

บทที่ 3 Analytic Geometry

เส้นตรง

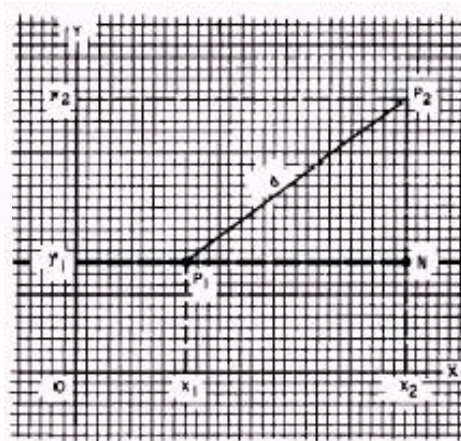
- หาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด หาจุดแบ่งเส้นตรง
- หาความชัน เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น
- หาสมการเส้นตรงแบบต่างๆ

ระยะห่างระหว่างจุด

ระยะห่างระหว่างจุด P_1 และ P_2 หาได้จาก

$$d = \sqrt{(P_1N)^2 + (P_2N)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



ตัวอย่าง 1

Find the distance between $P_1 (4,6)$ and $P_2 (10,4)$.

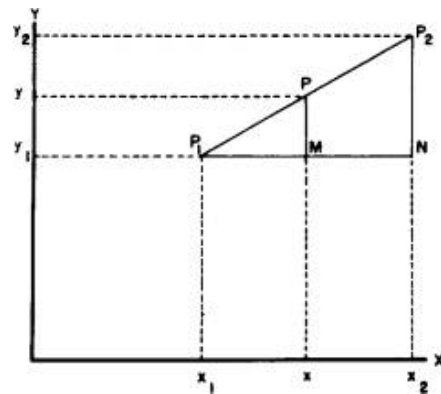
Solution:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(10 - 4)^2 + (4 - 6)^2} && \text{Step (1)} \\ &= \sqrt{36 + 4} && (2) \\ &= \sqrt{40} && (3) \\ &= \sqrt{(4)(10)} && (4) \\ &= 2\sqrt{10} && (5) \end{aligned}$$

จุดระหว่างเส้นตรง (จุดแบ่งเส้นตรง)

$$\frac{P_1P}{P_1P_2} = k$$

$$\frac{P_1M}{P_1N} = \frac{P_1P}{P_1P_2}$$



ตัวอย่าง 2

Find the coordinates of a point $\frac{1}{4}$ of the way from $P_1(2,3)$ to $P_2(4,1)$.

Solution:

$$k = \frac{1}{4}, x_2 - x_1 = 2, y_2 - y_1 = -2 \quad \text{Step (1)}$$

$$x = 2 + \frac{1}{4}(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$y = 3 + \frac{1}{4}(-2) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (3)$$

Therefore, point P is $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

ตัวอย่าง 3

Find the midpoint of the line between $P_1(2,4)$ and $P_2(4,6)$.

Solution:

$$k = \frac{1}{2} \quad \text{Step (1)}$$

$$x = \frac{1}{2}(2 + 4) \quad (2)$$

$$= 3 \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2}(4 + 6) \quad (4)$$

$$= 5 \quad (5)$$

Therefore, the midpoint is $(3,5)$.

ความลาดเอียง ความชัน

$$m = \tan \alpha = \frac{P_2M}{P_1M}$$

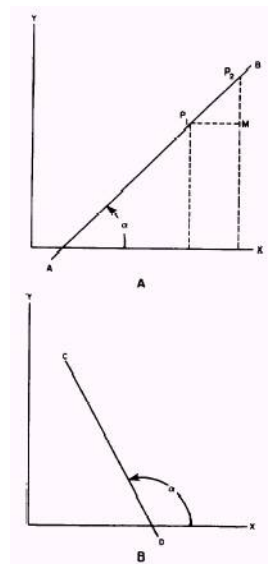
$$P_2M = y_2 - y_1$$

$$P_1M = x_2 - x_1$$

so that

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



ตัวอย่าง 4

Find the slope of the line connecting P2(7,6) and P1(-1,-4).

