

บทที่ 2

Matrix and Determinant

1

เนื้อหา

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์ (Introduction to metrix): Metrices and metrix operations
2. ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant)
3. เมตริกซ์ผกผัน (Inverse metrix)
4. ระบบสมการเชิงเส้น (System of linear equations)

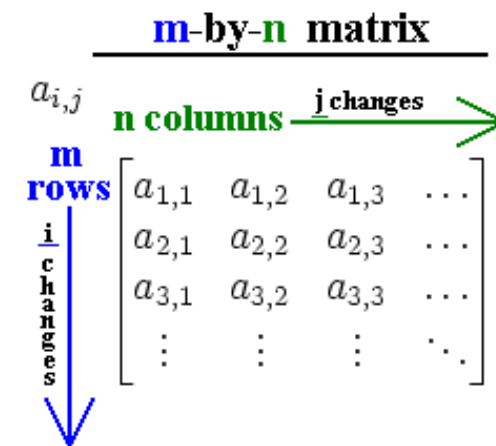
2

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์
(Introduction to metrix):
Metrices and metrix operations

3

เมตริกซ์

เมตริกซ์ คือตาราง ที่ประกอบด้วยตัวเลข ที่มีความหมาย สามารถนำมาคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้น เมตริกซ์นิยมนำมาใช้แก้สมการเชิงเส้น และมีการประยุกต์การใช้เมตริกซ์ในทางคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวาง



4

นิยามกับข้อกำหนด

เมตริกซ์โดยทั่วไปจะมี m แถว และมี n คอลัมน์
เราเรียกว่าเมตริกซ์มีขนาดเป็น m -by- n หรือ $m \times n$
สมาชิกของเมตริกซ์ในแถวที่ i กับคอลัมน์ที่ j นิยมเขียน
เป็น $A_{i,j}$ หรือ $A[i,j]$ โดยที่ a_{ij} , $1 \leq i \leq m$ และ
 $1 \leq j \leq n$

ตัวอย่าง

เมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×3 .

สมาชิกแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 3 หรือ $A[2,3]$ หรือ $a(2,3)$ คือ 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ R

$$R = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]$$

เป็นเมตริกซ์แถวขนาด 1×9 หรือเวกเตอร์แถวที่มีสมาชิก 9 ตัว

6

เมตริกซ์แบบต่าง ๆ (Some special matrix)

1. เมตริกซ์ศูนย์ (Null หรือ (Zero matrix)

A zero matrix is one which has all its elements zero. Here is a 3x3 zero matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7.5 \\ 2 & 9 & -3.2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7.5 \\ 2 & 9 & -3.2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

7

2. เมตริกซ์แถว (Row matrix)

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 4.6 \end{pmatrix}_{1 \times 4}$$

3. เมตริกซ์คอลัมน์ (Column matrix)

$$\begin{pmatrix} 5.12 \\ -4.08 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

4. เมตริกซ์จัตุรัส (Square matrix)

เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนคอลัมน์ หรือ $m=n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

8

5. เมตริกซ์ทแยงมุม หรือเมตริกซ์เฉียง (diagonal matrix)

เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเฉพาะแถวทแยงมุม ($i = j$) นอกนั้นที่ไม่ได้อยู่บนเส้นทแยงมุม $i \neq j$ จะมีค่าเป็น 0

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9

6. สเกลาร์เมตริกซ์ (Scalar matrix)

เป็นเมตริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกแถวทแยงมุม มีค่าเท่ากัน เช่น

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10

7. เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

เป็นเมตริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกแถวทแยงมุม มีค่าเป็น 1

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11

8. เมตริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular matrix)

เป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกเหนือหรือใต้แถวทแยงมุม นอกนั้น มีค่าเป็น 0

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Upper triangular matrix
เมตริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lower triangular matrix
เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

12

9. เมตริกซ์ทรานสโพส (Transpose matrix)

คือเมตริกซ์ที่สลับสมาชิกของแถวกับคอลัมน์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

