

บทที่ 1

นิยามและกฎเบื้องต้น และ การแยกตัวประกอบ

ระบบจำนวน (Number System)

1. จำนวนกับตัวเลข (Number and Numerical)

จำนวน หมายถึง ปริมาณเพื่อบอกให้ทราบว่า “มาก” หรือ “น้อย”

ตัวเลข คือ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวน

2. การแบ่งชั้นของจำนวน (Classification of Number)

จำนวนสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ จำนวนจริง และ จำนวนเชิงซ้อน

2.1 จำนวนจริง (Real Number)

ระบบจำนวนจริงสามารถแบ่งย่อยได้ดังนี้

2.1.1 จำนวนตรรกยะ (Rational Number)

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปของเศษส่วนได้ โดยที่เศษและส่วนเป็นเลขจำนวนเต็ม

จำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ ได้แก่

1) จำนวนเต็ม (Integers) แบ่งได้เป็น

1.1) จำนวนเต็มบวก (Positive Integers) หรือ จำนวนธรรมชาติ (Natural Numbers)

ได้แก่ 1, 2, 3, 4, ...

1.2) จำนวนเต็มลบ (Negative Integers) ได้แก่ -1, -2, -3, ...

1.3) จำนวนเต็มศูนย์ (Zero) จำนวนศูนย์มีคุณสมบัติว่า

- เลขจำนวนใดที่บวกกับศูนย์จะต้องได้เท่ากับตัวมันเอง
- เลขจำนวนใดที่คูณกับศูนย์จะต้องได้เท่ากับศูนย์
- เลขจำนวนใด (ที่ไม่เท่ากับศูนย์) มาหารศูนย์ ผลลัพธ์ต้องเท่ากับศูนย์
- ศูนย์หารจำนวนใดๆ (ไม่เท่ากับศูนย์) มีค่าเท่ากับ อนันต์ (Infinity)

2) จำนวนเศษส่วน (Fraction)

คือจำนวนที่อยู่ในรูปของผลหารของจำนวนเต็ม 2 จำนวน และ ผลลัพธ์ไม่สามารถเขียนในรูปจำนวนเต็มได้

2.1.2 จำนวนอตรรกยะ (Irrational Numbers)

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่มีเศษ และ ส่วนเป็นจำนวนเต็มได้ เช่น $\sqrt{2}, \pi, e, \sqrt[3]{5}$ เป็นต้น

2.2 จำนวนเชิงซ้อน (Imaginary Number)

จำนวนเชิงซ้อน หรือ จำนวนสมมติ คือ จำนวนที่ไม่สามารถหาค่าจริงได้ เช่น $\sqrt{-1}$ จำนวนเชิงซ้อนมีประโยชน์และใช้มากในการคำนวณในทางคณิตศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ หน่วยของจำนวนเชิงซ้อน คือ $\sqrt{-1}$ โดยทั่วไปเขียนแทนด้วย i

พจน์ (Term)

พจน์หรือเทอม หมายถึง เลขจำนวนแต่ละจำนวน หรือ ตัวอักษรที่เป็นสัญลักษณ์แทนตัวเลขแต่ละจำนวน

พจน์พจน์หนึ่ง ประกอบด้วย ผลคูณหรือผลหารของเลขจำนวน กับ ตัวอักษร ซึ่งเขียนแทนจำนวน (หรือตัวแปรนั่นเอง) เช่น $3xy, x^2, \frac{9y}{4x^5}$ เป็นต้น

พจน์ (Term) สามารถแบ่งได้ 2 ชนิด คือ พจน์เหมือน และ พจน์ไม่เหมือน

$8x, 12x, -9x, ax$ ทั้งหมดเป็นพจน์เหมือน โดยพิจารณาที่ x เป็นหลัก การพิจารณาพจน์เหมือนให้พิจารณาที่รูปอักษรที่ซ้ำกัน

$2a, 8b, 9c, 12d$ ทั้งหมดเป็นพจน์ไม่เหมือน

นิพจน์ (Expression)

นิพจน์ หมายถึง จำนวนหนึ่งๆ ซึ่งประกอบด้วยหลายๆพจน์เชื่อมกัน โดยมีเครื่องหมายบวก (+) หรือ ลบ (-) เป็นตัวเชื่อม เช่น $x^2 + y^2 + 3$

ตัวประกอบ (Factors)

ตัวประกอบ คือ ตัวที่คูณกันแล้ว ทำให้เกิดผลคูณขึ้น เช่น $3xy$ มีตัวประกอบ คือ 3, x, y

