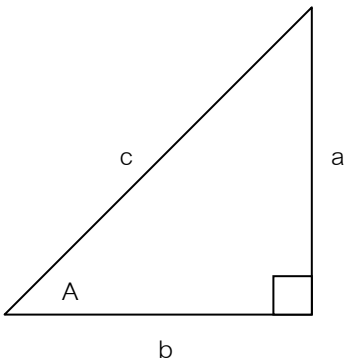
บทที่ 2

ตรีโกณมิติ

1. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ ความสัมพันธ์ระหว่างด้าน และ มุมภายในสามเหลี่ยมมุมฉาก



นิยาม

sine ของมุม A = $\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ หรือ $\sin A = \frac{a}{c}$

cosine ของมุม A = $\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ หรือ $\cos A = \frac{b}{c}$

tangent ของมุม A = $\frac{\text{ความยาวของด้ายตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ หรือ $\tan A = \frac{a}{b}$

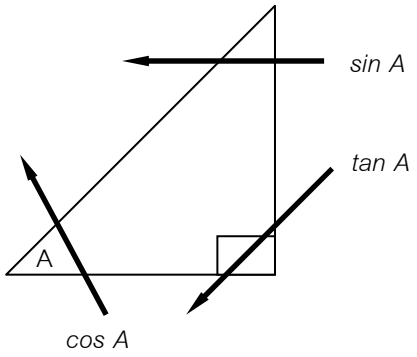
ส่วนกลับของ *sin A* เรียกว่า *cosec A* หรือ csc A

ส่วนกลับของ *tan A* เรียกว่า *cot A* และ

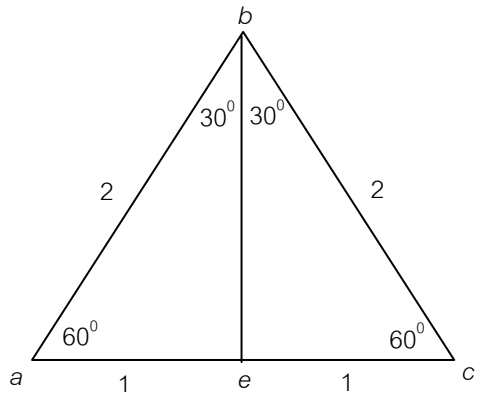
ส่วนกลับของ *cos A* เรียกว่า *sec A*

นั่นคือ

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$



2. **อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม** 30^0, 45^0 **และ** 60^0



กำหนดสามเหลี่ยมด้านเท่า *abc* โดยด้านทั้งสามยาวเท่ากับ 2 หน่วย

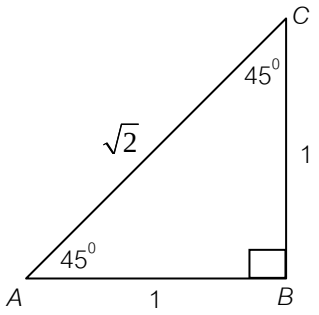
จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมด้านเท่า มุมภายในทั้งสามจะเท่ากันและเท่ากับ 60^0 ให้เส้นตรง *be* เป็นเส้นตรง

ที่ลากแบ่งครึ่งมุมจากจุด *b* และ ตั้งฉากกับเส้นตรง *ac* ดังนั้นมุม $a\hat{b}e = e\hat{b}c = 30^0$

พิจารณาสามเหลี่ยม *abe* จะได้ว่า ความยาวด้าน *be* = $\sqrt{2^2-1^2}$ = $\sqrt{3}$ หน่วย

ดังนั้น $sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos60^0=\frac{1}{2}$ $tan60^0=\sqrt{3}$

$sin30^0=\frac{1}{2}$ $cos30^0=\sqrt{3}$ $tan30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$