13

คุณสมบัติของ Transpose matrix

กำหนดให้ A และ B เป็น Matrix และ k เป็นค่าคงที่

1. $(A^t)^t = A$
2. $(kA)^t = kA^t$
3. $(A+B)^t = A^t + B^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

14

10. เมตริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix)

คือเมตริกซ์จัตุรัสและมีทรานสโพสเมตริกซ์ A^t เท่ากับ A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & 9 \\ 2 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$
$$A^t = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & 9 \\ 2 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า A คือเมตริกซ์สมมาตร

15

11. เมตริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew-Symmetric matrix)

คือเมตริกซ์จัตุรัสและมีทรานสโพสเมตริกซ์ A^t เท่ากับ $-A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า A คือเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

16

12. เมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น (Echelon metrix)

A

17

13. เมตริกซ์เป็นคาบ (Periodic matrix)

คือเมตริกซ์จัตุรัสและมีทรานสโพสเมตริกซ์ $A^{k+1} = A$
เมื่อ $k=1$ นั่นคือ $A^2 = A$ เช่น

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } A.A = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า A คือเมตริกซ์เป็นคาบ

18

14. เมตริกซ์เอกฐาน (Singular matrix)

15. ดรรชนีของเมตริกซ์ (Index of matrix)

16. เมตริกซ์ย่อย (Partitioned matrix)

19

คุณสมบัติการดำเนินการของเมตริกซ์

1. การเท่ากัน (Equality of matrices)

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 3 & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

ถ้า $A = B$ จะได้ว่าสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันจะเท่ากัน
นั่นคือ $x = 3, q = 2, r = 3$ และ $s = 5$

2. การบวกและการลบเมตริกซ์ (Addition and subtraction)

หน้าถัดไป

20

การบวกและการลบเมตริกซ์

เมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน (ทั้งจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์สามารถบวก ลบกันได้โดยนำค่าของสมาชิกมาบวกกันหรือลบกันโดยตรง

$$A \pm B = [a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 8 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 \\ 10 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

21

คุณสมบัติการบวกลบเมตริกซ์

$$A = B$$

เมื่อขนาดของ A เท่ากับขนาดของ B และสมาชิกทุกตัวเท่ากัน

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \underline{0} = A$$

$$A - A = \underline{0}$$

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

22

การคูณเมตริกซ์

- การคูณเมตริกซ์ด้วยปริมาณสเกลาร์
- การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

23

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

$$C_{m \times q} = A_{m \times n} \times B_{n \times q}$$

จำนวนคอลัมน์ของ A ต้องเท่ากับจำนวนแถวของ B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 21 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

24

คุณสมบัติการคูณเมตริกซ์

$$(AB)C = A(BC)$$

$$I_m A = A = A I_n$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

$$AB \neq BA$$

25

2. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์

Determinants of metrices

26

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ $\det(A)$ หรือ $|A|$ มีความสำคัญในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ โดยทั่วไปวิธีคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์มี 2 วิธี

- โดยการคูณทะแยง (ในกรณีของเมตริกซ์ขนาดเล็ก)
- โดยการกระจายโคแฟกเตอร์

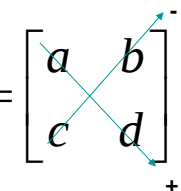
27

โดยการคูณทะแยง

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ $\det(A)$ หรือ $|A|$ มีความสำคัญในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ วิธีคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์มีหลายวิธีดังนี้

1. การหาโดยตรง (ในกรณีของเมตริกซ์ขนาดเล็ก) เช่น

เมตริกซ์ขนาด 2×2 (หาดีเทอร์มิแนนต์ได้ในกรณีของเมตริกซ์จัตุรัสเท่านั้น)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det A = ad - cb$$


28

เมตริกซ์ขนาด 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

+ + +

$$\det A = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

เมตริกซ์ที่มีขนาดมากกว่านี้ จะทำแบบนี้ไม่ได้ ต้องใช้วิธีการกระจาย cofactor เท่านั้น