เช่น $x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$

$x^2 + 4x - 21$ เป็นผลคูณของ $(x + 7)$ และ $(x - 3)$ ดังนั้น $(x + 7)$ และ $(x - 3)$ เป็นตัวประกอบของ $x^2 + 4x - 21$

สัมประสิทธิ์ (Coefficient)

สัมประสิทธิ์ คือ ตัวประกอบตัวหนึ่งของพจน์ เช่น $9xy^2$ 9 เป็นสัมประสิทธิ์ของ xy^2 , $9x$ เป็นสัมประสิทธิ์ของ y^2 , $9y^2$ เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

กำลัง และ ดัชนี (Power and Exponent of Power)

ผลคูณที่เกิดจากการคูณกันของตัวประกอบหลายๆตัว ซึ่งทุกตัวมีค่าเท่ากันนั้นเรียกว่า กำลัง (Power) ของจำนวนนั้นๆ เช่น

$6 \times 6 \times 6$ เรียกว่า กำลังที่ 3 ของ 6 สามารถเขียนได้ในรูปของ 6^3 3 เรียกว่า ดัชนี

$a \times a \times a \times \dots \times a$ (n จำนวน) $= a^n$, ดัชนี เท่ากับ n

กฎของเลขดัชนี (Laws of Exponent)

ถ้า m และ n เป็นจำนวนบวก , a และ b เป็นเลขจำนวนจริง แล้ว กฎของเลขดัชนีมีดังนี้

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ if $a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ if $b \neq 0$

กฎเกณฑ์พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ควรรู้

1. $(a+b)c = ac+bc$
2. $0+a = a$ และ $1 * a = a$
3. ถ้า $z+a = a$ แล้ว $z = 0$
4. ถ้า $a+b = a+c$ แล้ว $b = c$
5. แต่ละค่าของ a ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์จะต้องมีผลลัพธ์ค่าเดียวเท่านั้น $a+x = 0$
6. สำหรับค่า a และ b จะต้องมี X ค่าเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a+x = b$
7. สำหรับทุกค่าของ a ; $a * 0 = 0 = 0 * a$
8. ถ้า b มีคุณสมบัติว่า $ab = a$ สำหรับทุกค่าของ a แล้ว จะต้องได้ว่า $b = 1$
9. สำหรับทุกค่าของ a และ b ; $(-a)(-b) = ab$
10. ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

กฎการบวกและการคูณ

1. $a+b = b+a$
2. $a+b+c = a+(b+c) = (a+b)+c$
3. $a*b = b*a$
4. $a*b*c = a*(b*c) = (a*b)*c$
5. $a*(b+c) = ab + ac$

การบวกนิพจน์

หลัก $\Rightarrow$ “รวมพจน์ที่เหมือนกัน เข้าด้วยกัน”

เพื่อความสะดวก ควรจัดนิพจน์เป็นแถวๆ และ ให้พจน์เหมือนอยู่ตรงกัน

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $(7x + 3y^2 - 4xy) + (3x - 2y^3 + 7xy) + (2xy - 5x - 6y^3)$

การคูณพจน์

1. การคูณ เมื่อตัวตั้งและตัวคูณมีพจน์เดียว

- หลัก $\Rightarrow$
1. เครื่องหมาย คูณ เครื่องหมาย
 2. คูณตัวสัมประสิทธิ์ เข้าด้วยกัน
 3. พจน์ที่ไม่เหมือนคูณเข้าด้วยกัน
 4. พจน์ที่เหมือนกัน เมื่อคูณเข้าด้วยกัน ให้เอากำลังมาบวกกัน

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $(-3x^2y^3z) \cdot (2x^4y) \cdot (-4xy^4z^2)$

2. การคูณเมื่อตัวตั้งมีหลายพจน์ และ ตัวคูณมีพจน์เดียว

ให้ยึดหลักเช่นเดียวกับข้อ 1

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $(3xy - 4x^3 + 3xy^2) \cdot (5x^2y^4)$

3. การคูณเมื่อตัวตั้งและตัวคูณมีหลายพจน์

หลัก $\Rightarrow$ “ให้คูณแต่ละพจน์ของตัวตั้ง ด้วยแต่ละพจน์ของตัวคูณ เพื่อความสะดวก มักจัดกำลังของตัวตั้ง และ ตัวคูณจากมากไปหาน้อย หรือ น้อยไปหามาก”

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $(-3x + 9 + x^2) \cdot (3 - x)$