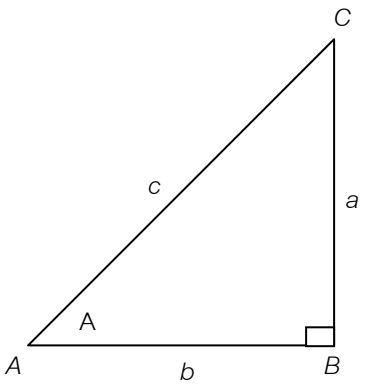


กำหนดสามเหลี่ยมหน้าจั่ว *ABC* โดยที่ ด้าน *AB* และ ด้าน *BC* ยาวเท่ากัน เท่ากับ 1 หน่วย มุม *B* เป็นมุมฉากดังนั้น มุม *A* = มุม *C* = 45^0

จากทฤษฎีสามเหลี่ยมพิธากอรัส จะได้ว่าความยาวด้าน AC = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

ดังนั้น $sin45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $cos45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $tan45^0=1$

3. ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนทางตรีโกณมิติ



กำหนดสามเหลี่ยม *ABC* โดยมีความยาวด้าน *a*, *b* และ *c* ดังแสดงในรูป

จากรูปจะได้ว่า

$$\sin A = \frac{a}{c} \qquad \tan A = \frac{a}{b} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$
$$\csc A = \frac{c}{a} \qquad \cot A = \frac{b}{a} \qquad \sec A = \frac{c}{b}$$

1. พิจารณาค่าของ $\sin^2 A + \cos^2 A$

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{c^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

2. พิจารณาค่าของ $\sec^2 A - \tan^2 A$

$$\begin{aligned} \sec^2 A - \tan^2 A &= \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ &= \frac{c^2 - a^2}{b^2} \\ &= \frac{b^2}{b^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

3. พิจารณาค่าของ $\csc^2 A - \cot^2 A$

$$\begin{aligned} \csc^2 A - \cot^2 A &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ &= \frac{c^2 - b^2}{a^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{a^2}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $csc^2 A - cot^2 A = 1$

4. พิจารณาค่าของ $tan A$

$$tan A = \frac{a}{b}$$

$$= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

$$= \frac{sin A}{cos A}$$

ดังนั้น $tan A = \frac{sin A}{cos A}$

เพราะว่า $cot A = \frac{1}{tan A}$

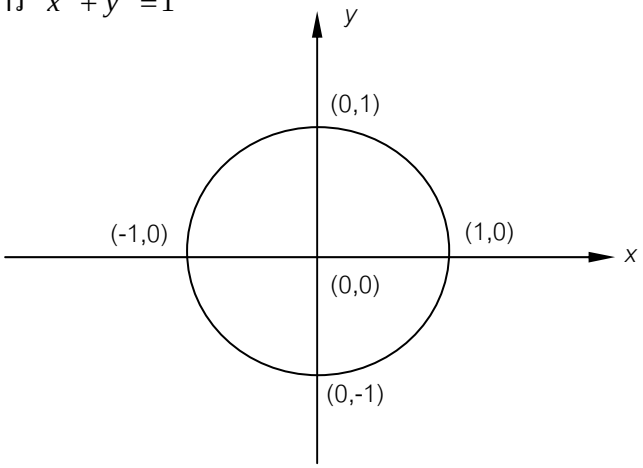
ดังนั้น $cot A = \frac{cos A}{sin A}$

สรุป

$$sin A \cdot csc A = 1$$
$$tan A \cdot cot A = 1$$
$$cos A \cdot sec A = 1$$
$$sin^2 A + cos^2 A = 1$$
$$sec^2 A - tan^2 A = 1$$
$$csc^2 A - cot^2 A = 1$$
$$tan A = \frac{sin A}{cos A}$$

4. วงกลมหนึ่งหน่วย

วงกลมหนึ่งหน่วย คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และ มีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย โดยมีความสัมพันธ์ตามสมการ $x^2+y^2=1$



ความยาวของเส้นรวบวงวงกลมหนึ่งหน่วย

เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว $=2\pi r=2\pi$ โดยที่ $\pi=3.14159$

