

Chapter 1

Vectors algebra in 2D and 3D space

180 120 Engineering Mathematics I

1

2D

180 120 Engineering Mathematics I

2

Vector

ปริมาณ Vector ไม่ใช่ปริมาณตัวเลขธรรมดาเดียวๆ (ปริมาณ Scalar) ทั่วไป แต่เป็นปริมาณที่ประกอบด้วยขนาดและทิศทาง ตัวอย่างเช่น แรง, ความเร็ว ถือว่าเป็นปริมาณ Vector ในวิชาทางวิศวกรรม เราจะต้องนำความรู้เรื่อง Vector มาประยุกต์ใช้มากมาย

เนื้อหาในบทนี้เราจะได้เรียนเกี่ยวกับ Vector ในระนาบ 2 มิติ ในเรื่องการเขียนปริมาณ Vector ในทางคณิตศาสตร์, Unit vector, Dot product, Vector projection, Vector function และการประยุกต์ใช้งานในเรื่องการเคลื่อนที่

เนื่องจาก Vector มีทั้งขนาดและทิศทาง การกระทำทางคณิตศาสตร์กับปริมาณ Vector จึงแตกต่างไปจากการกระทำทางคณิตศาสตร์ของปริมาณ Scalar ที่มีเฉพาะปริมาณอย่างเดียว การกระทำทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กับ Vector จะยากกว่า มีกฎเกณฑ์พิเศษเพิ่มเติม ถ้าเราพยายามทำความเข้าใจที่มันเป็นอย่างไร จะช่วยให้เราเรียนรู้ได้เร็วขึ้น

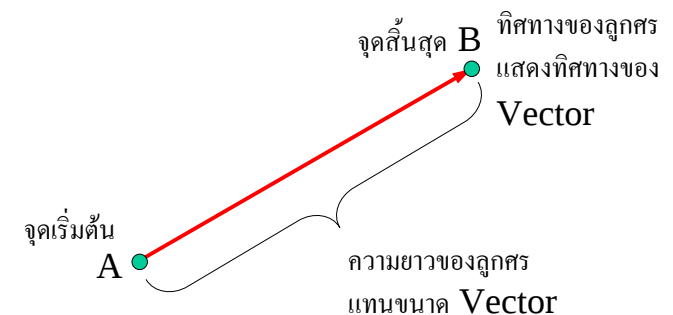
3

การแสดง Vector ในทางเรขาคณิต

ในทางเรขาคณิต ในระนาบ 2 มิติ เราสามารถใช้รูปลูกศรแทนปริมาณ Vector 2 มิติได้ โดยลูกศรจะมีความหมายคือ

- ความยาวของลูกศรหมายถึงขนาดของ vector
- ทิศทางของลูกศรคือทิศทางของ Vector

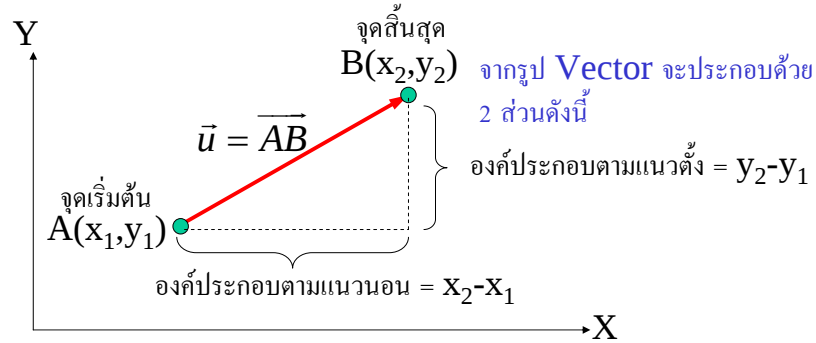
ข้อดีของการใช้ลูกศรคือเราสามารถเห็นภาพได้เลย แต่ข้อเสียคือเราจะต้องนำไปใช้คำนวณได้ลำบากเนื่องจากลูกศรไม่ได้อยู่ในรูปตัวเลข



4

Component Form of a Vector in the Plane

เมื่อนำรูป Vector มาเขียนบนระนาบ XY เราจะต้องกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดให้กับ Vector



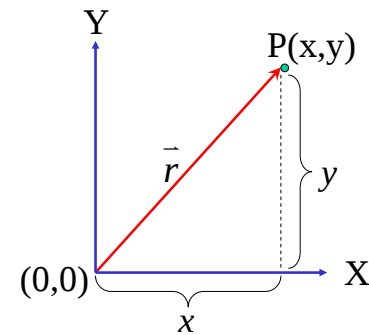
ดังนั้นเราสามารถแทน Vector ใน 2 มิติโดยใช้ตัวเลข 2 ตัวในรูป Component form

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

5

Position vector

การประยุกต์ใช้งาน Vector อย่างหนึ่งคือการนำ Vector มาใช้บอกตำแหน่ง เราเรียกว่า Position vector



Position vector เป็น Vector ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด Origin (0,0) และจุดสิ้นสุดที่ P(x,y)

Position vector

$$\vec{r} = \langle x, y \rangle$$

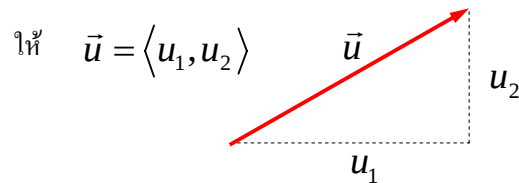
หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\langle x, y \rangle$ จะหมายถึง Vector

ส่วน (x,y) จะหมายถึงจุดหรือตำแหน่งที่ Coordinate (x,y)

ดังนั้น (x,y) และ $\langle x, y \rangle$ มีความหมายคนละอย่าง ต้องระวังเรื่องการใช้

6

Magnitude of Vectors



จากรูป เมื่อใช้ทฤษฎีของพีทาโกรัส เราสามารถคำนวณขนาดของ vector ได้จากสูตร

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

เราใช้สัญลักษณ์ $|\vec{u}|$ แทนขนาดของ Vector $\vec{u}$

7

Zero Vector

นิยาม

Zero vector คือ Vector ที่มีองค์ประกอบทุกตัวเป็น 0 หหมด กล่าวคือ

$$\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$$

ดังนั้น Zero vector จะมีขนาดเป็น 0 และจะไม่สามารถหาทิศทางได้ (แต่เรายังนับว่าเป็น Vector อยู่)