Solution:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{Step (1)}$$

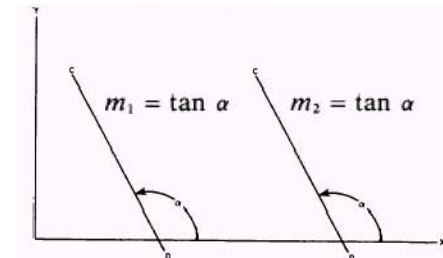
$$\Delta y = y_2 - y_1 = 6 - (-4) = 10 \quad (2)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 7 - (-1) = 8 \quad (3)$$

$$m = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \quad (4)$$

เส้นขนาน

ทำมุมกับแกน x เท่ากัน



then

$$m_1 = m_2$$

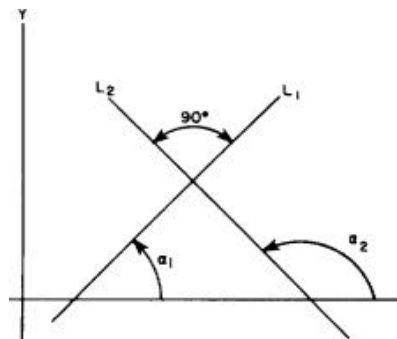
เส้นตั้งฉาก

$$\tan \alpha_2 = \tan (\alpha_1 + 90^\circ)$$

$$= -\cot \alpha_1$$

$$= -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



ตัวอย่าง 6

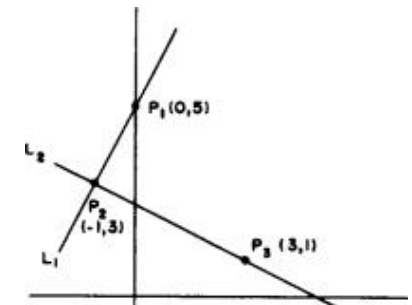
show that line L1 is perpendicular to line L2. Line L1 passes through points P1(0,5) and P2 (-1,3). Line L2 passes through points P2(-1,3) and P3(3,1).

SOLUTION: Let m_1 and m_2 represent the slope of lines L1 and L2, respectively.

Then we have

$$m_1 = \frac{3 - 5}{-1 - 0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$m_2 = \frac{1 - 3}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$



แบบฝึกหัด

1. Find the distance between P1 (5,3) and P2 (6,7).
2. Find the distance between P1 (1/2,1) and P2 (3/2,5/3).
3. Find the midpoint of the line connecting P1 (5,2) and P2 (-1, -3).
4. Find the slope of the line joining P1 (-2,- 5) and P2 (2,5).
5. Find the slope of the line perpendicular to the line joining P1(-3,6) and P2(-5,-2).

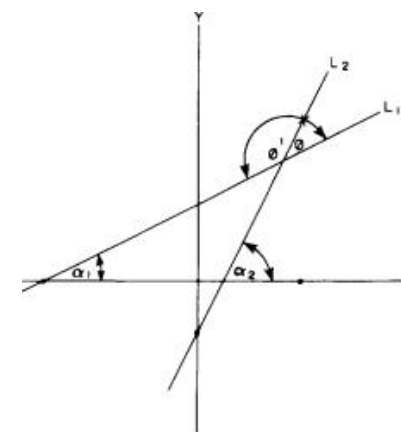
มุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \phi$$

$$\therefore \phi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \tan (\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \end{aligned}$$

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



ตัวอย่าง 7

Find the acute angle between the two lines that have $m_1 = 1/2$ and $m_2 = 2$ for their slopes.

Solution:

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)(2)} \\ &= \frac{3}{4} \\ &= .75 \end{aligned}$$

such that $\phi = \arctan (.75)$

สมการเส้นตรง

Linear Equation: $ax+by=c \rightarrow$ สมการเส้นตรงรูปแบบหนึ่ง

1. POINT-SLOPE FORM

กำหนดความชัน m และจุด (x_1, y_1)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y - y_1}{x - x_1} \\ \therefore y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8

Find the equation of a line passing through the point (2,3) and having a slope of 3.

SOLUTION:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \text{ and } y_1 = 3 && \text{Step (1)} \\ y - y_1 &= m(x - x_1) && (2) \\ \therefore y - 3 &= 3(x - 2) && (3) \\ y - 3 &= 3x - 6 && (4) \\ \text{or } y - 3x &= -3 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 9

(หาความชันก่อนเมื่อกำหนดจุดสองจุดมาให้)

Find the equation of the line through the points (-3,4) and (4, -2).

$$\begin{aligned} \text{SOLUTION: } m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{Step (1)} \\ &= \frac{-2 - 4}{4 - (-3)} = \frac{-6}{7} && (2) \end{aligned}$$

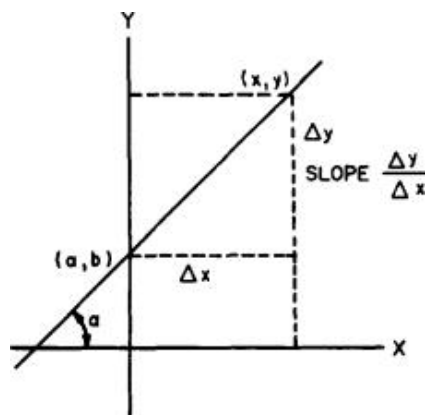
Letting (x,y) represent any point on the line and using (-3,4) as

$$\begin{aligned} y - 4 &= \frac{-6}{7}[x - (-3)] && (3) \\ 7(y - 4) &= -6(x + 3) && (4) \\ 7y - 28 &= -6x - 18 && (5) \\ 7y + 6x &= 10 && (6) \end{aligned}$$