ดังนั้นครึ่งวงกลมหนึ่งหน่วยยาว $=\frac{2\pi}{2}=\pi$

และเสี้ยวของวงกลมหนึ่งหน่วย $=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

กำหนด θ เป็นจำนวนจริงใดๆ จุด $P(\theta)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยวัดจากจุด (1,0) ไปตามส่วนโค้งของวงกลม

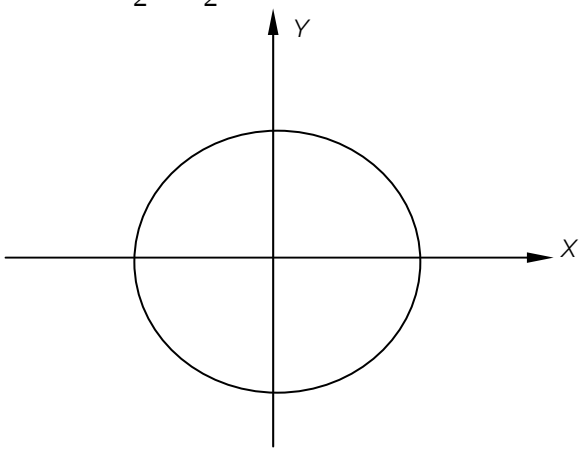
ถ้า $\theta\geq 0$ หมายถึง การวัดไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta>0$ หมายถึง การวัดไปในทิศตามเข็มนาฬิกา

โคออร์ดิเนทของจุดปลายส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วย

กำหนด θ เป็นจำนวนจริง และ ให้ความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ยาว θ หน่วย มีโคออร์ดิเนทของจุดปลายส่วนโค้งเป็น (x,y) นั่นคือ $P(\theta)=(x,y)$

โคออร์ดิเนทของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ และ 2π



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยจะพบว่า

$P(0)=(1,0)$ $P(\frac{\pi}{2})=(0,1)$ $P(\pi)=(-1,0)$ $P(\frac{3\pi}{2})=(0,-1)$ $P(2\pi)=(1,0)$

และ

$P(-\frac{\pi}{2})=(0,-1)$ $P(-\pi)=(-1,0)$ $P(-\frac{3\pi}{2})=(0,1)$ $P(-2\pi)=(1,0)$

สูตรที่ควรทราบ

$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ เมื่อ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ เมื่อ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$ $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$ เมื่อ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$ เมื่อ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$

$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$

$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$$

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B$$

<u>ตัวอย่าง</u>

จงหาค่าของ

1. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$
2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$
3. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$
4. $\csc\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$
5. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
6. $\sin\frac{2\pi}{3}$
7. $\csc\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
8. $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
9. $\sec\frac{13\pi}{4}$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ และ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\cos x$ และ $\sin x$

ตัวอย่าง

ถ้า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ $\sec\theta + \csc\theta$

แบบฝึกหัด

1.

Prove the following identities :

1. $\sin A \cot A = \cos A$.

2. $\cos A \tan A = \sin A$.

3. $\cot A \sec A = \operatorname{cosec} A$.

4. $\sin A \sec A = \tan A$.

5. $\cos A \operatorname{cosec} A = \cot A$.

6. $\cot A \sec A \sin A = 1$.

7. $(1 - \cos^2 A) \operatorname{cosec}^2 A = 1$.

8. $(1 - \sin^2 A) \sec^2 A = 1$.

9. $\cot^2 \theta\,(1 - \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta$.

10. $(1 - \cos^2 \theta) \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$.

11. $\tan \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.

12. $\operatorname{cosec} \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cot \alpha$.

13. $(1 + \tan^2 A) \cos^2 A = 1$.

14. $(\sec^2 A - 1) \cot^2 A = 1$.

15. $(1 - \cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \tan^2 \theta$.

16. $\cos \alpha \operatorname{cosec} \alpha \sqrt{\sec^2 \alpha - 1} = 1$.

