

ประโยชน์ของตัวประกอบ

1. การหาผลคูณโดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1

จงหาผลคูณของจำนวนต่อไปนี้

a.) $[2a+(3b-c)][2a-(3b-c)]$

b.) จงหาผลคูณของ $m+2$, $m-2$, m^2-2m+4 และ m^2+2m+4
จัดเข้ารูปใหม่ดังนี้

c.) $(x^3 + 2 + xy)(x^3 - 2 + xy)$

d.) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{4})(3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{4})$

e.) $(\sqrt{6+3\sqrt{3}})(\sqrt{6-3\sqrt{3}})$

2. การหาผลหารโดยการแยกตัวประกอบ

การหาผลหารโดยการแยกตัวประกอบนั้น ทำได้โดยเอาตัวตั้งและตัวหารมาแยกออกเป็นตัวประกอบ เมื่อมีตัวประกอบร่วมกันทั้งเศษและส่วน ก็ตัดให้หมดไป เทคนิคและการคิดคงดำเนินตามแบบการหาผลคูณ โดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1

จงคูณ $(a+b)(b+c)(c+a)$

ตัวอย่างที่ 2

จงแสดงให้เห็นว่า $(2x-3y+1)^3 - (1-3x+2y)^3$ หารด้วย $5(x-y)$ ลงตัวพอดี

ตัวอย่างที่ 3

จงทำให้สำเร็จ

a.)
$$\frac{(2x^2 + x - 6)(6x^2 - 5x + 1)}{3x^2 + 5x - 2}$$

b.)
$$\frac{x - 25}{\sqrt{x} + 5}$$

c.) จงหาค่าของ
$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}$$

ต้องพยายามทำส่วนให้เป็นจำนวนเต็ม โดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 4

a.) จงทำให้เป็นอย่างต่ำ $\frac{6x-12}{4xy+4x} \cdot \frac{y^2-1}{2-3x+x^2}$

b.) จงทำให้เป็นอย่างต่ำ $\frac{x^{2n+1}-x^{2n}y}{x^{n+3}-x^ny^3}$

c.) $\frac{r^3s+3r^2s+9rs}{r^3-27}$

3. การทำเศษส่วนและเศษซ้อนด้วยวิธีแยกตัวประกอบ

การคูณและการหารเศษส่วน สามารถทำให้เป็นรูปอย่างง่ายที่สุดได้โดยการแยกตัวประกอบ คือแยกตัวประกอบทั้งเศษและส่วน เมื่อมีตัวประกอบรวมทั้งเศษและส่วนก็ตัดกันให้หมด

ก. การทำเศษส่วน

ตัวอย่างที่ 1 การคูณเศษส่วน

จงคูณเศษส่วนต่อไปนี้ แล้วทำให้สำเร็จ

a.)
$$\frac{6x-12}{4xy+4x} \times \frac{y^2-1}{2-3x+x^2}$$

b.)
$$\left[\frac{ax+ab+cx+bc}{a^2-x^2} \right] \left[\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2+(b+c)x+ab} \right]$$

ตัวอย่างที่ 2

a.) จงทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

$$\frac{x^3+3x^2-4x}{7x^3-18x^2+6x+5}$$

b.) จงทำให้เป็นผลสำเร็จ $\frac{x^4 - 8x}{2x^2 + 5x - 3} \times \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 4} \div \frac{x^2 - 2x}{x + 3}$

ตัวอย่างที่ 3

จงหารากของสมการ $\frac{3x + 4}{2x + 1} + \frac{x + 6}{2} + \frac{x + 2}{4}$

ข. การทำเศษซ้อนด้วยวิธีแยกตัวประกอบ

โจทย์พีชคณิตประเภทเศษซ้อน ก็มีหลักการทำเช่นเดียวกับโจทย์ประเภทเศษส่วนธรรมดา คือ ทำเศษซ้อนให้เป็นเศษส่วนธรรมดา แล้วแยกออกเป็นตัวประกอบทั้งเศษและส่วน ตัดกันให้เป็นอย่างต่ำแล้วตอบ

ตัวอย่างที่ 1

การหารเศษส่วน

$$\text{a.) } \frac{\frac{2x^2 - 5x + 6}{2x - 1}}{3}$$

$$\text{b.) } \frac{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x - 8}}{\frac{9 - x^2}{64 - x^2}}$$

ตัวอย่างที่ 2

จงทำให้สำเร็จ

$$\frac{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}{\frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b}}$$

4. การแก้สมการกำลังที่สองโดยวิธีแยกตัวประกอบ

การแก้สมการกำลังที่สอง ซึ่งมีตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียว (Quadratic Equation in One Unknown) นั้น ทำได้โดยอาศัยการแยกตัวประกอบ

รูปมาตรฐานของสมการกำลังสอง

สมการกำลังที่สองซึ่งมีตัวไม่ทราบค่า x มีรูปมาตรฐานดังนี้

$$ax^2 + bx + c = 0$$

where a , b and c are constants and $a \neq 0$ คือมี a , b และ c เป็นตัวคงที่ใดๆ และต้องมีกฎเกณฑ์ว่า a ต้องไม่เท่ากับศูนย์