29

การหา Determinant โดยใช้วิธีการกระจายโคแฟกเตอร์

Cofactor A_{ij} หาได้จาก Matrix A ถูกตัดแถวที่ i และ Column ที่ j ออกไปแล้วหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ที่เหลือ (จะมีขนาดเล็กลงเสมอ) แล้วนำ **cofactor** มาหาค่าดีเทอร์มิแนนต์

ตัวอย่างที่ 1. จงหาค่าของ A_{12} และ A_{23}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

30

หาค่า A_{12} ต้องตัดแถวที่ 1 และ Column ที่ 2 ออก จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

คูณข้างหน้าด้วย $(-1)^{(1+2)}$ จะได้

$$A_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -42$$

31

ตัวอย่างที่ 1. (ต่อ)

หาค่า A_{23} ต้องตัดแถวที่ 2 และ Column ที่ 3 ออก จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

คูณข้างหน้าด้วย $(-1)^{(2+3)}$ จะได้

$$A_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

การกระจาย Cofactor เราสามารถเลือกจะใช้แถวหรือ Column ใดเป็นหลักก็ได้ แต่การคำนวณจะง่ายขึ้นถ้าเราเลือกแถวหรือ Column ที่มีสมาชิกเป็น 0 อยู่มาก

32

ตัวอย่างที่ 2. จงหา Determinant ของ Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 1 เลือกแถวหรือ Column ที่จะเป็นหลัก ในข้อนี้เห็นว่า Column ที่ 1 มีสมาชิกเป็นเลข 0 ถึง 2 ตัว ดังนั้นเราควรเลือก Column ที่ 1 เป็นหลักในการกระจาย Cofactor

ขั้นที่ 2 เขียนสูตรกระจาย Cofactor ในที่นี้เราใช้การกระจายแบบ Column เราจะต้องทำดังนี้

33

1. เลือกสมาชิกทุกตัวใน Column ที่ 1 มา เราจะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

$$a_{11} \quad a_{21} \quad a_{31} \quad a_{41}$$

จากนั้นจึงเขียนสูตร

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

(ในกรณีที่เลือกแถวที่ 1 เป็นหลัก จะได้ว่า

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14})$$

34

คำนวณ Cofactor ตามสูตรโดยไม่จำเป็นต้องคำนวณ ถ้าค่า a_{ij} เป็น 0

ดังนั้นไม่ต้องคำนวณ A_{31} และ A_{41} จะเหลือเพียง A_{11} และ A_{21} ที่ต้องคำนวณ

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \text{ จะเห็นว่าในสูตรของ } A_{11} \text{ มีแถวที่ซ้ำกัน 2 แถว ดังนั้น } A_{11} = 0$$

(ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีแถวซ้ำกันมีค่าเป็น 0)

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -((3)(-1)(5) + (1)(2)(2) + (0)(1)(-3) - (2)(-1)(0) - (2)(-3)(3) - (1)(1)(5))$$

$$= -(-15 + 4 + 0 + 0 + 18 - 5) = -2$$

$$\therefore \det(A) = (4)(0) + (-1)(-2) + (0)(A_{31}) + (0)(A_{41}) = 2$$

35

คุณสมบัติของ ดีเทอร์มิแนนต์

1. $\det(A^t) = \det(A)$
2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. ถ้าสมาชิกของแถวใดแถวหนึ่ง หรือของคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งเป็น 0 จะทำให้ดีเทอร์มิแนนต์เป็น 0
4. ถ้าสลับแถวหรือสลับคอลัมน์จะทำให้ดีเทอร์มิแนนต์เปลี่ยนเครื่องหมาย
5. ถ้ามีแถวเหมือนกัน 2 แถว หรือคอลัมน์เหมือนกัน 2 คอลัมน์จะทำให้เมทริกซ์นั้นดีเทอร์มิแนนต์เป็น 0
6. ถ้าสมาชิกของแถวใดแถวหนึ่ง หรือของคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งถูกคูณด้วย k จะทำให้ดีเทอร์มิแนนต์เป็น k เท่าด้วย
7. ถ้าสมาชิกของแถวใดแถวหนึ่ง หรือของคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งถูกคูณด้วย k แล้วนำไปบวกหรือลบกับแถวหรือคอลัมน์ที่สอดคล้องกัน จะทำให้ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เปลี่ยนแปลง