17. $\sin^2 A\,(1 + \cot^2 A) = 1$.

18. $(\operatorname{cosec}^2 A - 1) \tan^2 A = 1$.

19. $(1 - \cos^2 A)(1 + \cot^2 A) = 1$.

20. $\sin \alpha \sec \alpha \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1} = 1$.

21. $\cos \alpha \sqrt{\cot^2 \alpha + 1} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$.

22. $\sin^2 \theta \cot^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

23. $(1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta) = 1$.

24. $\sin^2 \theta \sec^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$.

25. $\operatorname{cosec}^2 \theta \tan^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$.

2.

Find the numerical value of

1. $\cos 135°$. **2.** $\sin 150°$. **3.** $\tan 240°$.

4. $\operatorname{cosec} 225°$. **5.** $\sin(-120°)$. **6.** $\cot(-135°)$.

7. $\cot 315°$. **8.** $\cos(-240°)$. **9.** $\sec(-300°)$.

10. $\tan \frac{3\pi}{4}$. **11.** $\sin \frac{4\pi}{3}$. **12.** $\sec \frac{2\pi}{3}$.

13. $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. **14.** $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. **15.** $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

Express as functions of A :

16. $\cos(270° + A)$. **17.** $\cot(270° - A)$. **18.** $\sin(A - 90°)$.

19. $\sec(A - 180°)$. **20.** $\sin(270° - A)$. **21.** $\cot(A - 90°)$.

3.

Find the numerical value of

1. $\cos 480°$. **2.** $\sin 960°$. **3.** $\cos(-780°)$.

4. $\sin(-870°)$. **5.** $\sec 900°$. **6.** $\tan(-855°)$.

7. $\operatorname{cosec}(-660°)$. **8.** $\cot 840°$. **9.** $\operatorname{cosec}(-765°)$.

10. $\cos 1125°$. **11.** $\cot 990°$. **12.** $\sin 855°$.

13. $\sec 1305°$. **14.** $\cos 960°$. **15.** $\sec(-1575°)$.

16. $\sin \frac{15\pi}{4}$. **17.** $\cot \frac{23\pi}{4}$. **18.** $\sec \frac{7\pi}{3}$.

19. $\cot \frac{16\pi}{3}$. **20.** $\sec\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

4.

Express in the form of a sum or difference

1. $2 \sin 3\theta \cos \theta$.

2. $2 \cos 6\theta \sin 3\theta$.

3. $2 \cos 7A \cos 5A$.

4. $2 \sin 3A \sin 2A$.

5. $2 \cos 5\theta \sin 4\theta$.

6. $2 \sin 4\theta \cos 8\theta$.

7. $2 \sin 9\theta \sin 3\theta$.

8. $2 \cos 9\theta \sin 7\theta$.

9. $2 \cos 2\alpha \cos 11\alpha$.

10. $2 \sin 5\alpha \sin 10\alpha$.

11. $\sin 4\alpha \cos 7\alpha$.

12. $\sin 3\alpha \sin \alpha$.

13. $\cos \frac{A}{2} \sin \frac{3A}{2}$.

14. $\sin \frac{5A}{2} \cos \frac{7A}{2}$.

15. $2 \cos \frac{2\theta}{3} \cos \frac{5\theta}{3}$.

16. $\sin \frac{\theta}{4} \sin \frac{3\theta}{4}$.

17. $2 \cos 2\beta \cos (\alpha - \beta)$.

18. $2 \sin 3\alpha \sin (\alpha + \beta)$.

19. $2 \sin (2\theta + \phi) \cos (\theta - 2\phi)$.

20. $2 \cos (3\theta + \phi) \sin (\theta - 2\phi)$.

21. $\cos (60° + \alpha) \sin (60° - \alpha)$.

เอกสารอ้างอิง

H.S.Hall, *Elementary Trigonometry*, Macmillan&Co Ltd., London, 1962