

Tut unit 1

①

1) กำหนดจุด $A(-1, 3)$ และ $B(2, -7)$ เป็นจุด 2 จุดบนระนาบ

(1) จงหา $\vec{AB}$ ให้ออกในรูป $\vec{i}$ และ $\vec{j}$

(2) จงหาขนาดของ $\vec{AB}$

(3) จงหาเวกเตอร์หน่วย $\vec{u}$ ในทิศทางของ $\vec{AB}$

(4) จงหาเวกเตอร์ยาว 8 หน่วย และชี้ทิศทางเดียวกับ $\vec{AB}$

(5) จงหาเวกเตอร์ยาวเป็น 8 เท่าของ $\vec{AB}$

วิธีทำ

$$(1) \vec{AB} = (2 - (-1))\vec{i} + (-7 - 3)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \quad \#$$

$$(2) |\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \quad \#$$

$$(3) \text{เวกเตอร์หน่วย } \vec{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} \quad \#$$

(4) เวกเตอร์ยาว 8 หน่วย และชี้ทิศทางเดียวกับ $\vec{AB}$ คือ

$$8\left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right) = -\frac{24}{5}\vec{i} + \frac{32}{5}\vec{j} \quad \#$$

(5) เวกเตอร์ยาว 8 เท่าของ $\vec{AB}$ = $\pm 8\vec{AB}$

$$= \pm(24\vec{i} - 32\vec{j}) \quad \#$$

$$2) \quad \vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j} \quad \text{||} \vec{v} = 3\vec{i} + k\vec{j} \quad \text{||}$$

จงหาค่า k ที่ทำให้

$$(1) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad (2) \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \quad (3) \quad |\vec{v}| = |\vec{u}|$$

$$(4) \quad \vec{v} \text{ ใกล้เคียงกับ } \vec{u} \text{ มากที่สุด} \quad (5) \quad \vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v}$$

วิธีทำ

$$(1) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad (\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + k\vec{j}) = 0$$

$$3 + 4k = 0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{4} \quad *$$

$$(2) \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{อัตราส่วนของ } \vec{i} = \text{อัตราส่วนของ } \vec{j}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{k} \Rightarrow k = 12 \quad *$$

$$(3) \quad |\vec{u}| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+k^2}$$

$$\therefore 9+k^2 = 17$$

$$k^2 = 8 \Rightarrow k = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \quad *$$

$$(4) \quad |\vec{v}| = \sqrt{9+k^2} = 1$$

$$k^2 = -8$$

$\therefore$ ไม่มีค่าของ k ที่ทำให้เป็นจริง

$$(5) \quad (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v}) \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

$$(4\vec{i} + (4+k)\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + (4-k)\vec{j}) = 0$$

$$-8 + 16 - k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2} \quad *$$

③ $\vec{m} ABCD$ ជា ឆ្នាំងស្រីបង្កើតឡើងពីរឈូង ដំបូងពីចំណុច A ជា $(-1, 2)$

នោះ $\vec{AB} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{AD} = -\vec{i} + 5\vec{j}$ ចូររកចំណុច B និង C

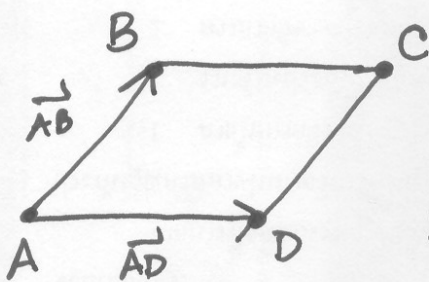
ដំណោះស្រាយ ឱ្យ B ជាចំណុច (x, y) និង C ជា (a, b)

$$\vec{AB} = (x+1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$x+1 = 9, \quad y-2 = 4$$

$$x = 8, \quad y = 6$$

$\therefore$ ចំណុច B គឺ $(8, 6)$ *



ចូររកចំណុច C ឱ្យ $ABCD$ ជា ឆ្នាំងស្រីបង្កើតឡើងពីរឈូង ដំបូងពីចំណុច A ជា $(-1, 2)$

នោះ $\vec{AD} = \vec{BC}$

$$\vec{BC} = -\vec{i} + 5\vec{j} = (a-8)\vec{i} + (b-6)\vec{j}$$

$$a-8 = -1 \quad ; \quad a = 7$$

$$b-6 = 5 \quad ; \quad b = 11$$

$\therefore$ ចំណុច C គឺ $(7, 11)$ *

④ កំណត់ $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ។ $\vec{v} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$ ។