สมการเส้นตรง (ต่อ)

2. SLOPE-INTERCEPT FORM (กำหนดความชัน และจุดตัดแกน y)

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - b}{x} \\ mx &= y - b \\ y &= mx + b \end{aligned}$$



ตัวอย่าง 10

Find the equation of a line that intersects the Y axis at the point (0,3) and has a slope of 5/3.

SOLUTION:

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{Step (1)} \\ y &= \frac{5}{3}x + 3 && (2) \\ 3y &= 5x + 9 && (3) \\ \text{or } 3y - 5x &= 9 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 11

What is the equation of the curve that is the locus of all points equidistant from the two points (5,3) and (2,1)?

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2$$

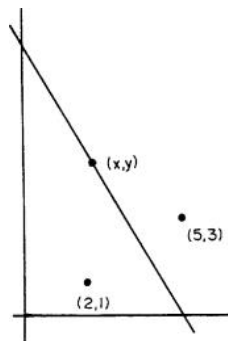
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9$$

$$4y + 5 = -6x + 34$$

$$4y = -6x + 29$$

$$y = -1.5x + 7.25$$



แบบฝึกหัด

Write equations for lines having points and slopes as follows:

1. $P(3,5)$, $m = -2$

ANSWERS:

1. $y = -2x + 11$ or $y + 2x = 11$

2. $P(-2, -1)$, $m = \frac{1}{3}$

2. $3y = x - 1$ or $3y - x = -1$

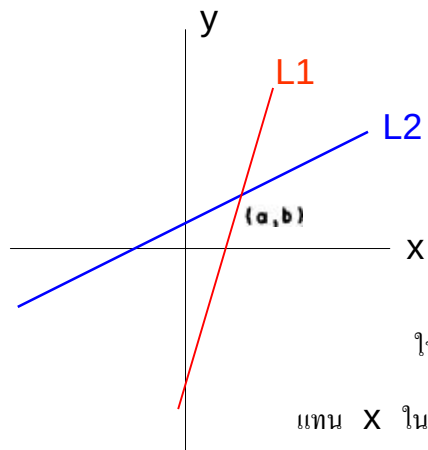
3. $P_1(2,2)$ and $P_2(-4, -1)$

3. $2y = x + 2$ or $2y - x = 2$

4. y intercept = 2, $m = 3$

4. $y = 3x + 2$ or $y - 3x = 2$

เส้น 2 เส้นตัดกัน หาจุดตัด



จัดรูปสมการ L1 และ L2 อยู่ในรูป

$$y = mx + b$$

ให้สมการ $L1=L2 \rightarrow$ ได้ $x=a$

แทน x ในสมการ $y1$ หรือ $y2 \rightarrow$ ได้ $y=b$

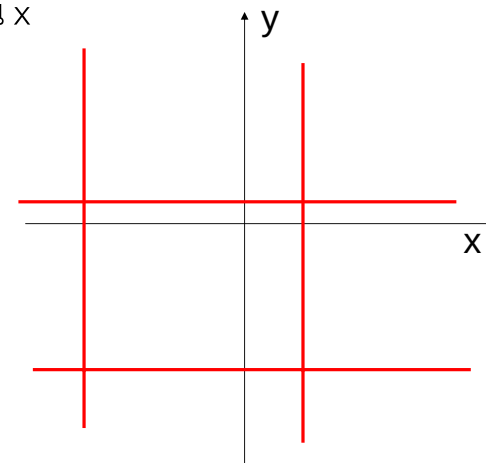
สมการเส้นตรง (ต่อ)

- เส้นตรงขนานกับแกน x

$$y = b$$

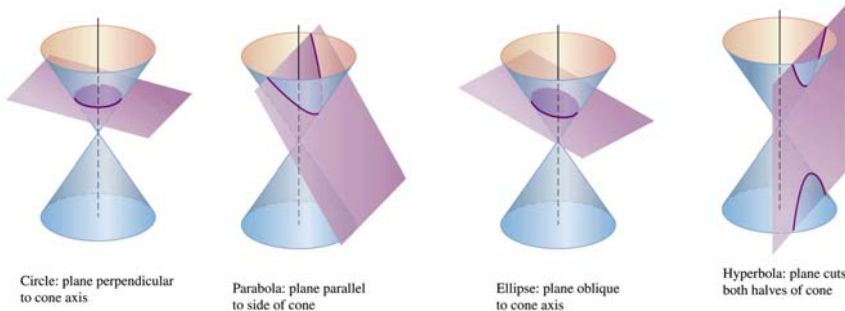
- เส้นตรงขนานแกน y

$$x = a$$



ภาคตัดกรวย (Conic Section)