36

3. เมตริกซ์ผกผัน (Inverse matrices)

- โดยวิธีการหา Adjoint ของเมตริกซ์
- โดยวิธี การแปลงเมตริกซ์เชิงธาตุมูล (Elementary matrix transformation)

37

การหา Inverse โดยหา Adjoint ของเมตริกซ์

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det A}$$

โดยที่ $adjA$ คือเมตริกซ์จัตุรัสอันดับ n ที่มีสมาชิกอยู่ในตำแหน่ง (i,j)

$$\text{หรือถ้า } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$$

38

การหา Inverse โดยวิธี Elementary operation

ใช้สำหรับแปลง Matrix ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น เช่นในเรื่องการแปลง Matrix ให้อยู่ในรูป Normal form หรือเรื่องการหา Inverse matrix โดยการแปลง $[A : I]$ ให้เป็น $[I : B]$

Elementary operation มีให้เลือกมากมายหลายอย่าง หากเลือก Operation ไม่เหมาะสมอาจจะเสียเวลาคำนวณมาก การเข้าใจในหลักการเลือก Operation เป็นสิ่งสำคัญ จะทำให้ไม่เสียเวลามากในการคำนวณ

39

การใช้ Elementary row operation ในการหา Inverse matrix (ห้ามใช้ Elementary column operation ในการหา Inverse matrix)

ตัวอย่างที่ 3. จงหา Inverse matrix ของ Matrix ต่อไปนี้โดยใช้

Elementary row operation

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix}$$

1. ตั้งเป้าหมายการแปลง Matrix

$$[A|I] \Rightarrow [I|B], \quad B = \text{inverse}(A)$$

40

เรามี Matrix ตั้งต้นคือ

$$[A:I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 5 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$\text{inverse}(A)$

เป้าหมายคือเราจะต้องใช้

Elementary row operation
แปลง Matrix ให้เป็น

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array} \right]$$

41

2. แปลง Matrix $[A : I]$ ให้เป็นตามเป้าหมาย

2.1 ทำให้ a_{11} เป็น 1 ในที่นี้เราสามารถทำได้หลายวิธีเช่นหารแถวที่ 1 ด้วย a_{11} หรือ สลับแถว 1 กับ แถว 2 ในที่นี้เราเลือกการหาร แถว 1 ด้วย 5 จะได้

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 5 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_1/5 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

42

2.2. ทำให้ a_{21} , a_{31} , และ a_{41} เป็น 0 โดยการ

2.2.1 แถว 2 – (แถว 1)* a_{21} แล้วเก็บไว้ในแถว 2

2.2.2 แถว 3 – (แถว 1)* a_{31} แล้วเก็บไว้ในแถว 3

2.2.3 แถว 4 – (แถว 1)* a_{41} แล้วเก็บไว้ในแถว 4

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_2 - R_1 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -0.4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_3 - 2R_1 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -0.4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

43

2.3 ทำให้ a_{22} เป็น 1 โดยการหารแถวที่ 2 ด้วย a_{22} ซึ่งเท่ากับ -1

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -0.4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-R_2 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 0.2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -0.4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

44

2.4 ทำให้ a_{12} , a_{32} , และ a_{42} เป็น 0 โดยการ

2.4.1 แถว 1 – (แถว 2)* a_{12} แล้วเก็บไว้ในแถว 1

2.4.2 แถว 3 – (แถว 2)* a_{32} แล้วเก็บไว้ในแถว 3

2.4.3 แถว 4 – (แถว 2)* a_{42} แล้วเก็บไว้ในแถว 4

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 0.2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -0.4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - 4R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 0.2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -0.6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.5 & -0.8 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