8

Unit Vector : Representation of Direction

นิยาม Unit vector คือ Vector ที่มีขนาด 1 หน่วย

ประโยชน์ เราสามารถใช้ Unit vector ในการบอกทิศทางของ Vector ใดๆ ได้
ดังนี้

$$\text{ให้ } \vec{V} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

จะได้ Unit vector ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{V}$ เป็น

$$\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left\langle \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right\rangle$$

แบบฝึกหัด จงพิสูจน์ว่า $\vec{u} = \langle 3, -4 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 6, -8 \rangle$ มีทิศทางเดียวกัน
โดยใช้ Unit vector

9

Vector Representation in the form of Magnitude and direction

เราสามารถเขียน vector $\vec{V}$ ในรูปของ “ขนาดและทิศทาง” ได้ดังนี้

$$\vec{V} = |\vec{V}| \left(\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \right)$$

ขนาดของ $\vec{V}$

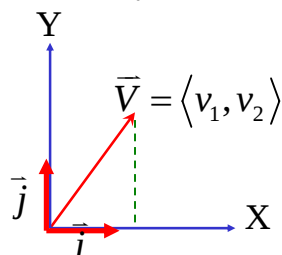
ทิศทางของ $\vec{V}$

แบบฝึกหัด จงเขียน $\vec{u} = \langle 3, -4 \rangle$ ในรูปของขนาดและทิศทางคู่กัน

10

Standard Unit Vectors For the XY Plane

เมื่อเราใช้แกน XY เป็นแกนอ้างอิง เราสามารถสร้าง unit vector ตามแนวแกน X
และแกน Y ได้ดังรูป



$\vec{i}$ = standard unit vector
ตามแนวแกน x

$\vec{j}$ = standard unit vector
ตามแนวแกน y

เราสามารถอธิบาย vector ใดๆ โดยใช้ standard unit vector ดังนี้

$$\vec{V} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$$

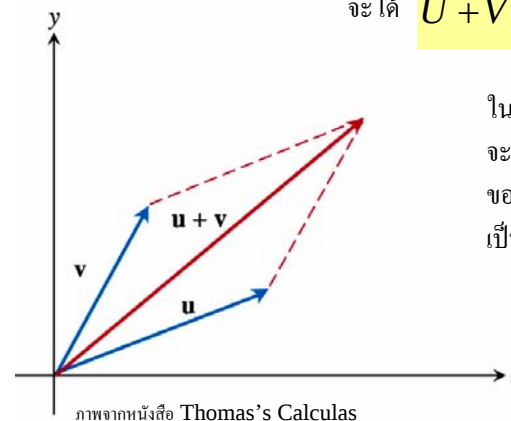
11

Vector Addition

การบวก Vector สามารถทำได้ดังนี้

$$\text{ให้ } \vec{U} = \langle u_1, u_2 \rangle \text{ และ } \vec{V} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\text{จะได้ } \vec{U} + \vec{V} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$$



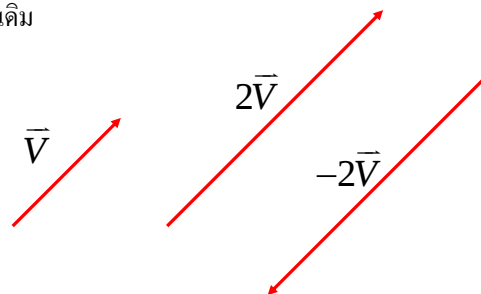
ในทางเรขาคณิต การบวก Vector
จะได้ Vector ที่เป็นเส้นทแยงมุมหลัก
ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบ
เป็น $\vec{U}$ และ $\vec{V}$ ดังรูป

ภาพจากหนังสือ Thomas's Calculus

12

Vector Multiplication by Scalar

การคูณ Vector ด้วยค่า Scalar k จะได้ Vector ตัวใหม่ที่มีขนาดยาวเป็น k เท่าของตัวเดิม



ในกรณีที่ k เป็นบวก เราจะได้ $k\vec{V}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{V}$

ในกรณีที่ k เป็นลบ เราจะได้ $k\vec{V}$ มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{V}$

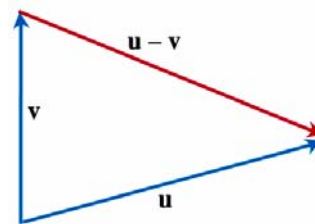
13

Vector Subtraction

การลบ Vector สามารถทำได้ดังนี้

$$\text{ให้ } \vec{U} = \langle u_1, u_2 \rangle \text{ และ } \vec{V} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\text{จะได้ } \vec{U} - \vec{V} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$$



ในทางเรขาคณิต การลบ Vector
จะได้ Vector ที่ลากจากหัวลูกศร
ของ $\vec{V}$ ไปยังหัวลูกศรของ $\vec{U}$ ดังรูป

ภาพจากหนังสือ Thomas's Calculus

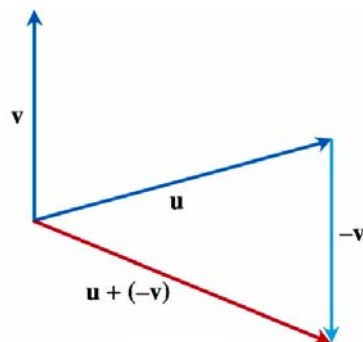
14

Vector Subtraction

เพื่อให้เข้าใจได้ดียิ่งขึ้น เราสามารถแบ่งการลบ Vector ออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

1. คูณ $\vec{V}$ ด้วย -1 เพื่อได้ Vector $-\vec{V}$

2. นำ $\vec{U}$ ไปบวกกับ $-\vec{V}$ ดังรูป



ภาพจากหนังสือ Thomas's Calculus

15

Properties of Vector Algebra

$$1. \quad \vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$$

$$2. \quad (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$$

$$3. \quad \vec{U} + \vec{0} = \vec{U}$$

$$4. \quad \vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$$

$$5. \quad 0\vec{U} = \vec{0}$$

$$6. \quad 1\vec{U} = \vec{U}$$

$$7. \quad a(b\vec{U}) = (ab)\vec{U}$$

$$8. \quad a(\vec{U} + \vec{V}) = a\vec{U} + a\vec{V}$$

$$9. \quad (a+b)\vec{U} = a\vec{U} + b\vec{U}$$

16

Tangent and Normal

ถ้ามีเส้นโค้งที่อยู่ในรูป $y = f(x)$ เราเรียกว่า Vector $\vec{V}$ จะสัมผัสหรือตั้งฉากกับเส้นโค้งที่จุด P ถ้า Vector $\vec{V}$ ขนานหรือตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดนั้น