- Equation and properties of a circle, a parabola, an ellipse, and a hyperbola.
- Polar coordinates and Cartesian coordinates

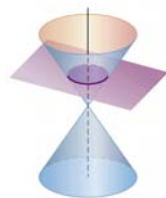
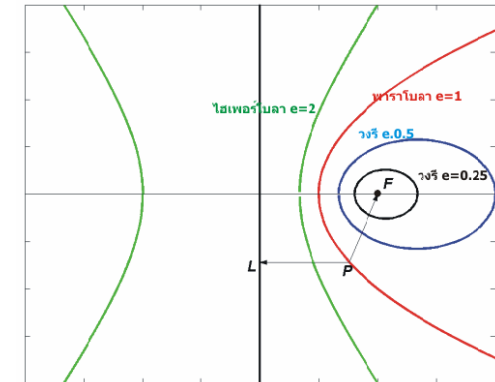


The locus

A conic section is the locus of all points in a plane whose distance from a fixed point is a constant ratio to its distance from a fixed line. The fixed point is the focus, and the fixed line is the directrix

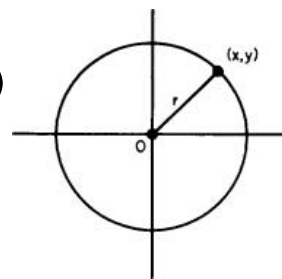
The ratio referred to in the definition is called the eccentricity (e).

ค่าความเอียง หรือ ค่าความเบี่ยงเบน จากศูนย์กลาง (eccentricity) ของภาคตัดกรวย เป็นค่าบ่งชี้ถึงความเบี้ยว หรือ เบี่ยงเบนไปจากวงกลม โดยเมื่อความเอียงมีค่าลดลง รูปร่างของภาคตัดกรวยที่ได้จะมีรูปร่างเข้าใกล้ทรงกลมมากขึ้น



Circle: plane perpendicular to cone axis

ทรงกลม (Circle)



“A circle is a plane curve all points of which are at a fixed distance (the **r** radius (**r**)) from a fixed point (the **center**).

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะทางเท่ากัน
จุดคงที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลาง ของวงกลม (จุด O) ระยะทางที่เท่ากันเรียกว่า ความยาวรัศมี ของวงกลม

วงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k)

เมื่อเปลี่ยนจุดศูนย์กลางเป็น (h,k)

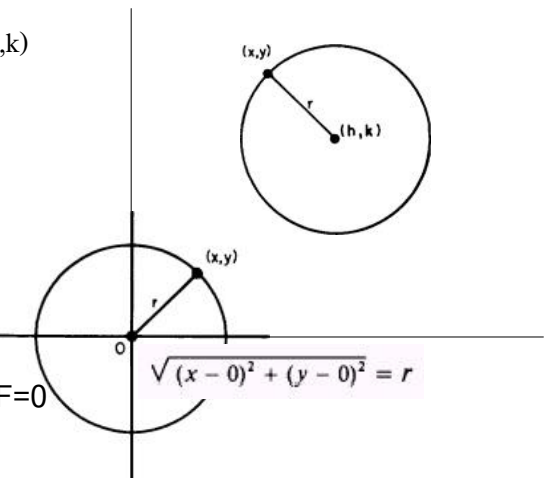
$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

หรืออาจเขียนสมการได้ในรูป

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

หรือ $x^2 + y^2 + Bx + Cy + D$



ตัวอย่าง 14

Find the coordinates of the center and the radius of the circle described by the following equation: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

Solution: จัดรูปสมการ

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 &= 0 \\
 x^2 - 4x + (2)^2 + y^2 - 6y - 3 &= 0 + (2)^2 \\
 (x^2 - 4x + 4) + y^2 - 6y - 3 &= 4 \\
 (x - 2)^2 + y^2 - 6y - 3 &= 4 \\
 (x - 2)^2 + y^2 - 6y + (3)^2 - 3 &= 4 + (3)^2 \\
 (x - 2)^2 + (y^2 - 6y + 9) - 3 &= 4 + 9 \\
 (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 3 &= 4 + 9 \\
 (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 4 + 9 + 3 \\
 (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 16
 \end{aligned}$$

Center (2,3)
r = $\sqrt{16}$

ตัวอย่าง 15

Find the coordinates of the center and the radius of the circle given by the equation $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - 3y - \frac{27}{16} = 0$

SOLUTION: Rearrange and complete the square in both x and y:

$$\begin{aligned}
 x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - 3y - \frac{27}{16} &= 0 \\
 \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) - \frac{27}{16} &= \frac{1}{16} + \frac{9}{4} \\
 \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) &= 4 \\
 \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= (2)^2
 \end{aligned}$$

center at (-1/4, 3/2) and a radius equal to 2.