45

2.5 ทำให้ a_{33} เป็น 1 โดยการหารแถวที่ 3 ด้วย a_{33} ซึ่งเท่ากับ 8

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 0.2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -0.6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.5 & -0.8 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_3 / 8 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 0.2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 & -0.075 & 0.125 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.5 & -0.8 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

46

2.6 ทำให้ a_{13} , a_{23} , และ a_{43} เป็น 0 โดยการ

2.6.1 แถว 1 – (แถว 3)* a_{13} แล้วเก็บไว้ในแถว 1

2.6.2 แถว 2 – (แถว 3)* a_{23} แล้วเก็บไว้ในแถว 2

2.6.3 แถว 4 – (แถว 3)* a_{43} แล้วเก็บไว้ในแถว 4

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 0.2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 & -0.075 & 0.125 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.5 & -0.8 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - 4R_3 \\ R_2 + 4R_3 \\ R_4 - 14R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0.3 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -0.1 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 & -0.075 & 0.125 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0.25 & 2.25 & -1.75 & 1 \end{array} \right]$$

47

2.7 ทำให้ a_{44} เป็น 1 โดยการหารแถวที่ 4 ด้วย a_{44} ซึ่งเท่ากับ 10

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0.3 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -0.1 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 & -0.075 & 0.125 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0.25 & 2.25 & -1.75 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_4 / 10 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0.3 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -0.1 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 & -0.075 & 0.125 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.025 & 0.225 & -0.175 & 0.1 \end{array} \right]$$

48

2.8 ทำให้ a_{14} , a_{24} , และ a_{34} เป็น 0 โดยการ

2.8.1 แถว 1 – (แถว 4)* a_{14} แล้วเก็บไว้ในแถว 1

2.8.2 แถว 2 – (แถว 4)* a_{24} แล้วเก็บไว้ในแถว 2

2.8.3 แถว 3 – (แถว 4)* a_{34} แล้วเก็บไว้ในแถว 3

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0.3 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -0.1 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 & -0.075 & 0.125 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.025 & 0.225 & -0.175 & 0.1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - 7R_4 \\ R_2 + 5R_4 \\ R_3 - 0.25R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & -1.075 & 0.725 & -0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.025 & 0.625 & -0.375 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.08125 & 0.06875 & 0.16875 & -0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.025 & 0.225 & -0.175 & 0.1 \end{array} \right] \quad 49$$

ได้คำตอบเป็น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.125 & -1.075 & 0.725 & -0.7 \\ 0.025 & 0.625 & -0.375 & 0.5 \\ -0.08125 & 0.06875 & 0.16875 & -0.025 \\ 0.025 & 0.225 & -0.175 & 0.1 \end{bmatrix}$$

ทดสอบคำตอบโดย $A \cdot A^{-1} = I$ หรือไม่

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.125 & -1.075 & 0.725 & -0.7 \\ 0.025 & 0.625 & -0.375 & 0.5 \\ -0.08125 & 0.06875 & 0.16875 & -0.025 \\ 0.025 & 0.225 & -0.175 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ถูกต้อง

(จะเห็นว่าเสียเวลาในการคำนวณมากถ้าทำด้วยมือ)

50

การใช้ Elementary operation ในการแปลง Matrix ให้อยู่ในรูป Normal form

เราสามารถใช้ Row operation หรือ Column operation ก็ได้ โดยมีเป้าหมายคือต้องการให้ Matrix อยู่ในรูปของ

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{array} \right] \text{ หรือ } \left[I_n \mid \underline{0} \right] \text{ หรือ } \left[\begin{array}{c} I_n \\ \hline \underline{0} \end{array} \right]$$