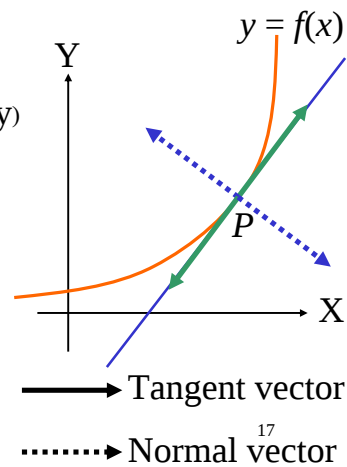
กรณีที่โจทย์กำหนดให้สมการเส้นโค้งเป็น $y = f(x)$

1. คำนวณ $\frac{dy}{dx}$
2. หาค่า $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $P(x,y)$ (โดยการแทนค่า x,y)
3. นำค่าที่ได้ในข้อ 2 เขียนในรูปเศษส่วน $\frac{b}{a}$
4. เราจะได้ Tangent vector เป็น

$$\vec{T}_1 = a\vec{i} + b\vec{j} \quad \text{และ} \quad \vec{T}_2 = -a\vec{i} - b\vec{j}$$

5. เราจะได้ Normal vector เป็น

$$\vec{N}_1 = -b\vec{i} + a\vec{j} \quad \text{และ} \quad \vec{N}_2 = b\vec{i} - a\vec{j}$$



17

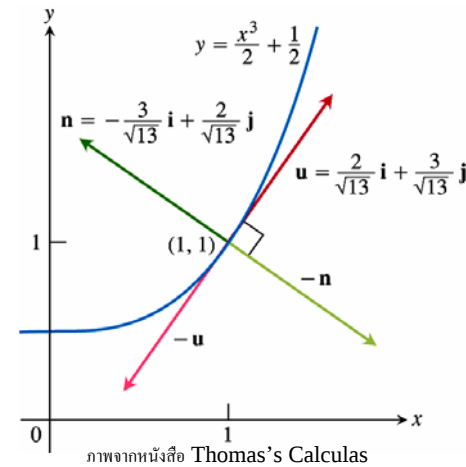
Tangent and Normal

ตัวอย่าง

จงหา Unit Tangent vector ที่สัมผัสและตั้งฉากกับเส้นโค้ง $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ ที่จุด $(1,1)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2}$

ที่จุด $(1,1)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3(1)^2}{2} = \frac{3}{2}$



ได้ Tangent vector เป็น

$$\vec{T} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

ได้ Unit tangent vector เป็น

$$\frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

18

Tangent and Normal

ในกรณีที่สมการเส้นโค้งไม่ได้อยู่ในรูป $y = f(x)$ เช่น เส้นโค้ง $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0$

ในกรณีนี้เราจะหา $\frac{dy}{dx}$ ได้ลำบาก แต่เราสามารถคำนวณหา $\frac{dy}{dx}$ ทางอ้อมได้ดังนี้

1. จัดสมการให้อยู่ในรูป $f(x,y)=0$

2. ทำการ Differentiate $f(x,y)$ เทียบกับ x ได้ $\frac{df}{dx}$

3. ทำการ Differentiate $f(x,y)$ เทียบกับ y ได้ $\frac{df}{dy}$

4. แทนผลที่ได้ในข้อ 2 และ 3 ในสมการ

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{เราจะได้} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{df}{dy}}$$

19

Tangent and Normal

ตัวอย่าง จงหา Tangent vector ที่สัมผัสเส้นโค้ง

$$3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0 \quad \text{ที่จุด } (1,0)$$

วิธีทำ

1. หา $f(x,y)$ ได้ $f(x,y) = 3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0$

$$2. \quad \frac{df}{dx} = 6x + 8y \quad \frac{df}{dy} = 8x + 4y$$

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{df}{dy}} = \frac{-6x - 8y}{8x + 4y}$$

4. ที่จุด $(1,0)$

$$\text{ได้ } \frac{dy}{dx} = \frac{-6}{8}$$

ดังนั้นเราจะได้ Tangent vector เป็น

$$\vec{T} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$$

20

Dot Product (Scalar Product)

นิยาม ให้ $\vec{U} = \langle u_1, u_2 \rangle$ และ $\vec{V} = \langle v_1, v_2 \rangle$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{U} \cdot \vec{V} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= |\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta\end{aligned}$$

โดย θ คือมุมระหว่าง $\vec{U}$ และ $\vec{V}$

Dot product เป็น operation ระหว่าง vector กับ vector ที่ได้ผลเป็น Scalar เราสามารถใช้หามุมระหว่าง vector สองตัวได้ดังนี้

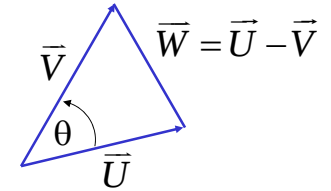
$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}| |\vec{V}|}$$

21

Proof of Dot Product

จาก Cosine law ดูที่มาหน้าถัดไป

$$\begin{aligned}|\vec{W}|^2 &= |\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 - 2|\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta \\ 2|\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta &= |\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 - |\vec{W}|^2 \rightarrow \text{Eq. 1}\end{aligned}$$



ให้ $\vec{U} = \langle u_1, u_2 \rangle$ และ $\vec{V} = \langle v_1, v_2 \rangle$

$$\begin{aligned}|\vec{U}|^2 &= u_1^2 + u_2^2 \quad |\vec{V}|^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad |\vec{W}|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 \\ &= u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2)\end{aligned}$$

แทนค่าลงใน Eq. 1 ได้

$$\begin{aligned}2|\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta &= u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 - u_1^2 - v_1^2 - u_2^2 - v_2^2 + 2(u_1 v_1 + u_2 v_2) \\ &= 2(u_1 v_1 + u_2 v_2)\end{aligned}$$

จะได้

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta$$

22

ที่มาของสมการ

$$|\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 = |\vec{W}|^2 + 2|\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta$$

Using trigonometry

Drop the perpendicular onto the side c to get (see Fig.)

$$c = a \cos(\beta) + b \cos(\alpha)$$

(This is still true if α or β is obtuse, and so the perpendicular falls outside the triangle.) Multiply through by c to get

$$c^2 = ac \cos(\beta) + bc \cos(\alpha)$$

By considering the other perpendiculars obtain

$$a^2 = ac \cos(\beta) + ab \cos(\gamma)$$

$$b^2 = bc \cos(\alpha) + ab \cos(\gamma)$$

Adding the latter two equations gives the law of cosines

$$a^2 + b^2 = ac \cos(\beta) + ab \cos(\gamma) + bc \cos(\alpha) + ab \cos(\gamma)$$

$$a^2 + b^2 = [ac \cos(\beta) + bc \cos(\alpha)] + [ab \cos(\gamma) + ab \cos(\gamma)]$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos(\gamma)$$

$$a = |\vec{U}|, b = |\vec{V}|, c = |\vec{W}| \text{ จะได้ } |\vec{U}|^2 + |\vec{V}|^2 = |\vec{W}|^2 + 2|\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta$$