ตัวอย่างพิเศษ

ในบางกรณีเราอาจจะต้องพิจารณาสมการวงกลม ในรูปแบบ

$$x^2 + y^2 + Bx + Cy + D = 0$$

EXAMPLE: Write the equation of the circle that passes through the points (2,8), (5,7), and (6,6).

Solution: สร้างสมการ 3 สมการ โดยแทนค่า X, y ที่จุดต่างๆ ในสมการข้างบน แล้วแก้ระบบสมการเพื่อหาค่า B, C และ D

For (2,8)	$4 + 64 + 2B + 8C + D = 0$	$2B + 8C + D = -68$	Equation (1)
	$2B + 8C + D = -68$	$5B + 7C + D = -74$	(2)
For (5,7)	$25 + 49 + 5B + 7C + D = 0$	$6B + 6C + D = -72$	(3)
	$5B + 7C + D = -74$		
For (6,6)	$36 + 36 + 6B + 6C + D = 0$		
	$6B + 6C + D = -72$		

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 &= 0 \\
 (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 12 &= 4 + 9 \\
 (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 25
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดวงกลม

Find the coordinates of the center and the radius for the circles described by the following equations:

Answer:

- $x^2 - \frac{4}{5}x + y^2 - 4y + \frac{29}{25} = 0$
- $x^2 + 6x + y^2 - 14y = 23$
- $x^2 - 14x + y^2 + 22y = -26$
- $x^2 + y^2 + \frac{2}{5}x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{25}$
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$

- Center $\left(\frac{2}{5}, 2\right)$, radius $\sqrt{3}$
- Center $(-3, 7)$, radius 9
- Center $(7, -11)$, radius 12
- Center $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}\right)$, radius $\frac{2\sqrt{13}}{15}$
- Center $(0, 0)$, radius 1



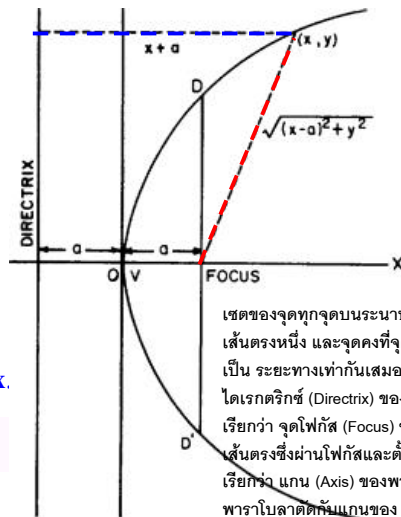
Parabola: plane parallel to side of cone

พาราโบลา (Parabola)

“Parabola is the set of the points in the plane each of which is equidistance from a fixed point, **the focus**, and a fixed line, the **directrix**.”

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$



เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงหนึ่ง และจุดคงที่จุดหนึ่ง นอกเส้นตรงนั้น เป็น ระยะทางเท่ากันเสมอเส้นตรงคงที่นี้เรียกว่า ไดเรกตริกซ์ (Directrix) ของพาราโบลาจุดคงที่นี้เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus) ของพาราโบลา (จุด F) เส้นตรงซึ่งผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์เรียกว่า แกน (Axis) ของพาราโบลา จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของ พาราโบลาเรียกว่าจุดยอด (Vertex) (จุด V)

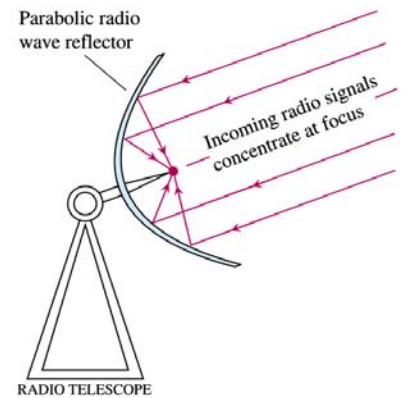
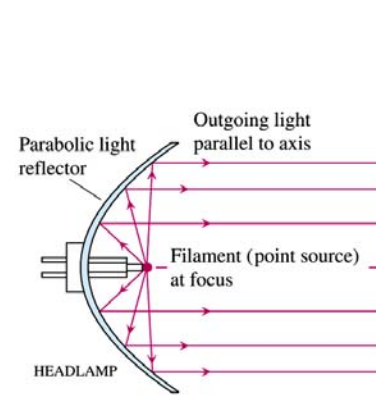


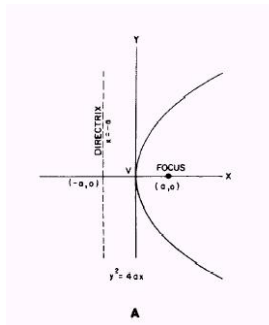
FIGURE 10.14 Parabolic reflectors can generate a beam of light parallel to the parabola's axis from a source at the focus; or they can receive rays parallel to the axis and concentrate them at the focus.

