

- นิยาม. a) ถ้า a, n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a \bmod n$ หมายถึง เศษเหลือจากการหาร a ด้วย n
 b) รหัสค่านวน x_0 หมายถึง ตัวเลขสองหลักสุดท้ายโดยไม่นับ - ตัวอย่างเช่น รหัส 513030452-4 ได้ $x_0 = 24$
 c) ให้ $x_{i+1} = ((7430x_i) \bmod 65537) + 3$ สำหรับ $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ เมื่อ $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$
 d) $a \equiv b \pmod{n}$ ถ้า n หาร $b - a$ ลงตัว
 e) $\mathcal{F}(g(t))$ หมายถึง การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $g(t)$

1. ให้ $g(t) = ((x_5 \bmod 5) + 3) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{(x_5 \bmod 5) + 3}\right)$ เมื่อ $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ หมายถึง ฟังก์ชันพัลส์สี่เหลี่ยมที่มีแอมพลิจูดเป็นหนึ่ง ความกว้างของพัลส์เป็น T และมีศูนย์กลางบนจุด origin ได้ $T=7, g(t) = 7 \text{rect}\left(\frac{t}{7}\right)$
 (a) จงพิสูจน์ว่า $g(t)$ มีผลการแปลงฟูเรียร์ (2 คะแนน) จาก Lecture*04

```
reset()
x0=24
x=[x0]
for j in range(10):
    x.append((7430*x[j])%65537+3)

T=x[5]%5+3;
print "x[5]= ",x[5],", T=",T
x[5]= 57059 , T= 7
```

```
t=SR.symbol("t",domain="real")
rect=function("rect",t)
rect=unit_step(t+T/2)-unit_step(t-T/2)
g=function("g",t)
g=T*rect(t);g(t)
integral(abs(g(t))^2,t,-oo,oo)
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |7 \text{rect}\left(\frac{t}{7}\right)|^2 dt = 343 < \infty$$

- (b) จงหา $\mathcal{F}(g(3t))$ และสเก็ตกราฟของ $\mathcal{F}(g(3t))$ (3 คะแนน)
 (ใช้ตาราง A6.2 - A6.3 ในหนังสือ)

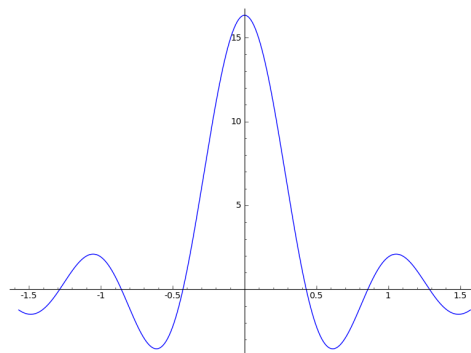
ทบทวน A6.3, A6.2: $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow T \text{sinc}(fT)$ และ $\mathcal{F}(ag_1(t)) \Rightarrow a \mathcal{F}(g_1(t))$

ดังนั้น $\mathcal{F}(g(t)) = 7 \mathcal{F}\left(\text{rect}\left(\frac{t}{7}\right)\right) = 49 \text{sinc}(7f)$

จากตาราง A6.2 ข้อ 2: $g(at) \Rightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$

ได้ $\mathcal{F}(g(3t)) = \frac{1}{3} G\left(\frac{f}{3}\right) = \frac{49}{3} \text{sinc}\left(7 \frac{f}{3}\right)$

```
f=SR.symbol("f",domain="real")
sinc=function("sinc",f)
sinc=sin(pi*f)/(pi*f)
G=function("G",f)
G=T^2*sinc(f*T)
a=3
print "G(f) ="
G(f)
print "F(3g(t)) ="
ans=(1/abs(a))*G(f/a);ans
```

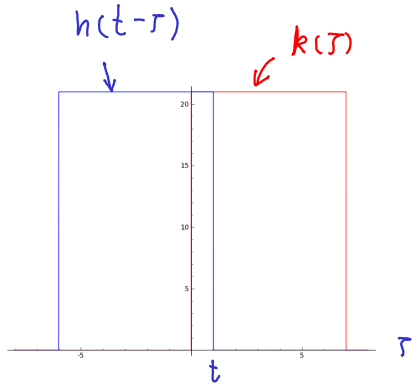


2. จากข้อ 1 กำหนด $k(t) = 3 \cdot g\left(t - \frac{t-7}{2}\right)$ และ $h(t) = k((x_5 \bmod 5) + 3 - t)$ จงหา $\underbrace{k(t) * h(t)}_{\text{convolution integral}}$ และ

พล็อตกราฟ (5 คะแนน)

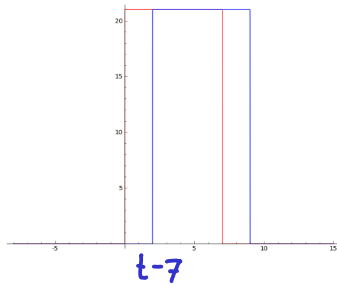
ได้ $g(t - \frac{7}{2}) = 7 \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{7}{2}}{7}\right)$, $k(t) = 21 \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{7}{2}}{7}\right)$

และ $h(t) = k(7-t) = 21 \operatorname{rect}\left(\frac{7-t - \frac{7}{2}}{7}\right) = 21 \operatorname{rect}\left(\frac{\frac{7}{2} - t}{7}\right)$



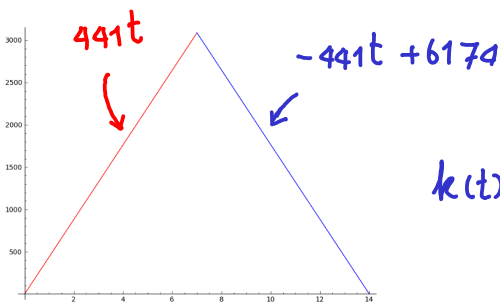
เมื่อ $0 \leq t < 7$ ได้

$$k(t) * h(t) = \int_0^t 21^2 dt = 441t$$



เมื่อ $7 \leq t < 14$ ได้

$$k(t) * h(t) = \int_{t-7}^7 21^2 dt = -441t + 6174$$



$$k(t) * h(t) = \begin{cases} 441t, & 0 \leq t < 7 \\ -441t + 6174, & 7 \leq t < 14 \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

```
t=SR.symbol("t",domain="real")
tmp1=integral(21^2,tau,0,t);tmp1
tmp2=integral(21^2,tau,t-7,7);tmp2
tmp1(7)
```

441t
-441t+6174