23

Properties of Dot Product

$$1. \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

$$2. \quad c\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot c\vec{V} = c(\vec{V} \cdot \vec{U})$$

$$3. \quad \vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$$

$$4. \quad \vec{U} \cdot \vec{U} = |\vec{U}|^2$$

$$5. \quad \vec{U} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

24

Applications of Dot Product

ประโยชน์ของ Dot product

1. ใช้หามุมระหว่าง Vector 2 ตัว
2. ใช้ตรวจสอบว่า Vector 2 ตัวตั้งฉากกันหรือไม่

ถ้า $\vec{U}$ ตั้งฉากกับ $\vec{V}$ จะได้ $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

เราจะเรียก Vector ที่ตั้งฉากกันว่าเป็น Orthogonal กัน

3. ใช้ตรวจสอบว่า Vector 2 ตัวขนานกันหรือไม่

ถ้า $\vec{U}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{V}$ จะได้

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}|$$

ถ้า $\vec{U}$ มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{V}$ จะได้

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = -|\vec{U}| |\vec{V}|$$

25

Work

ในทางฟิสิกส์ งานมีนิยามว่า

$$\text{Work} = \vec{F} \cdot \vec{D} = |\vec{F}| \cos \theta |\vec{D}|$$

โดย $\vec{F}$ คือแรงกระทำ และ $\vec{D}$ คือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้

ถ้าให้ P เป็นจุดเริ่มต้นของการเคลื่อนที่วัตถุ และ Q เป็นจุดสุดท้าย เราจะได้

$$\text{Work} = \vec{F} \cdot \vec{D} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

ตัวอย่าง จงหางานที่เกิดจากแรง $\vec{F} = 5\vec{i}$ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงจากจุด (0,0) ไปยัง (1,1)

วิธีทำ $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$

$$\text{Work} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ} = \text{Work} = 5\vec{i} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 5$$

26

Applications of Dot Product

ตัวอย่าง จงแสดงให้เห็นว่า $\vec{V} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j}$ ขนานกับเส้นตรง $bx - ay = c$

วิธีทำ 1. หา Tangent vector ของเส้นตรง $bx - ay = c$

จัดรูปสมการใหม่ $y = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ ได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$

จะได้ Tangent vector เป็น $\vec{T} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$$2. \text{คำนวณ } \vec{V} \cdot \vec{T} = \frac{a \cdot a}{2} + \frac{b \cdot b}{2}$$

$$|\vec{V}| |\vec{T}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

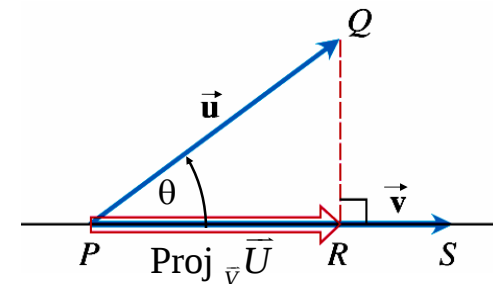
จะเห็นว่า $\vec{V} \cdot \vec{T} = |\vec{V}| |\vec{T}|$ ดังนั้น $\vec{V}$ ขนานกับ $bx - ay = c$

27

Vector Projection

Projection of $\vec{U}$ onto $\vec{V}$ หมายถึงส่วนประกอบของ $\vec{U}$ ในทิศทางเดียวกับ $\vec{V}$

$$\text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U} = (|\vec{U}| \cos \theta) \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\vec{V} \cdot \vec{V}} \right) \vec{V}$$



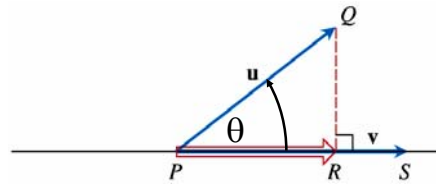
หมายเหตุ

$\text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U}$ ยังคงเป็นปริมาณ Vector

(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

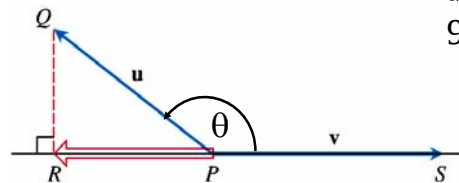
28

Vector Projection



ถ้ามุมระหว่าง $\vec{U}$ กับ $\vec{V}$ น้อยกว่า 90 องศา จะได้ว่า

$\text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{V}$



ถ้ามุมระหว่าง $\vec{U}$ กับ $\vec{V}$ มากกว่า 90 องศา จะได้ว่า

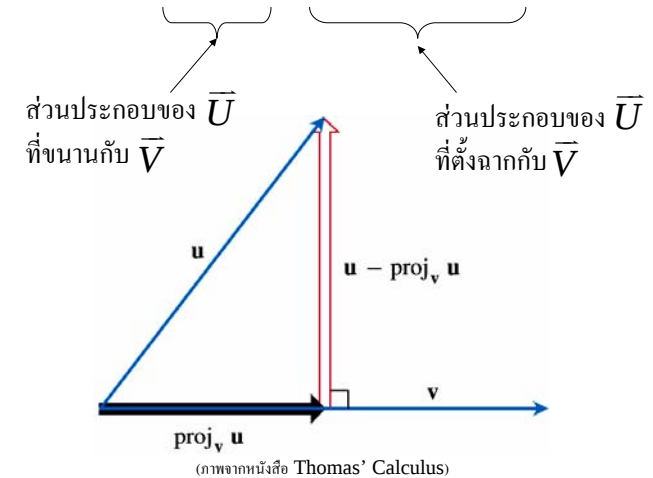
$\text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U}$ มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{V}$