4.1) រកចំនួនគតិច្ចាតាម $\vec{u}$ ដែលស្របជាមួយ $\vec{v}$

4.2) រកចំនួនគតិច្ចាតាម $\vec{u}$ ដែលស្របជាមួយ $\vec{v}$

ដំណោះស្រាយ 4.1) ឧបសគ្គ $a\vec{i} + b\vec{j}$ គឺជាចំនួនគតិច្ចាតាម $\vec{u}$ ដែលស្របជាមួយ $\vec{v}$

$$\therefore (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j}) = 0$$

$$3a - 4b = 0$$

$$3a = 4b$$

ឧបសគ្គ a ត្រូវជាចំនួនគតិច្ចាតាម $b = 3$ ។ ដូច្នេះ $a = 4$

$$\therefore a\vec{i} + b\vec{j} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

ឧបសគ្គ $a\vec{i} + b\vec{j}$ ដែលស្របជាមួយ $\vec{u}$ គឺជាចំនួនគតិច្ចាតាម $4\vec{i} + 3\vec{j}$ ។ ដូច្នេះ

$$\pm \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right)$$

ចំនួនគតិច្ចាតាម $a\vec{i} + b\vec{j}$ ដែលស្របជាមួយ $\vec{v}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore a\vec{i} + b\vec{j} = \pm 13 \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right) \quad \#$$

4.2) រកចំនួនគតិច្ចាតាម $\vec{u}$ ដែលស្របជាមួយ $\vec{v}$

$$\text{ឧបសគ្គ } a\vec{i} + b\vec{j} \text{ ដែលស្របជាមួយ } \vec{u} \text{ គឺជា } \pm \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} \right)$$

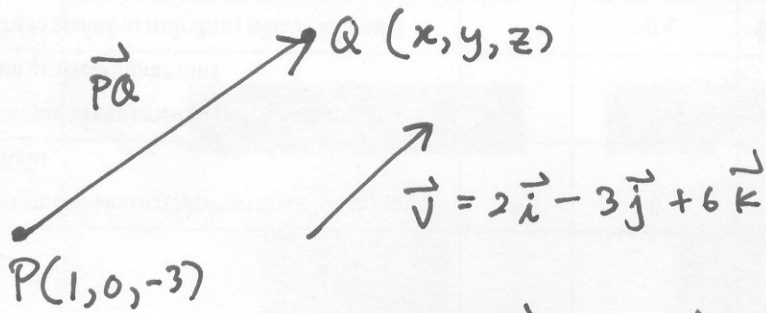
$$\therefore \text{ចំនួនគតិច្ចាតាម } \vec{u} \text{ ដែលស្របជាមួយ } \vec{v} \text{ គឺជា } \pm 13 \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} \right) \quad \#$$

5) 10ဂါဇဝန် $\vec{PQ}$ သို့ရာဒီမင်တန်ကိ $P(1, 0, -3)$ ခုးသီတာမဃာ

3 ယုးဝ် ကမ္မဏိကိတက ခုာ Q ကိကိဂါယ $\vec{PQ}$ ကမ္မဏိ

$$\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

သီတာ



$$\vec{PQ} = s\vec{v} \quad \text{သီတာ } s = \text{ကိကိကိကိ}$$

$$(x-1)\vec{i} + y\vec{j} + (z+3)\vec{k} = 2s\vec{i} - 3s\vec{j} + 6s\vec{k}$$

$$|\vec{PQ}| = 3, \quad \sqrt{4s^2 + 9s^2 + 36s^2} = 3$$

$$\sqrt{49s^2} = 3$$

$$\pm 7s = 3$$

$$s = \pm \frac{3}{7}$$

$$\therefore x-1 = 2s = 2\left(\pm \frac{3}{7}\right) = \pm \frac{6}{7}$$

$$x = 1 \pm \frac{6}{7} = \frac{13}{7}, \frac{1}{7}$$

$$y = -3s = -3\left(\pm \frac{3}{7}\right) = \frac{9}{7}, -\frac{9}{7}$$

$$z+3 = 6s = 6\left(\pm \frac{3}{7}\right) = \pm \frac{18}{7}$$

$$z = \pm \frac{18}{7} - 3 = -\frac{39}{7}, -\frac{3}{7}$$

$\therefore$ ခုာ Q ကိကိကိကိကိ သီတာ s ခုာ $s = \pm \frac{3}{7}$ ခုာ $\left(\frac{13}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{39}{7}\right)$ ခုာ $\left(\frac{1}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{3}{7}\right)$