การหารนิพจน์

1. การหารนิพจน์ด้วยพจน์เดียว

หลัก $\Rightarrow$ “ให้อาตัวหาร หาร ตัวตั้งทีละพจน์ แล้ว เขียนผลลัพธ์เรียงกันไปพร้อมทั้งเครื่องหมาย”

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\frac{3x^3y + 16xy^2 - 12x^4yz^4}{2x^2yz}$

2. การหารนิพจน์ด้วยนิพจน์

1. จัดลำดับกำลังของตัวอักษรตัวใดตัวหนึ่งร่วมกันทั้งตัวตั้งและตัวหาร โดยเรียงจากมากไปน้อย
2. เอาตัวหารตัวแรกหารตัวตั้งตัวแรก แล้ว เอาผลหารใส่ที่ผลลัพธ์
3. เอาผลหารคูณที่ตัวหารทั้งหมด ใส่ไว้ใต้ตัวตั้งแล้วลบผลที่ได้ออกจากตัวตั้ง ชักพจน์ที่เหลือลงมา
4. เอาตัวตั้งตัวใหม่ ซึ่งเหลือจากข้อ 2 หารผลหารต่อไป โดยดำเนินการตามกฎข้อ 2 และ ข้อ 3 จนกว่าเศษที่เหลือมีกำลังน้อยกว่ากำลังของตัวหาร

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ
$$\frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 + 2x^2y - 2xy^2 + 2y^3}{x^2 - xy + y^2}$$

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ $\frac{x^2 + 2x^4 - 3x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

$$\begin{aligned}(a+b) &= \\(a+b)^2 &= \\(a+b)^3 &= \\(a+b)^4 &= \\(a+b)^5 &= \end{aligned}$$

- กำลังของ a + กำลังของ b ต้องได้เท่ากับ n
- จำนวนเทอมทั้งหมดจะเท่ากับ $n+1$
- ทุกเทอม ยกเว้นเทอมท้ายมี a เป็นตัวประกอบ กำลังของ a ในเทอมแรกจะเท่ากับกำลังของขบวนการเทอมคู่
- ทุกเทอม ยกเว้นเทอมแรกมี b เป็นตัวประกอบ กำลังของ b ในเทอมที่สองเป็น 1 และจะเพิ่มขึ้นอีกทีละ 1 สำหรับเทอมที่ถัดไปแต่ละเทอม
- สัมประสิทธิ์ของเทอมแรก และ เทอมสุดท้ายเป็น 1 ส่วนสัมประสิทธิ์ของเทอมอื่นๆหาได้จาก Pascal's Triangle

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a+b)^0 & & & & & & 1 \\
 (a+b)^1 & & & & 1 & & 1 \\
 (a+b)^2 & & & 1 & 2 & & 1 \\
 (a+b)^3 & & 1 & 3 & 3 & & 1 \\
 (a+b)^4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 (a+b)^5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

ในกรณีของการกระจาย $(a-b)^n$ ใช้หลักการเดียวกับ $(a+b)^n$ เพียงแต่เครื่องหมายจะได้บวก และ ลบ สลับกันไป

การแยกตัวประกอบ (Resolution into factors)

1) วิธีเอาตัวร่วมออก (Common Factor)

type I

$$ac + ad = a(c + d)$$

ตัวอย่าง

1. $2x^3 - 3x^2$
2. $343x^4 - 49x^2$
3. $25xy - 20y^2$

Type II

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= c(a + b) + d(a + b) \\ &= (a + b)(c + d) \end{aligned}$$

2) วิธีแยกเป็นสองวงเล็บคูณกัน (Trinomial Expression)

Type :

$$\begin{aligned} x^2 + (a + b)x + ab &= (x + a)(x + b) \\ acx^2 + (ad + bc)x + bd &= (ax + b)(cx + d) \end{aligned}$$

หลักเกณฑ์สำคัญ

1. ถ้าเทอมสุดท้าย (เทอมที่ไม่มีตัวแปร) มีเครื่องหมายเป็น บวก (+)

สองวงเล็บที่แยกได้ ต้องมีเครื่องหมายเป็น บวกทั้งคู่ หรือ ลบทั้งคู่

โดยพิจารณาจาก

- 1.1 ถ้าเทอมกลางเป็น บวก (+) ทั้งสองวงเล็บที่แยกได้ต้องมีเครื่องหมาย บวก (+) ทั้งคู่
- 1.2 ถ้าเทอมกลางเป็น ลบ (-) ทั้งสองวงเล็บที่แยกได้ต้องมีเครื่องหมาย ลบ (-) ทั้งคู่