29

Vector Projection

เราสามารถแบ่ง $\vec{U}$ ออกเป็น 2 ส่วนประกอบ

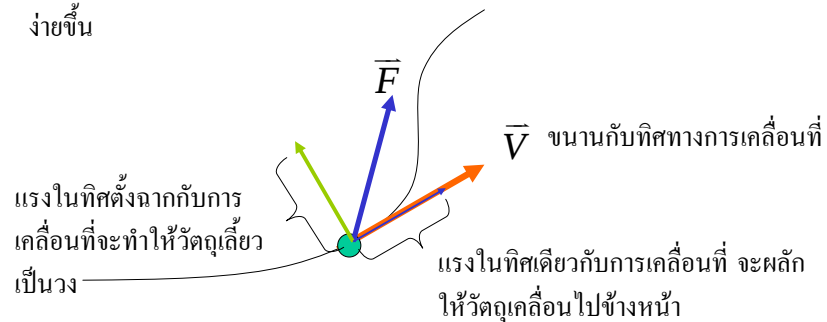
$$\vec{U} = \text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U} + (\vec{U} - \text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U})$$



30

Vector Projection

การแบ่ง Vector ออกเป็น 2 ส่วนคือส่วนประกอบในแนวขนานและส่วนประกอบในแนวตั้งฉากมีความสำคัญมากในวิชาฟิสิกส์, กลศาสตร์ และโครงสร้าง ตัวอย่างเช่น โจทย์ปัญหาเรื่องการเคลื่อนที่ เรานิยามแรงออกเป็น 2 แรงคือแรงในแนวขนานและแรงในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ จะทำให้การวิเคราะห์ง่ายขึ้น



การแยกแรงเช่นนี้ แรงทั้งสองส่วนนี้จะส่งผลต่อวัตถุคนละแบบ และไม่รบกวนกัน ทำให้เราสามารถแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 2 ส่วนได้

31

3D

180 120 Engineering Mathematics I

32

Content

เนื้อหาในบทนี้

Cartesian Coordinate, vector และ operations ในสามมิติ, เส้นตรงและระนาบในสามมิติ, พื้นผิวสามมิติ, vector-valued functions และ curve สามมิติ, ความยาวของ curve และ unit vector ที่สัมผัสกับ curve

คำว่า Space (แปลตรงตัวว่า อวกาศ) ในทางคณิตศาสตร์ไม่ได้หมายถึงที่ๆ ไม่มี
อวกาศ แต่หมายถึง ที่ที่บรรจุระบบของเราเอาไว้ เช่นตัวเราเองก็อยู่ใน Three
Dimensional Space คือเราอยู่ในระบบสามมิติที่มีทั้งความกว้าง ความยาวและความสูง

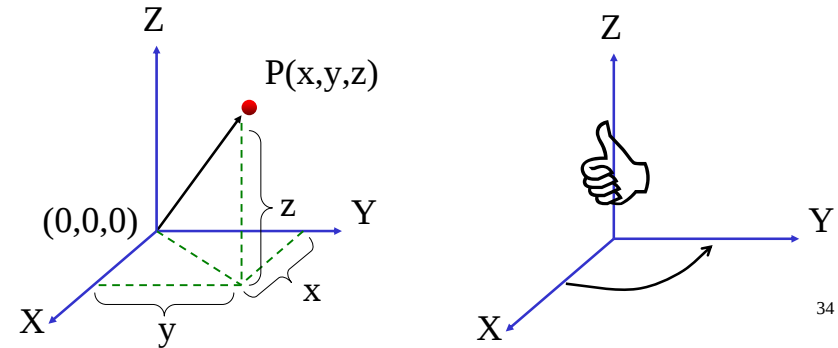
(ความจริง Space ที่เราอยู่มีมากกว่าสามมิติ เช่นทฤษฎีสัมพัทธภาพได้นับเอาเวลา
เป็นอีกมิติหนึ่ง และอาจจะมิตินี้มากกว่านี้ที่เหนือการรับรู้ของเราแต่เนื้อหาของเราใน
วิชานี้ใช้แค่ Space สามมิติก็เพียงพอ)

33

Cartesian Coordinate

การบอกตำแหน่งใน 3 มิติ เรานิยมใช้ Cartesian Coordinate ซึ่งประกอบด้วยเลข 3 ตัว (x,y,z) ซึ่งแทนระยะทางตามแนวแกน X, Y และ Z ตามลำดับวัดเทียบกับจุด Origin $(0,0,0)$

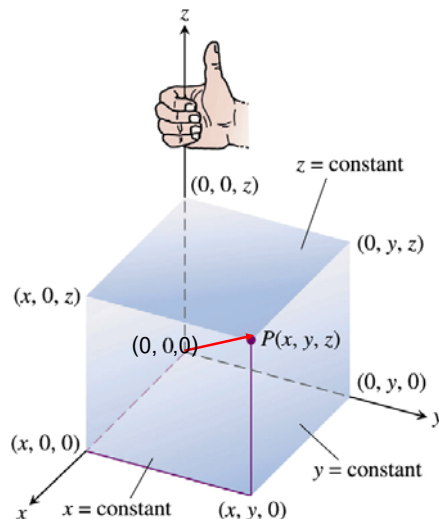
แกน X แกน Y และแกน Z จัดเรียงตามระบบมือขวา (Right Hand System) ดังรูป กล่าวคือ ถ้านิ้วมือขวาทั้ง 4 กวาดจากแกน X ไปยังแกน Y แล้ว นิ้วหัวแม่มือจะชี้ไปทางแกน Z



34

Cartesian Coordinate

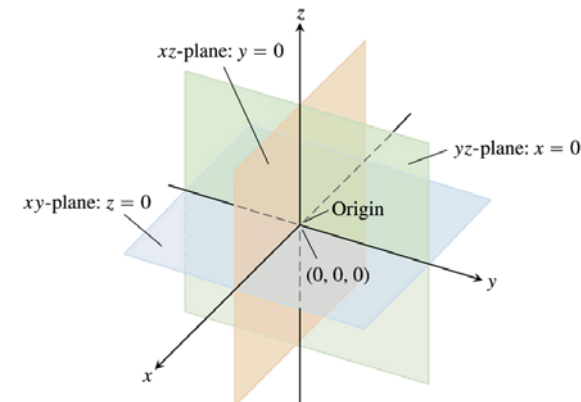
Cartesian Coordinate มีชื่อเรียกอีกชื่อว่า Rectangular Coordinate เนื่องจากว่า แกน X, Y, Z ตั้งฉากกัน ดังนั้นจุด (x,y,z) ก็คือจุดยอดของกล่อง



35

อัฐภาค (Octants)

เมื่อเราใช้แกน XYZ เป็นแกนอ้างอิง (Reference frame) เราสามารถแบ่ง Space โดยใช้ระนาบ $x=0$, ระนาบ $y=0$ และระนาบ $z=0$ ออกเป็น 8 ส่วนเท่าๆกัน เรียกว่า Octant ส่วนที่ x เป็น +, y เป็น +, z เป็น + เรียกว่า First Octant