(6)

6) маура $\vec{B} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ 14: $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ 1000

6.1) Vector projection no $\vec{B}$ on $\vec{A}$

6.2) Vector projection no $\vec{A}$ on $\vec{B}$

Solⁿ

6.1)

$$\text{proj}_{\vec{A}} \vec{B} = \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{|\vec{A}|^2} \right) \vec{A}$$

$$= \left(\frac{6 - 6 + 4}{9} \right) (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= \frac{4}{9} (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

6.2)

$$\text{proj}_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{|\vec{B}|^2} \right) \vec{B}$$

$$= \frac{6 - 6 + 4}{36 + 9 + 4} (6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= \frac{4}{49} (6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

(7)

7) จงเขียน $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเวกเตอร์

ที่ขนานและตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j}$

วิธีทำ

$$\vec{B} = (\underbrace{\text{proj}_{\vec{A}} \vec{B}}_{\parallel \vec{A}}) + (\underbrace{\vec{B} - \text{proj}_{\vec{A}} \vec{B}}_{\perp \vec{A}})$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{A}} \vec{B} &= \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{|\vec{A}|^2} \right) \vec{A} = \frac{6-1}{10} (3\vec{i} - \vec{j}) \\ &= \frac{1}{2} (3\vec{i} - \vec{j}) \\ &= \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} - \text{proj}_{\vec{A}} \vec{B} &= (2 - \frac{3}{2})\vec{i} + (1 - (-\frac{1}{2}))\vec{j} - 3\vec{k} \\ &= \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{B} = (\underbrace{\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}}_{\parallel \vec{A}}) + (\underbrace{\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k}}_{\perp \vec{A}})$$

8) $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

ရှာမူ $\vec{A} \times \vec{B}$ နှင့် $\vec{B} \times \vec{A}$

ဖြေ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \vec{i}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{j}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \vec{k}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k} \quad \#$$

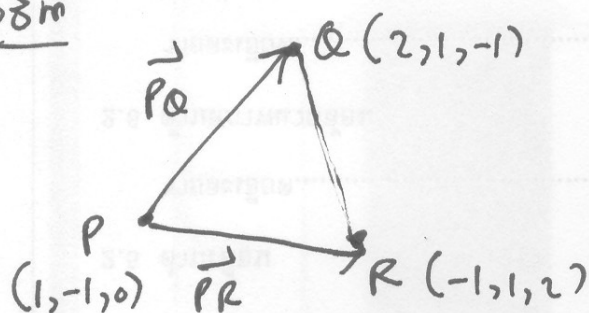
$$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B}) = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k} \quad \#$$

9) กำหนด $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ และ $R(-1, 1, 2)$
 ให้อ่าน 3 จุดใน 3 มิติ จงหา

9.1) เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุด P, Q, R และ
 หาขนาดเป็น 8 หน่วย

9.2) หาพื้นที่ของ ΔPQR

วิธีทำ



$$\vec{PQ} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{PR} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{k}$$

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ PQR และมีความยาว 8 หน่วย คือ

$$\pm 8 \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} = \pm 8 \frac{(6\vec{i} + 6\vec{k})}{\sqrt{36 + 36}}$$

$$= \pm 8 \frac{(6\vec{i} + 6\vec{k})}{6\sqrt{2}}$$

$$= \pm 8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k} \right) \quad \#$$

$$\text{พ.น. } \Delta PQR = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 6^2} = \frac{1}{2} 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ หน่วย} \quad \#$$

10) จงหาปริมาตรของกล่องรูปทรงสามเหลี่ยมที่เกิดจากเวกเตอร์

$$\vec{A} = 2\vec{i}, \quad \vec{B} = 2\vec{j}, \quad \vec{C} = 2\vec{k}$$

วิธีทำ

$$\text{Volume} = |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad \#$$

Quiz #1 (ကျန့် ၁)

၁၂၀၀ နံပါတ်က ΔPQR သို့မဟုတ်

$$P(2, -2, 1), \quad Q(3, -1, 2), \quad R(3, -1, 1)$$

သုညပြင်ကို ΔPQR ခေါ်အမည်

$$P(1, -1, 2), Q(2, 0, -1), R(0, 2, 1)$$