline}$$



Bernoulli Equation

- ◆ The Bernoulli equation can be written in terms of heights called **heads**.

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constant on a streamline}$$



Static, Stagnation, Dynamic, and Total Pressure

- ◆ Each term in the Bernoulli equation can be interpreted as a form of pressure.

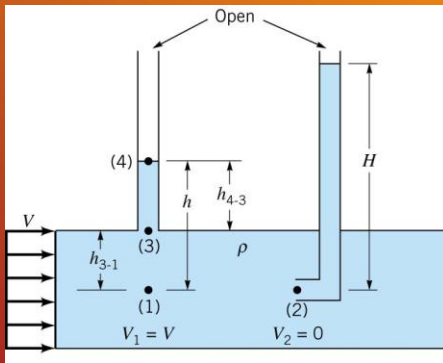
First term, $p \Rightarrow$ static pressure

Second term, $\rho V^2/2 \Rightarrow$ dynamic pressure

Third term, $\gamma z \Rightarrow$ hydrostatic pressure



Static, Stagnation, Dynamic, and Total Pressure



- Stagnation pressure is the pressure that decelerates flow to a zero velocity.
- Stagnation pressure is greater than static pressure by an amount of dynamic pressure.

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2$$

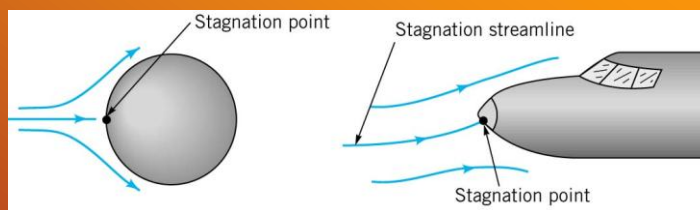
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[15]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



Static, Stagnation, Dynamic, and Total Pressure



Total pressure

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = p_T \quad \text{constant along a streamline}$$

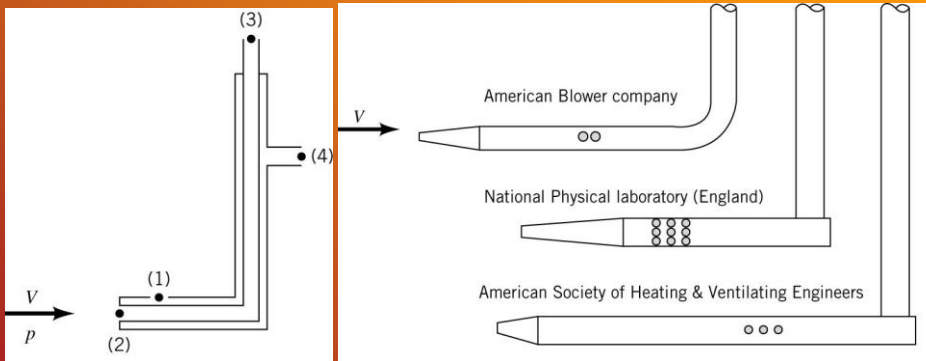
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[16]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



Static, Stagnation, Dynamic, and Total Pressure



ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[17]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



Example of Use of the Bernoulli Equation

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

- ◆ Free jets
- ◆ Confined flows
- ◆ Flowrate measurement

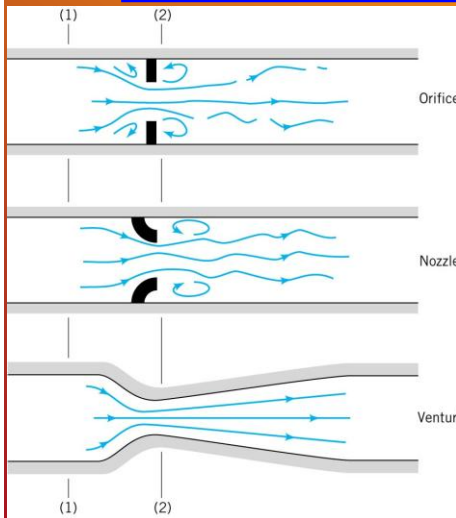
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[18]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



Flowrate Measurement



$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - (A_2/A_1)^2 \right]}}$$

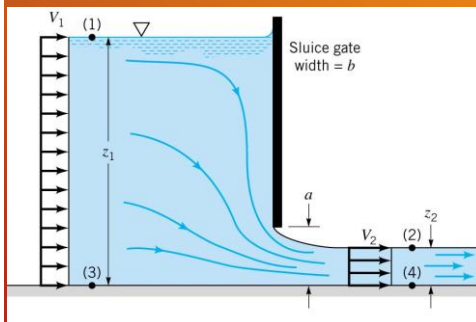
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[19]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์



Flowrate Measurement



$$Q = z_2 b \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}}$$

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

[20]

ศาสตราจารย์สุศักดิ์