36

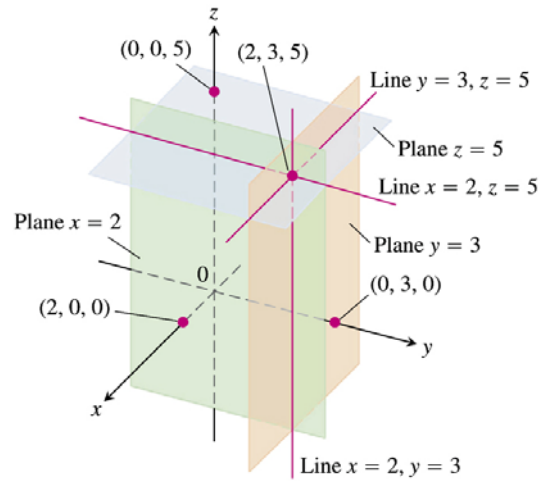


FIGURE 12.3 The planes $x = 2$, $y = 3$, and $z = 5$ determine three lines through the point $(2, 3, 5)$.

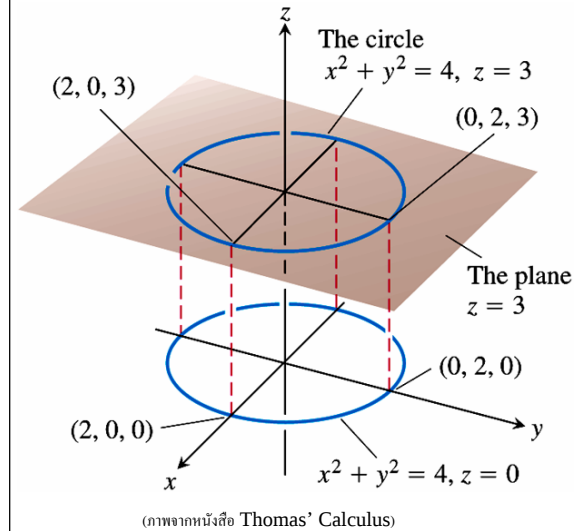
37

Cylinder

ใน 3 มิติเราสามารถสร้างพื้นผิวของทรงกระบอกที่มีแกน Z เป็นแกนกลางได้จากสมการ

$$x^2 + y^2 = R^2$$

โดย R คือรัศมีของทรงกระบอก



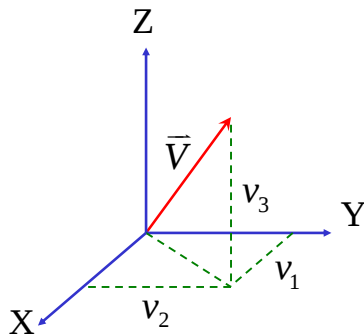
สมการนี้ออกมาเป็นพื้นผิวทรงกระบอกได้เพราะว่า ค่า Z ไม่ได้ถูกระบุไว้ในสมการ แปลว่า Z จะเป็นอะไรก็ได้ ดังนั้นที่ความสูง $Z =$ ค่าคงที่ใดๆ เราจะได้วงกลม 1 เสมอ เมื่อนำวงกลมที่ทุกๆค่า Z มาต่อกันก็จะได้ผิวทรงกระบอกออกมา 38

Component Form of a Vector in Space

เราสามารถอธิบาย vector ใน Space 3 มิติได้หลายรูปแบบ เช่น แบบ Component Form

$$\vec{V} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

v_1, v_2, v_3 คือส่วนประกอบของ $\vec{V}$ ในแนวแกน X, Y, Z ตามลำดับ



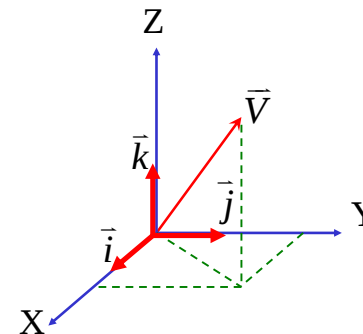
39

Standard Unit Vectors For 3D Space

เราสามารถอธิบาย vector โดยใช้ standard unit vector ดังนี้

$$\vec{V} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

โดย $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ คือ standard Unit vectors ตามแนวแกน X, Y, Z ตามลำดับ ดังรูป

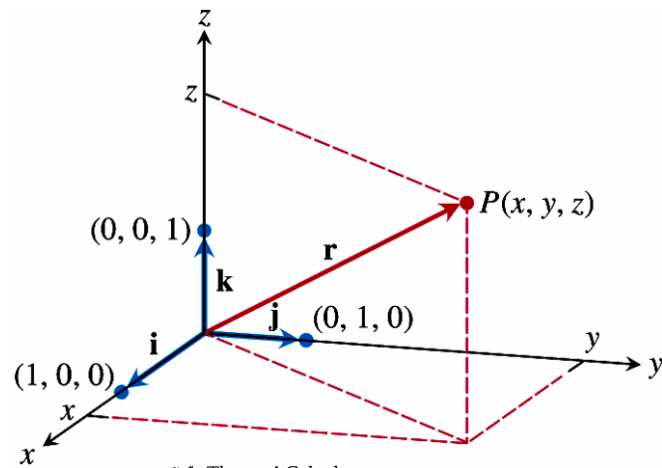


40

Position Vector

เมื่อเราใช้ vector ในการบอกตำแหน่ง เราเรียก vector นี้ว่า Position vector

เช่น $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ เป็น Position vector ของจุด $P(x, y, z)$

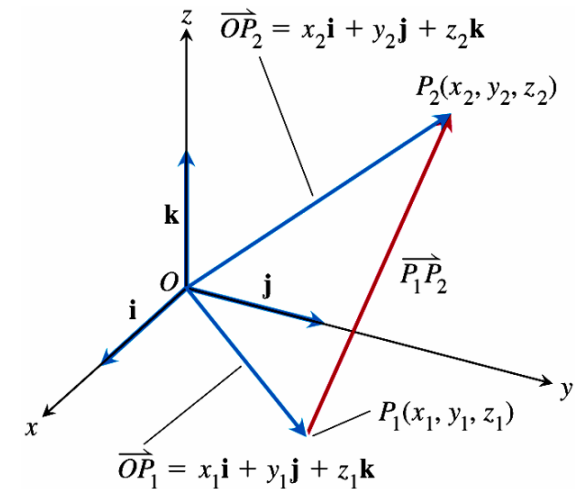


(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

41

Directed Line Segment

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$



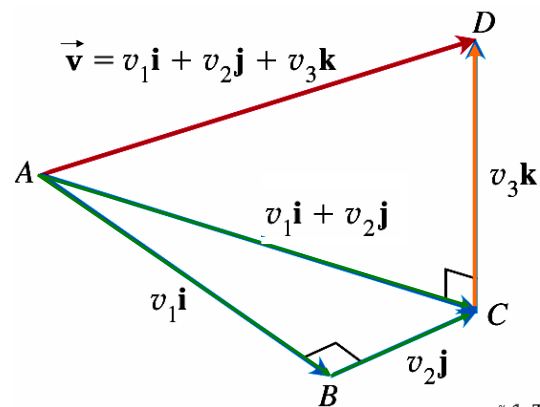
(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