สมการกำลังที่สองที่ $b = 0$ คือไม่มีพจน์ x เรียกว่า สมการกำลังสองแท้ (A pure quadratic Equation)

การแก้สมการกำลังที่สอง

เรามีวิธีแก้สมการกำลังสองได้ 5 แบบ 4 แบบแรกอาศัยหลักการแยกตัวประกอบ แบบที่ 5 เป็นการแก้สมการแบบใช้กราฟ

แบบที่ 1 : สมการกำลังสองแท้

ตัวอย่าง

จงหารากของสมการต่อไปนี้

a.) $x^2 - 4 = 0$

$$\text{b.) } 2x^2 - 21 = 0$$

แบบที่ 2 : โดยวิธีแยกตัวประกอบธรรมดา

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ x จากสมการต่อไปนี้

$$\text{a.) } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{b.) } 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\text{c.) } x^2 - 4x + 4 = 0$$

ตัวอย่าง

จงแก้สมการต่อไปนี้ด้วยวิธีแยกตัวประกอบ

a.) $\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-4} = \frac{4}{5}$

b.) $\frac{y}{2p} = \frac{3p}{6y-5p}$

แบบที่ 3 : โดยวิธีทำให้เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์

(Solution By Completing The Squares)

การแก้สมการกำลังสองวิธีนี้ก็คือ การหาค่าของ x ออกมา โดยการแยกตัวประกอบเพิ่มพจน์ท้ายนั่นเอง

จาก $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$

นิพจน์ข้างบนนี้เป็นนิพจน์กำลังสองสมบูรณ์ คือ พจน์ต้นและพจน์ท้ายอยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ และพจน์กลางเกิดจาก $2\sqrt{\frac{3}{4} \cdot i \mu e^1} \times \sqrt{\frac{3}{4} \cdot i \cdot e \hat{O} \hat{A}}$ เมื่อเห็นนิพจน์ใดเขียนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้ เราก็เขียนนิพจน์นั้นได้ว่า (พจน์ต้น $\pm$ พจน์ท้าย)²

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $x^2 - 6x - 2 = 0$

ตัวอย่าง

จงแก้สมการต่อไปนี้

a.) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

b.) $3x^2 + 8x + 5 = 0$

$$c.) \quad x^2 + 4x + 1 = 0$$

แบบที่ 4 : โดยวิธีใช้สูตร

ค่าของ x หรือรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ หาได้โดยใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เมื่อเห็นสมการกำลังที่สอง ถ้าต้องการหาค่าของตัวไม่ทราบค่า หรือรากของมันทำได้ง่ายๆ โดยจัดให้เข้ารูปมาตรฐานของสมการกำลังสองสมบูรณ์ แล้วเอาค่า a, b, c แทนค่าในสูตรข้างบน

หลักการหาสูตรสมการกำลังสองสมบูรณ์

$$ax^2 + bx + c = 0$$

เมื่อ $a \neq 0$ เราสามารถหาค่าของ x ได้โดยวิธีของ *Completing the Square* ดังนี้
หารตลอดด้วย a ได้

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{หรือ} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

บวก $[\frac{1}{2}(\frac{b}{a})]^2$ เข้าทั้งสองข้างได้

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

บวกลบพจน์ทางขวาให้สำเร็จได้

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\therefore (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\therefore x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

หมายเหตุ

1.) $b^2 - 4ac$ เรียกว่า discriminant

ก.) ถ้า $b^2 - 4ac > 0$

รากของสมการเป็นจำนวนจริงและมีค่าไม่เท่ากัน

ข.) ถ้า $b^2 - 4ac = 0$

รากของสมการเป็นจำนวนจริงและมีค่าเท่ากัน แต่เครื่องหมายต่างกัน

ค.) ถ้า $b^2 - 4ac < 0$

รากของสมการเป็นจำนวนจินตภาพ

$$2.) S = \text{ผลบวกของรากทั้งสอง} = -\frac{b}{a}$$

$$3.) P = \text{ผลคูณของรากทั้งสอง} = \frac{c}{a}$$

ตัวอย่าง

จงแก้สมการโดยวิธีใช้สูตร

$$a.) x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\text{b.) } 4t^2 + 12t + 9 = 0$$

$$\text{c.) } 9x^2 + 18x - 17 = 0$$

แบบที่ 5 : การแก้สมการที่มีกำลังเกิน 2

การแก้สมการที่มีกำลังเกิน 2 โดยการแยกตัวประกอบ (factor) โดยทั่วไปใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือแยกตัวประกอบ

ตัวอย่าง	จงหาค่าของ x	
	$x^3 - 12a^2x$	$= 16a^3$

ตัวอย่างที่ 2

$$\text{จงแก้สมการ} \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

ตัวอย่างที่ 3

$$\text{จงแก้สมการ} \quad 2x^4 - 3x^3 - 51x^2 - 22x + 24 = 0$$

แบบที่ 6 : การพิสูจน์เอกลักษณ์

สมการที่เป็นจริงสำหรับทุกค่าของตัวอักษร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า เรียกว่าสมการเอกลักษณ์ (An Identity Equation) เช่น