โดย $\underline{0}$ หมายถึง Zero matrix

51

การวางแผนการเลือกใช้ Operation ต่างๆ จะคล้ายกับของการหา Inverse matrix ในตัวอย่างก่อน คือเราจะต้องรู้ว่าตำแหน่งใดที่ควรจะเป็นเลข 1 และตำแหน่งใดควรจะเป็นเลข 0 จากนั้นจึงเลือก Operation ที่ต้องการ

ประโยชน์ของการทำ Normal form คือใช้ในการตรวจสอบหา Rank ของเมทริกซ์ Rank ของ Matrix A คือขนาดของ Matrix ย่อยของ A ที่โตที่สุดที่ Determinant มีค่าไม่เป็น 0

เราสามารถหาค่า Rank ได้จากการหาค่า Determinant ที่ไม่เป็น 0 ของเมทริกซ์ย่อยของ A หรือการดูจาก Normal form ของ A **แต่ดูจาก Normal form จะดีกว่า**

52

วิธีการหา Rank จาก Normal form ของเมทริกซ์ A

1. แปลง A ให้อยู่ในรูป Normal form โดยใช้ Elementary row operation และ Elementary column operation
2. ขนาดของ Matrix I ที่อยู่ใน Normal form ของ A จะเป็น Rank ของ A เนื่องจาก Normal form ของ A สัมมูลกับ A จะมี Rank เป็นตัวเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 4. จงหา Rank ของ Matrix A ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix}$$

53

วิธีทำ 1. ตั้งเป้าหมายก่อนว่าจะแปลง Matrix ให้อยู่ในรูปใด ในที่นี้เราต้องการ Matrix เป้าหมายเป็น Normal form ซึ่งอาจเป็นได้หลายแบบเช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑ ↑

Rank=4 Rank=3 Rank=2 Rank=1

54

2. ทำ Elementary row หรือ column operation เพื่อให้ได้ Normal form (ในที่นี้การทำ Normal form สามารถใช้ทั้ง row หรือ column operation ก็ได้ ไม่เหมือนกับการหา inverse matrix หรือการหาคำตอบของสมการ ที่เราจะต้องใช้ Row operation เพียงอย่างเดียวเท่านั้น)

2.1 ทำให้ a_{11} เป็น 1 โดย สลับแถว 1 กับแถว 3 (เพราะว่า เลข 7 หากล้าบาก)

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix}$$

เราต้องการหา rank การเปลี่ยนแปลงของดีเทอร์มิแนนต์ไม่จำเป็นต้องสนใจ

55

2.1.1 หารแถว 1 ด้วย a_{11}

$$R_1 / 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix}$$

2.2 ทำให้ a_{21} , a_{31} , และ a_{41} เป็น 0 (a_{21} , และ a_{41} เป็น อยู่แล้ว)

$$R_3 - 7R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -12.5 & -13 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix}$$

56

2.3 ทำให้ a_{22} เป็น 1 โดยการหารแถว 2 ด้วย a_{22}

$$R_2 / 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -12.5 & -13 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1.5 \\ 0 & -12.5 & -13 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix}$$

2.4 ทำให้ a_{12} , a_{32} , และ a_{42} เป็น 0

$$\begin{aligned} R_1 - 1.5R_2 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1.5 \\ 0 & -12.5 & -13 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -10.5 \end{bmatrix} \\ R_3 + 12.5R_2 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 & -9/4 \\ 0 & 1 & 3 & 1.5 \\ 0 & 0 & 24.5 & 67/4 \\ 0 & 0 & -14 & -33/2 \end{bmatrix} \\ R_4 - 4R_2 &\rightarrow \end{bmatrix}$$

57

2.5 ทำให้ a_{33} เป็น 1 โดยการหารแถว 3 ด้วย a_{33}

$$R_3 / 24.5 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 & -9/4 \\ 0 & 1 & 3 & 1.5 \\ 0 & 0 & 24.5 & 67/4 \\ 0 & 0 & -14 & -33/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 & -9/4 \\ 0 & 1 & 3 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 67/98 \\ 0 & 0 & -14 & -33/2 \end{bmatrix}$$