42

Magnitude of Vectors

ขนาดของ vector สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$|\vec{V}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

43

Unit Vector

ใช้ในการบอกทิศทางของ vector โดยขนาดของ unit vector จะเป็น 1 เสมอ

$$\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

เราสามารถเขียน vector $\vec{V}$ ในรูปของ “ขนาดและทิศทาง” ได้ดังนี้

$$\vec{V} = |\vec{V}| \left(\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \right)$$

ขนาดของ $\vec{V}$

ทิศทางของ $\vec{V}$

44

Dot Product

นิยาม

$$\begin{aligned}\vec{U} \cdot \vec{V} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= |\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta\end{aligned}$$

เป็น operation ระหว่าง vector กับ vector ที่ได้ผลเป็น Scalar
สามารถใช้หามุมระหว่าง vector สองตัวได้

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}||\vec{V}|}$$

ถ้า $\vec{U}$ ตั้งฉากกับ $\vec{V}$ จะได้

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

45

Properties of Dot Product

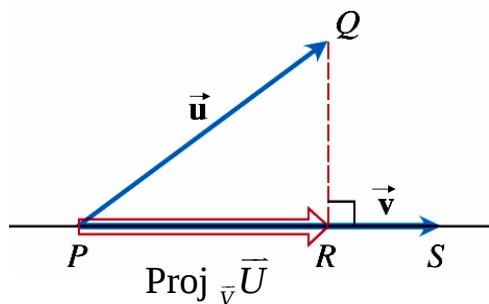
1. $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
2. $c\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot c\vec{U} = c(\vec{V} \cdot \vec{U})$
3. $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$
4. $\vec{U} \cdot \vec{U} = |\vec{U}|^2$
5. $\vec{U} \cdot \vec{0} = 0$

46

Vector Projection

Projection of $\vec{U}$ onto $\vec{V}$ หมายถึงส่วนประกอบของ $\vec{U}$
ในทิศทางเดียวกับ $\vec{V}$

$$\text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U} = \left(\vec{U} \cdot \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \right) \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\vec{V} \cdot \vec{V}} \right) \vec{V}$$



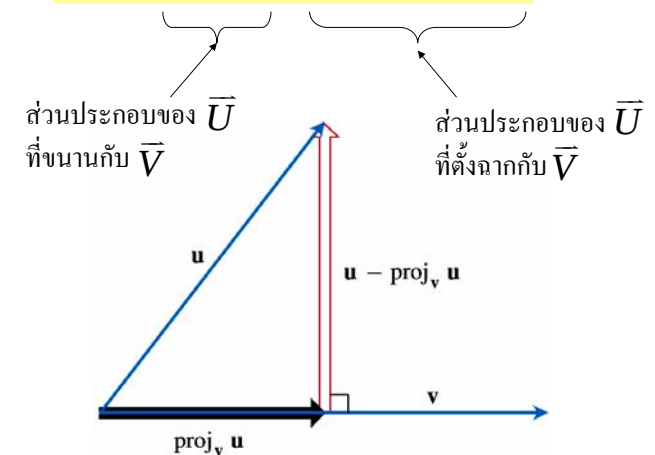
47

(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

Vector Project

เราสามารถแบ่ง $\vec{U}$ ออกเป็น 2 ส่วนประกอบ

$$\vec{U} = \text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U} + (\vec{U} - \text{Proj}_{\vec{V}} \vec{U})$$



48

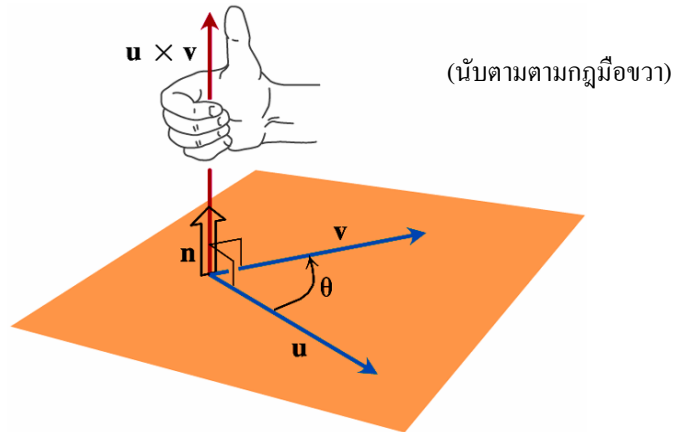
(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

Cross Product

นิยาม

$$\vec{U} \times \vec{V} = (|\vec{U}||\vec{V}|\sin \theta) \vec{n}$$

เป็น Operation ระหว่าง $\vec{U}$ กับ $\vec{V}$ ที่ให้ผลเป็น vector อีกตัวที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{U}$ และ $\vec{V}$

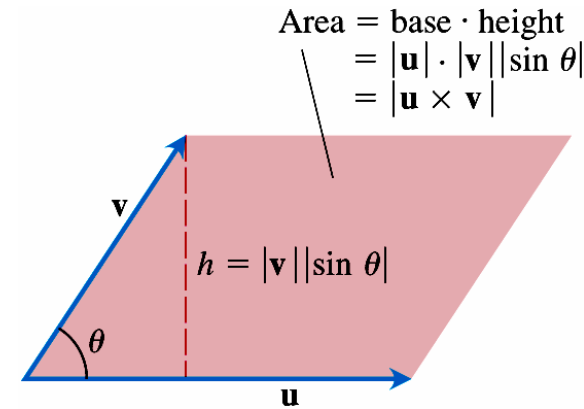


49

(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

Cross Product

ขนาดของ $|\vec{U} \times \vec{V}| = |\vec{U}||\vec{V}|\sin \theta$ เท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelogram) ที่มีด้านประกอบเป็น $\vec{U}$ และ $\vec{V}$