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

สมการทั้งสองนี้ เป็นจริงทุกค่าของ x, y ที่แทนลงไปฉะนั้นจึงเรียกว่าเป็นเอกลักษณ์ (An Identity)

เอกลักษณ์ (Identity) คือปริมาณสองปริมาณซึ่งเท่ากันตลอดไปไม่ว่าตัวอักษรนั้นๆ จะมีค่าเท่าไร กล่าวคือปริมาณสองปริมาณนี้ ต้องเท่ากันเสมอไป สำหรับทุกค่าของตัวอักษร หรือตัวไม่ทราบค่าที่เราแทนค่าลงไป

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$(y-3)^2 + 3(2y-3) = y(y-1) - y$$

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$17(5x+3a)^2 - 2(40+27a)(5x+3a) = 25x^2 + 9a^2$$

ตัวอย่าง

ถ้า $x + y + z = 0$ จงพิสูจน์ว่า $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

แบบฝึกหัด

การหาผลคูณและผลหาร โดยการแยกตัวประกอบ

1. จงคูณ $5a + 3b - c$ ด้วย $2a + 3b + c$
2. จงหาผลคูณของ $2x^2 + x - 6$ กับ $6x^2 - 5x + 1$ ด้วย $3x^2 + 5x - 2$
3. จงหาค่า $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$
4. จงหาค่าของ $\frac{x + y - z^2}{(\sqrt{x + y - z})(\sqrt{x + y + z})}$
5. จงหาค่าของ $(3xy + 1)(2x^2 - 3y)$
6. จงหาค่าของ $\frac{3x^{3n} - y^{3n}}{x^n - y^n}$

ข. การทำเศษส่วนและเศษซ้อนโดยวิธีแยกตัวประกอบ

จงทำให้สำเร็จ

7. $\frac{(8xy + 4y^2)^2}{8x^3y + y^4}$
8. $\frac{x^2 - 5x + 6}{\frac{x^2 + 7x - 8}{9 + x^2}}$
9. $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 + \frac{a-b}{a+b}}$
10. $(\frac{ax + ab + cx + bc}{a^2 - x^2})(\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^2 + (b+a)x + ab})$

ค. การแก้สมการกำลังสอง

11. จงแก้สมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีแยกตัวประกอบ (factor)

$$\text{a.) } x^2 - 7x = -12$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{b.) } x^2+x & = 6 \\
 \text{c.) } x^2 & = 5x+24 \\
 \text{d.) } 2x^2+2 & = 5x \\
 \text{e.) } 9x^2 & = 9x-2 \\
 \text{f.) } 4x-5x^2 & = -12 \\
 \text{g.) } \frac{x}{2a} & = \frac{4a}{x+2a} \\
 \text{h.) } \frac{1}{4-x} - \frac{1}{2+x} & = \frac{1}{4} \\
 \text{i.) } \frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+2}{2x-1} & = \frac{10}{3} \\
 \text{j.) } \frac{2c-3y}{y-c} - \frac{y}{2y-c} & = \frac{2}{3}
 \end{array}$$

12. Solve each equation by completing the square

$$\begin{array}{ll}
 \text{a.) } x^2+4x-5 & = 0 \\
 \text{b.) } x(x-3) & = 4 \\
 \text{c.) } 2x^2 & = x+1 \\
 \text{d.) } 3x^2-2 & = 5x \\
 \text{e.) } 4x^2 & = 12x-7 \\
 \text{f.) } 6y^2 & = 19y-15 \\
 \text{g.) } 2x^2+3a^2 & = 7ax \\
 \text{h.) } 12x-9x^2 & = 5
 \end{array}$$

13. Solve each equation by the quadratic formula

$$\begin{array}{ll}
 \text{a.) } x^2-5x & = 6 \\
 \text{b.) } x^2-6 & = x \\
 \text{c.) } 3x^2-2x & = 8 \\
 \text{d.) } 16x^2-8x+1 & = 10 \\
 \text{e.) } x(5x-4) & = 2 \\
 \text{f.) } 9x^2+6x & = -4 \\
 \text{g.) } \frac{5x^2-2p^2}{x} & = \frac{p}{3}
 \end{array}$$

$$h.) \frac{2x-3}{4x-1} = \frac{3x-2}{3x+2}$$

ง. การแก้สมการที่มีกำลังเกินสอง

14. จงหาค่าของ x จากสมการ $(x^2+3x+2)^2-8(x^2+3x) = 4$

[ตอบ $x = -4, -3, 0, 1$]

15. จงหาค่าของ x จากสมการ $3x^3+5x^2 = 3x+5$

[ตอบ $x = -\frac{5}{3}, 1, 1$]

16. จงหาค่าของ x จากสมการ $x^4+40x = 8x^3$

[ตอบ $x = 0, -2, 5 \pm \sqrt{5}$]