2.6 ทำให้ a_{13} , a_{23} , และ a_{43} เป็น 0

$$\begin{aligned} R_1 + 2.5R_3 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 & -9/4 \\ 0 & 1 & 3 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 67/98 \\ 0 & 0 & -14 & -33/2 \end{bmatrix} \\ R_2 - 3R_3 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -53/98 \\ 0 & 1 & 0 & -27/49 \\ 0 & 0 & 1 & 67/98 \\ 0 & 0 & -14 & -33/2 \end{bmatrix} \\ R_4 + 14R_3 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -53/98 \\ 0 & 1 & 0 & -27/49 \\ 0 & 0 & 1 & 67/98 \\ 0 & 0 & 0 & -97/14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

58

หมายเหตุ ในข้อนี้เราจะหยุดทำตั้งแต่ 2.6 ก็ได้เพราะเราได้ Upper triangular matrix แล้ว ซึ่ง Determinant ของ Upper triangular matrix หาได้จากการคูณสมาชิกในแนวทแยงทั้งหมด ในข้อนี้จะเห็นว่า Determinant ของ Upper triangular matrix ในข้อนี้ไม่เท่ากับ 0 ดังนั้น Rank ของ Upper triangular matrix ตัวนี้จึงเป็น 4 และเนื่องจาก matrix นี้สมมูลกับ A ดังนั้น A จึงมี Rank เท่ากับ 4 ด้วย

2.7 ทำให้ a_{44} เป็น 1 โดยการหารแถวที่ 4 ด้วย a_{44}

$$R_4 / \left(-\frac{97}{14}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -53/98 \\ 0 & 1 & 0 & -27/49 \\ 0 & 0 & 1 & 67/98 \\ 0 & 0 & 0 & -97/14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -53/98 \\ 0 & 1 & 0 & -27/49 \\ 0 & 0 & 1 & 67/98 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

59

2.8 ทำให้ a_{14} , a_{24} , และ a_{34} เป็น 0

$$\begin{aligned} R_1 + \frac{53}{98}R_4 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -53/98 \\ 0 & 1 & 0 & -27/49 \\ 0 & 0 & 1 & 67/98 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_2 + \frac{27}{49}R_4 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_3 - \frac{67}{98}R_4 &\rightarrow \end{bmatrix}$$

ในข้อนี้เราได้ Normal form ของ A เป็น I_4 ดังนั้น A มี Rank เท่ากับ 4
หมายเหตุ เราสามารถหา Rank ได้จากจำนวนแถวหรือ Column ที่ไม่เป็น 0 ของ matrix Normal form

60

4. ระบบสมการเชิงเส้น (System of linear equations)

61

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์

วิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นมี 3 วิธีคือ

- 1 ใช้ Inverse matrix เหมาะกับระบบที่มีสมการจำนวนไม่มาก (2-3 สมการ)
- 2 ใช้ Cramer's rule เหมาะกับระบบที่มีสมการจำนวนไม่มาก
- 3 ใช้วิธีการของ Gauss-Elimination ซึ่งเหมาะกับระบบที่มีสมการจำนวนมาก

ตัวอย่างที่ 5. จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้ Cramer's rule

$$x + y - 3z = 0$$

$$y - 4z = 0$$

$$x - y - z = 5$$

62

วิธีทำ 1. เขียนโจทย์ให้อยู่ในรูป Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์ทราบ
ค่า

เมตริกซ์ของ
สัมประสิทธิ์

เวกเตอร์ไม่
ทราบค่า

63

2. หา Determinant ของ A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

3. หาค่า x โดย

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{5}{6}$$

เวกเตอร์ทราบค่า
แทน สปส ของ x

64

4. หาค่า y โดย

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{10}{3}$$

เวกเตอร์ทราบค่า
แทน สปส ของ y

5. หาค่า z โดย

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{5}{6}$$

เวกเตอร์ทราบค่า
แทน สปส ของ z

จะเห็นวิธีของ Cramer rule ต้องหาดีเทอร์มิแนนต์หลายครั้ง จึงไม่เหมาะกับระบบสมการเชิงเส้นที่มีหลายตัวแปร (มากกว่า 3)