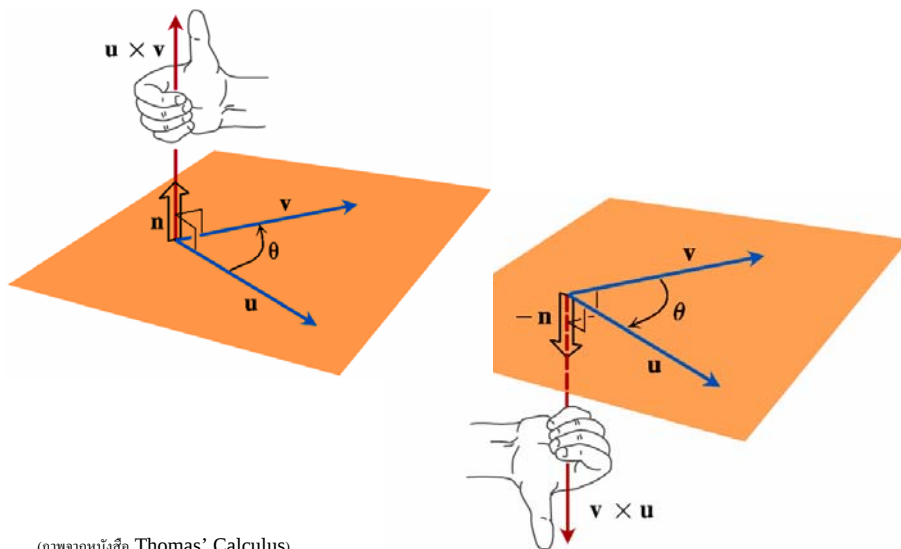
50

(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

Properties of Cross Product

1.

$$\vec{U} \times \vec{V} = -\vec{V} \times \vec{U}$$



(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

Properties of Cross Product

2. $r\vec{U} \times s\vec{V} = (rs)(\vec{U} \times \vec{V})$
3. $\vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \times \vec{V} + \vec{U} \times \vec{W}$
4. $(\vec{V} + \vec{W}) \times \vec{U} = \vec{V} \times \vec{U} + \vec{W} \times \vec{U}$
5. $\vec{U} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{U} = \vec{0}$

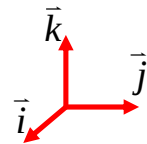
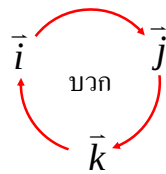
52

Cross Products of Standard Unit Vectors

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

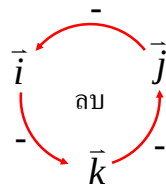
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$



$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

53

Determinant Formula for Cross Product

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

54

Determinant Formula for Cross Product

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

$$\text{หรือ} \quad = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

55

EXAMPLE 1 Calculating Cross Products with Determinants

Find $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ and $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ if $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solution

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

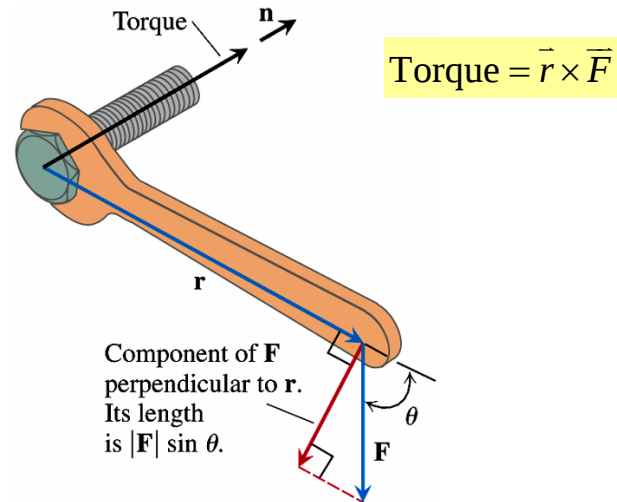
$$= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$$

56

Application of Cross Product: Torque

Torque ในทางกลศาสตร์หมายถึงแรงกระทำที่ทำให้เกิดการหมุน คำนวณได้จาก



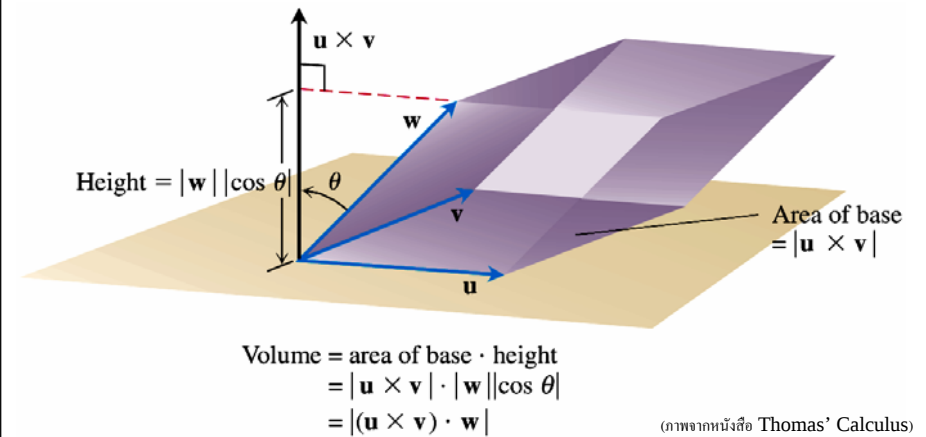
57
(ภาพจากหนังสือ Thomas' Calculus)

Box Product (Triple Scalar Product ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์)

นิยาม Box product ระหว่าง $\vec{U}$ $\vec{V}$ $\vec{W}$ (เรียงตามลำดับ) คำนวณจาก

$$= (\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} = |\vec{U} \times \vec{V}| |\vec{W}| \cos \theta$$

มีค่าเท่ากับปริมาตรของ parallel piped ดังรูป



Formula for Box Product

Box product สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตร Determinant ดังนี้

$$(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

คุณสมบัติของ Box product

- $(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} = (\vec{V} \times \vec{W}) \cdot \vec{U} = (\vec{W} \times \vec{U}) \cdot \vec{V}$
- $(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W})$

59

จงหาปริมาตรของกล่องที่มีด้าน 3 ด้าน ที่เกิดจากเวกเตอร์ $\vec{U} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\vec{V} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ และ $\vec{W} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

$$(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

ปริมาตรคือ -23

ซึ่งเราจะเรียนในรายละเอียดมากขึ้นเรื่อง Matrix and determinant ในบทที่ 2 ค่ะไป

60