พาราโบลา (Parabola)

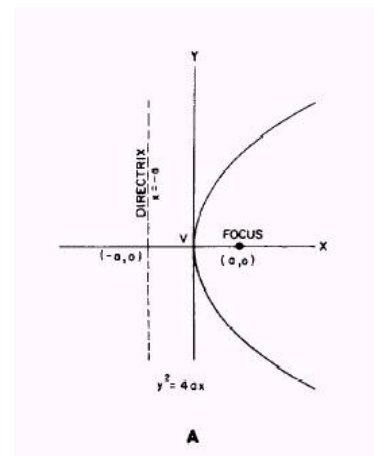
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

Expanding, $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$

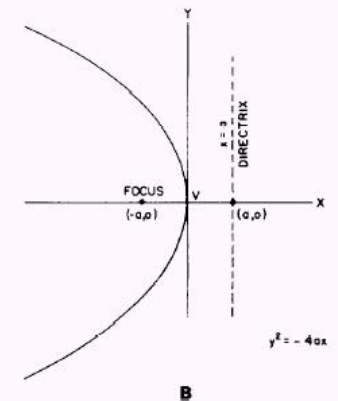
$$y^2 = 4ax$$



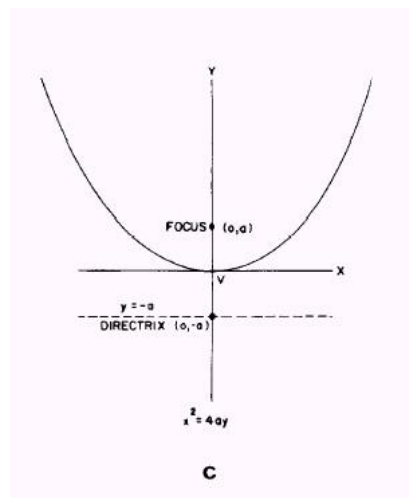
$$y^2 = 4ax$$



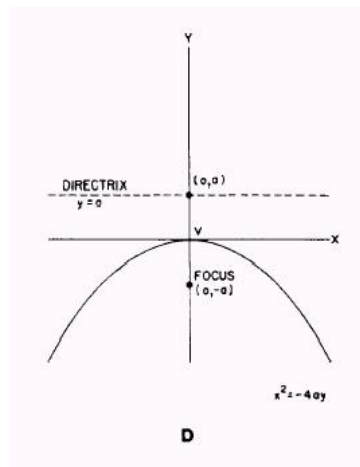
$$y^2 = -4ax$$



$$x^2 = 4ay$$



$$x^2 = -4ay$$



ตัวอย่าง 12

Find the equation of the curve that is the locus of all points equidistant from the line $x = -3$ and the point $(3,0)$.

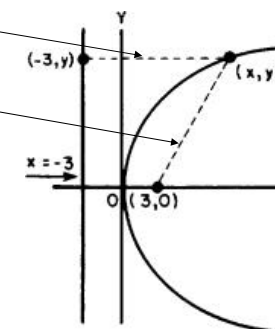
$$\sqrt{[x - (-3)]^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(x + 3)^2}$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$y^2 = 12x$$



พาราโบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k)

เมื่อเปลี่ยนจุดศูนย์กลางเป็น (h,k)

จากเดิมที่จุด $(0,0) \rightarrow y^2 = 4ax$

หรือ $(y-0)^2 = 4a(x-0)$

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

1. $(y - k)^2 = 4a(x - h)$, corresponding to $y^2 = 4ax$, parabola opens to the right
2. $(y - k)^2 = -4a(x - h)$, corresponding to $y^2 = -4ax$, parabola opens to the left
3. $(x - h)^2 = 4a(y - k)$, corresponding to $x^2 = 4ay$, parabola opens upward
4. $(x - h)^2 = -4a(y - k)$, corresponding to $x^2 = -4ay$, parabola opens downward