2. ถ้าเทอมสุดท้าย มีเครื่องหมายเป็น ลบ (-)

สองวงเล็บที่แยกได้ ต้องมีเครื่องหมาย ต่างกัน

โดยพิจารณาจาก

1.1 ถ้าเทอมกลางเป็น บวก (+) เทอมท้ายที่แยกออกไปทั้ง 2 วงเล็บ วงเล็บที่เทอมท้าย

คูณกับเทอมต้นของอีกวงเล็บหนึ่งได้ ค่ามาก จะมีเครื่องหมายเป็น บวก (+)

1.2 ถ้าเทอมกลางเป็น ลบ (-) เทอมท้ายที่แยกออกไปทั้ง 2 วงเล็บ วงเล็บที่เทอมท้าย

คูณกับเทอมต้นของอีกวงเล็บหนึ่งได้ ค่ามาก จะมีเครื่องหมายเป็น ลบ (-)

ตัวอย่าง

1. $x^2 + 5x + 6$

2. $x^2 + 12x + 20$

3. $x^2 - 5x + 6$

4. $x^2 - 7x + 12$

ตัวอย่าง

1. $x^2 + 2x - 8$

2. $x^2 + xy - 12y^2$

3. $3x^2 + 10x - 8$

4. $27m^2 + 210m - 125$

5. $4x^8y^{10} - 40x^5y^7 + 84x^2y^4$

ตัวอย่าง

1. $3(5x-1)^2 + 4(5x-1) - 15$

$$2. \quad 24a^6 + 118a^3 - 247$$

$$3. \quad x^{2a} - x^a - 30$$

3) วิธีผลต่างกำลังสอง

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

ตัวอย่าง

$$1. \quad x^2 - y^2$$

$$2. \quad 4x^2 - 3y^2$$

$$3. \quad 1 - m^2n^4$$

$$4. \quad 20a^2 - 45$$

$$5. \quad a - \frac{1}{a}$$

$$6. \quad (75)^2 - (25)^2$$

$$7. \quad x^4 - y^4$$

$$8. \quad (x + 1)^2 - 36y^2$$

$$9. \quad (3x + 7y)^2 - (2x - 3y)^2$$

$$10. \quad -b^2 - c^2 + 2bc + a^2$$

4) วิธีกำลังสองสมบูรณ์ (Perfect Square Trinomial)

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

ตัวอย่าง

1. $x^2 + 6x + 9$
2. $x^2 + 8x + 16$
3. $9x^2 - 12xy + 4y^2$
4. $2x^3y^3 + 16x^2y^4 + 32xy^5$
5. $c^2 - d^2 - 8d - 16$
6. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

5) วิธีผลบวกหรือผลต่างกำลังสาม (Sum or Difference of two cubes)

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

ตัวอย่าง

1. $x^3 + 8$
2. $27y^3 - 1$
3. $343a^6 - 27x^3$
4. $(x + y)^3 - z^3$
5. $x^3y^3 - y^3 + 8x^3 - 8$
6. $x^6 + 64y^6$

6) วิธีจัดให้เข้ารูป กำลังสองสมบูรณ์ (Completing the square)

1. โดยการเพิ่มพจน์กลาง ใช้หลัก $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ตัวอย่าง

$$a^4 + a^2b^2 + b^2$$

ตัวอย่าง

$$a^4 + 4$$

ตัวอย่าง

$$9a^4 + 8a^2b^2 + b^4$$

2. โดยการเพิ่มพจน์ท้าย

$$\begin{aligned} &\text{ใช้หลัก} \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ &\text{พจน์ท้าย} \quad = \frac{\text{พจน์กลาง}}{2 \times \sqrt{\text{พจน์แรก}}} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$x^2 + 6x + 5$$

ตัวอย่าง

$$3x^2 - 13x + 14$$

7) การแยกตัวประกอบแบบ $a^n \pm b^n$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ตัวอย่าง

1. $x^5 + y^5$

2. $u^7 + v^7$

3. $y^7 - z^7$

4. $x^{10} - y^{10}$

8) วิธีใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

“ ถ้า a เป็นรากของสมการ $f(x)=0$ คือ $f(a)=0$ แล้ว $(x-a)$ จะเป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $f(x)$ ”

บทกลับ

“ ถ้า $(x-a)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(x)$ แล้ว a จะเป็นรากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ หรือ $f(a)=0$ ”

ตัวอย่าง

จงแยกตัวประกอบ $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

ตัวอย่าง

จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - x^2 - 41x + 105$