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคำตอบของระบบสมการ โดยวิธีการของ Gauss-Elimination

$$x + 2y - 2z + 3w = 8$$

$$2x - 3y - 4z + w = -7$$

$$-x + 4y - z + 2w = 11$$

$$4x + 5y - 2z + 4w = 28$$

วิธีทำ 1. เขียนโจทย์ให้อยู่ในรูป Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 11 \\ 28 \end{bmatrix}$$

66

2. สร้าง Augmented matrix โดยนำเมทริกซ์สัมประสิทธิ์มาต่อกับเวกเตอร์ที่ทราบค่า

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & -3 & -4 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -1 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 28 \end{array} \right]$$

3. ตั้งเป้าหมายของการแปลง Matrix ให้อยู่ในรูป

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{array} \right]$$

67

4. ทำ Elementary row operation เพื่อแปลงให้ Augmented matrix กลายเป็น Matrix เป้าหมาย(จะต้องใช้ Row operation เท่านั้น ห้ามใช้ Column operation)

4.1 ทำให้ a_{11} เป็น 1 โดยการหารแถว 1 ด้วย a_{11} (ในที่นี้ไม่ต้องทำเพราะ a_{11} เป็น 1 อยู่แล้ว)

4.2 ทำให้ a_{21} , a_{31} , และ a_{41} เป็น 0 โดย

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow \\ R_3 + R_1 \rightarrow \\ R_4 - 4R_1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & -3 & -4 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -1 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 28 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -5 & -23 \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 19 \\ 0 & -3 & 6 & -8 & -4 \end{array} \right]$$

68

4.3 ทำให้ a_{22} เป็น 1 โดยการหารแถว 2 ด้วย a_{22}

$$R_2 / -7 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -5 & -23 \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 19 \\ 0 & -3 & 6 & -8 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 23/7 \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 19 \\ 0 & -3 & 6 & -8 & -4 \end{array} \right]$$

4.4 ทำให้ a_{32}, a_{42} เป็น 0 โดยการ

$$\begin{array}{l} R_3 - 6R_2 \rightarrow \\ R_4 + 3R_2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 23/7 \\ 0 & 6 & -3 & 5 & 19 \\ 0 & -3 & 6 & -8 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 23/7 \\ 0 & 0 & -3 & 5/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 6 & -41/7 & 41/7 \end{array} \right]$$

69

4.5 ทำให้ a_{33} เป็น 1 โดยการหารแถว 3 ด้วย a_{33}

$$R_3 / -3 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 23/7 \\ 0 & 0 & -3 & 5/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 6 & -41/7 & 41/7 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 23/7 \\ 0 & 0 & 1 & -5/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 6 & -41/7 & 41/7 \end{array} \right]$$

4.6 ทำให้ a_{43} เป็น 0 โดยการ

$$R_4 - 6R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 23/7 \\ 0 & 0 & 1 & -5/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 6 & -41/7 & 41/7 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5/7 & 23/7 \\ 0 & 0 & 1 & -5/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 0 & -31/7 & 31/7 \end{array} \right]$$

70

5. คำนวณคำตอบจาก Matrix ที่ได้โดยวิธีแทนค่ากลับ (Back substitution)

5.1 จากสมการที่ 4 เราจะได้ $w = -1$

5.2 จากสมการที่ 3 เราจะได้

$$z - \frac{5}{21}w = \frac{5}{21} \rightarrow z = 0$$

5.3 จากสมการที่ 2 เราจะได้

$$y + \frac{5}{7}w = \frac{23}{7} \rightarrow y = 4$$

5.4 จากสมการที่ 1 เราจะได้

$$x + 2y - 2z + 3w = 8 \rightarrow x = 3$$

ดังนั้นเราได้คำตอบเป็น $x = 3, y = 4, z = 0, w = -1$

71