หรืออาจเขียนสมการได้ในรูปการกระจายของกรณีแรก

$$\text{Expanding, } Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

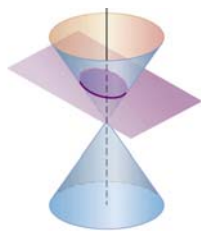
แบบฝึกหัดพาราโบลา

Give the equation; the length of a ; and the length of the focal chord for the parabola, which is the locus of all points equidistant from the point and the line, given in the following problems:

ANSWERS:

1. The point $(-2,0)$ and the line $x = 2$
2. The point $(0,4)$ and the line $y = -4$
3. The point $(0,-1)$ and the line $y = 1$
4. The point $(1,0)$ and the line $x = -1$

1. $y^2 = -8x$, $a = 2$, $f.c. = 8$
2. $x^2 = 16y$, $a = 4$, $f.c. = 16$
3. $x^2 = -4y$, $a = 1$, $f.c. = 4$
4. $y^2 = 4x$, $a = 1$, $f.c. = 4$



Ellipse: plane oblique to cone axis

วงรี (Ellipse)

An Ellipse is the set of all points in plane such that the sum of the distances from each point on the ellipse to two fixed points (called the foci F_1 and F_2), is constant.

เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่ 2 จุด มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนั้นมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง

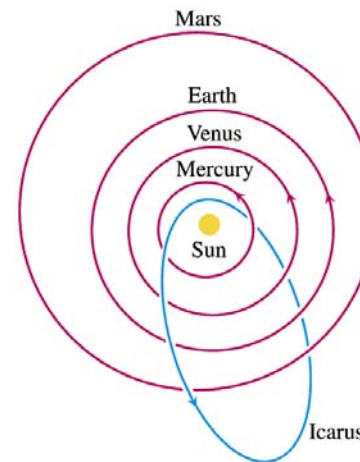
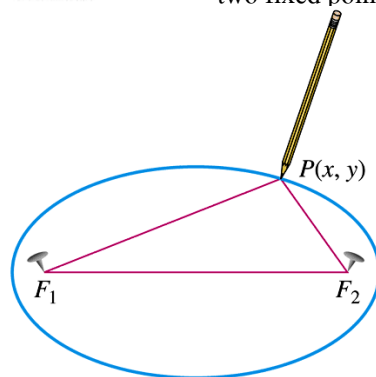
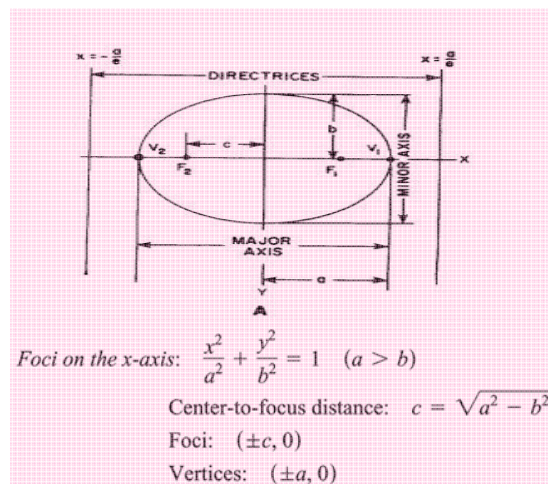


FIGURE 10.18 The orbit of the asteroid Icarus is highly eccentric. Earth's orbit is so nearly circular that its foci lie inside the sun.

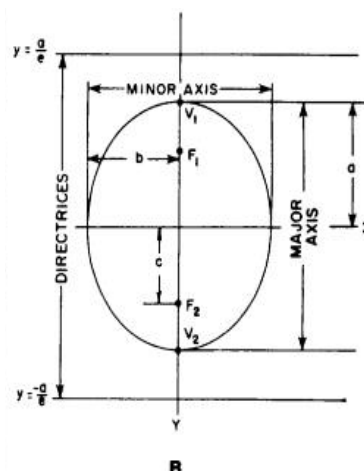


Foci on the y-axis: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$

Center-to-focus distance: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Foci: $(0, \pm c)$

Vertices: $(0, \pm a)$



วงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k)

Foci on the x-axis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$

Center-to-focus distance: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Foci: $(\pm c, 0)$

Vertices: $(\pm a, 0)$

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Foci on the y-axis: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$

Center-to-focus distance: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Foci: $(0, \pm c)$

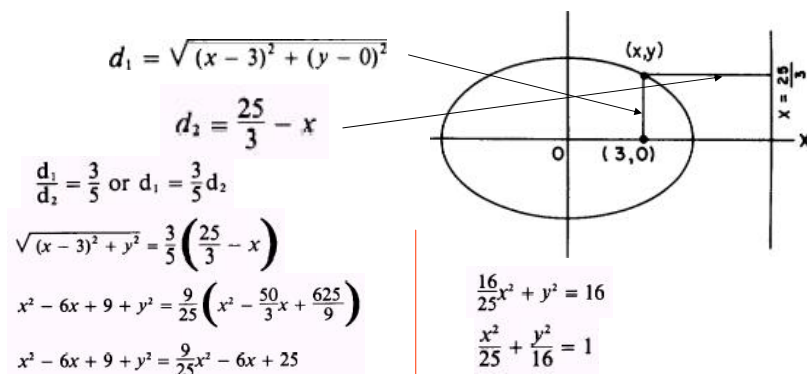
Vertices: $(0, \pm a)$

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

หรือสามารถเขียนอยู่ในรูป $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ตัวอย่าง 13

What is the equation of the curve that is the locus of all points in which the ratio of its distance from the point (3,0) to its distance from the line $x = 25/3$ is equal to $3/5$?



ตัวอย่าง 14

Reduce the equation $4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 = 0$

อยู่ในรูป $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 40x + 9y^2 - 54y + 145 &= 0 \\
 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 - 6y) + 145 &= 0 \\
 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 - 6y + 9) &= -145 + 4(25) + 9(9) \\
 &= -145 + 100 + 81 \\
 &= 36 \\
 4(x-5)^2 + 9(y-3)^2 &= 36
 \end{aligned}$$

Divide both sides by the right-hand (constant) term →

This reduces to the standard form $\frac{(x-5)^2}{(3)^2} + \frac{(y-3)^2}{(2)^2} = 1$

แบบฝึกหัดวงรี

- Find the equation of the curve that is the locus of all points equidistant from the following:

- 1. The points (0,0) and (5,4).
- 2. The points (3, -2) and (-3,2).
- 3. The line $x = -4$ and the point (3,4).
- 4. The point (4,5) and the line $y = 5x - 4$.

Answer:

- $10x + 8y - 41 = 0$ or $y = -1.25x + \frac{41}{8}$
- $2y = 3x$ or $y = \frac{3}{2}x$
- $y^2 - 8y = 14x - 9$ or $(y-4)^2 = 14x + 7$
- $x^2 + 10xy + 25y^2 - 168x - 268y + 1050 = 0$

แบบฝึกหัดวงรี

Express the following equations as an ellipse in standard form:

- $5x^2 - 110x + 4y^2 + 425 = 0$
- $x^2 - 14x + 36y^2 - 216y + 337 = 0$
- $9x^2 - 54x + 4y^2 + 16y + 61 = 0$
- $3x^2 - 14x + 4y^2 + 11 = 0$

ANSWERS:

- $\frac{(x-11)^2}{(6)^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{5})^2} = 1$
- $\frac{(x-7)^2}{(6)^2} + \frac{(y-3)^2}{(1)^2} = 1$
- $\frac{(x-3)^2}{(2)^2} + \frac{(y+2)^2}{(3)^2} = 1$
- $\frac{\left(x-\frac{7}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$



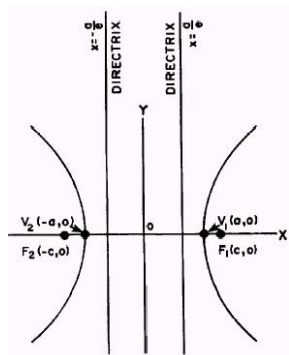
Parabola: plane parallel to side of cone

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

A hyperbola is the set of all points in the plane such that the distances from each point to two fixed points, **the foci**, have a constant different.

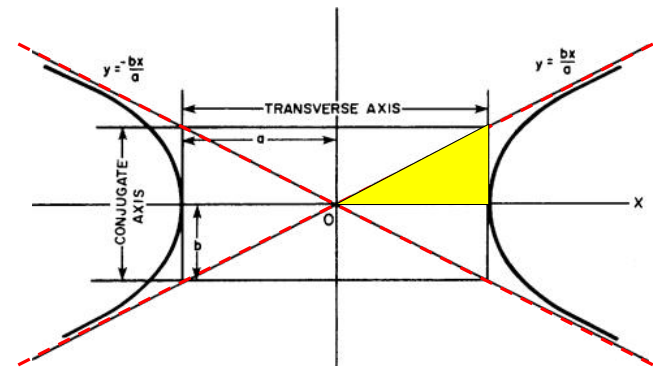
ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบจะมีค่าคงตัวเสมอ

A hyperbola is a conic section with an eccentricity greater than $1 = c = ae$



since $c > a$ for a hyperbola

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)



$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$c = ae \rightarrow b^2 = a^2 e^2 - a^2 = a^2 (e^2 - 1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$a^2(1 - e^2) = -a^2(e^2 - 1) = -b^2$$

ไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k)

ถ้าจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

general form $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$