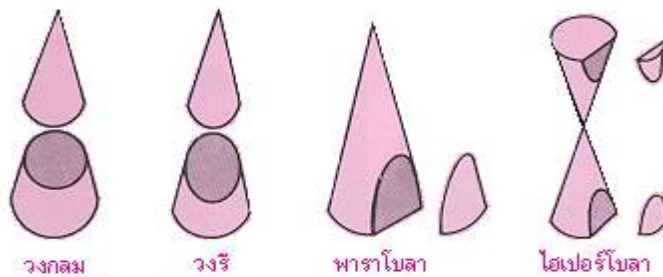


บทที่ 3

ภาคตัดกรวย

เนื้อหาในเอกสารฉบับนี้ เป็นการทบทวนและเพิ่มเติมจากที่ได้เรียนมาแล้วในระดับมัธยมและ ปวส.

ได้ทราบมาแล้วว่า ภาคตัดกรวยคือรอยตัดที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบกับกรวยกลม ในลักษณะต่างๆ ตามรูป



นิยาม ภาคตัดกรวย คือ เซตของจุดทั้งหลายที่มีอัตราส่วนระหว่าง ระยะห่างจากจุดตรึงและระยะห่างจากเส้นตรึง เป็นค่าคงตัว เรียกจุดตรึงว่าจุดโฟกัส (Focus) เรียกเส้นตรึงว่า ไดเรกตริกซ์ (Directrix) และเรียกอัตราส่วนที่คงตัวนี้ว่า ค่าเยื้องศูนย์กลาง (Eccentricity) เขียนแทนด้วย e

จะเรียกชื่อกราฟภาคตัดกรวยตามค่าของ ค่าเยื้องศูนย์กลาง ดังนี้

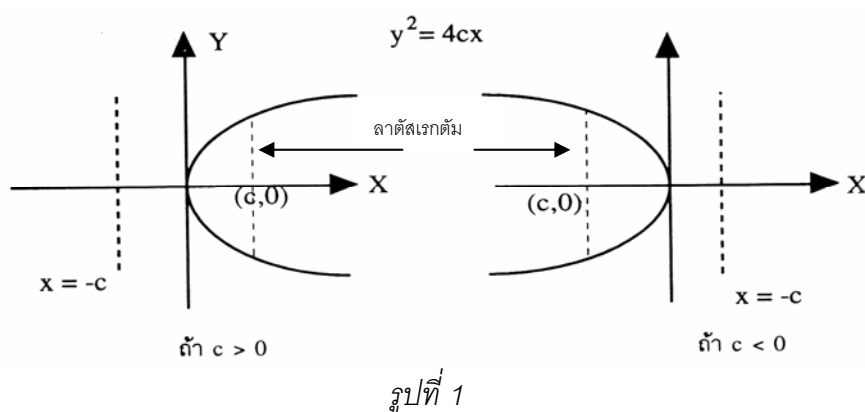
1. ถ้า $e = 1$ จะได้กราฟเป็นพาราโบลา
2. ถ้า $e < 1$ จะได้กราฟเป็นวงรี
3. ถ้า $e > 1$ จะได้กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา

ต่อไปเราจะมาดูนิยามของสมการภาคตัดกรวยแต่ละชนิด

นิยาม พาราโบลา (Parabola) คือ เซตของจุดทั้งหลายที่ระยะห่างจากจุดโฟกัสและไดเรกตริกซ์ มีระยะทางเท่ากัน ($e = 1$) จากที่เคยเรียนมาแล้วว่า ถ้าพาราโบลามีจุดโฟกัสที่ $F(c, 0)$ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -c$ สมการพาราโบลา ก็จะเป็น

$$y^2 = 4cx$$

จะได้กราฟดังรูปที่ 1



ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดสมการพาราโบลาให้และสามารถจัดให้อยู่ในรูป $y^2 = 4cx$ แล้ว พาราโบลาจะมี ส่วนประกอบที่สำคัญ ดังนี้

จุดยอด คือ $V(0,0)$

จุดโฟกัส คือ $F(c,0)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -c$

สมการแกน คือ $y = 0$ (แกน x)

ความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ $4|c|$ (ดูรูปที่ 1 ประกอบ)

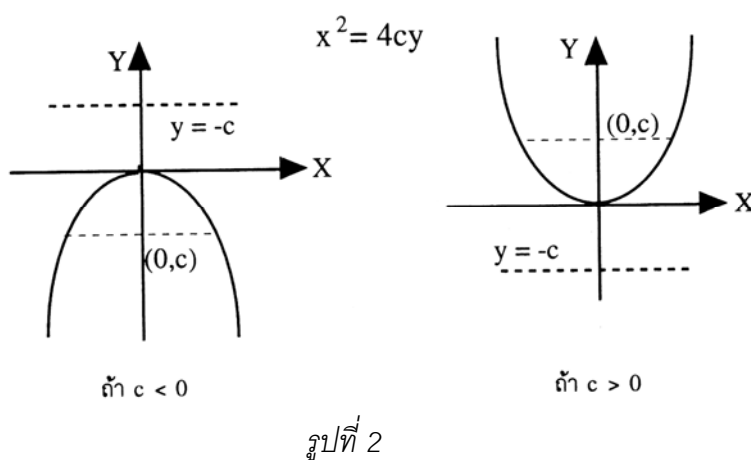
ถ้า $c > 0$ กราฟจะตะแคงขวา (เปิดไปทางขวามือ)

ถ้า $c < 0$ กราฟจะตะแคงซ้าย (เปิดไปทางซ้ายมือ)

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสที่ $F(0,c)$ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -c$ สมการพาราโบลา ก็จะเป็น

$$x^2 = 4cy$$

และจะได้กราฟ ดังรูปที่ 2



ถ้ากำหนดสมการพาราโบลามาให้ และสามารถจัดสมการให้อยู่ในรูป $x^2 = 4cy$ แล้ว พาราโบลาจะมี ส่วนประกอบที่สำคัญ ดังนี้

จุดยอด คือ $V(0,0)$

จุดโฟกัส คือ $F(0,c)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -c$

สมการแกน คือ $x = 0$ (แกน y)

ถ้า $c > 0$ กราฟจะหงาย (เปิดขึ้นข้างบน)

ถ้า $c < 0$ กราฟจะตะแคงซ้าย (เปิดลงข้างล่าง)

ข้อสังเกต ในการเขียนกราฟของพาราโบลานั้น จะต้องหา จุดยอดและจุดปลายของเส้นลาตัสเรกตัมแล้วเขียน กราฟให้ผ่านจุดทั้งสาม จะได้กราฟของพาราโบลา ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของพาราโบลาต่อไปนี้

(1) $y^2 - 6x = 0$

(2) $x^2 + 8y = 0$

วิธีทำ (1) $y^2 - 6x = 0$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $y^2 = 6x$ เมื่อเทียบกับรูปมาตรฐาน $y^2 = 4cx$ ก็จะได้ $c = \frac{3}{2}$ ดังนั้น

พาราโบลา มีส่วนประกอบดังนี้

จุดยอด คือ $(0,0)$

จุดโฟกัส คือ $(\frac{3}{2}, 0)$

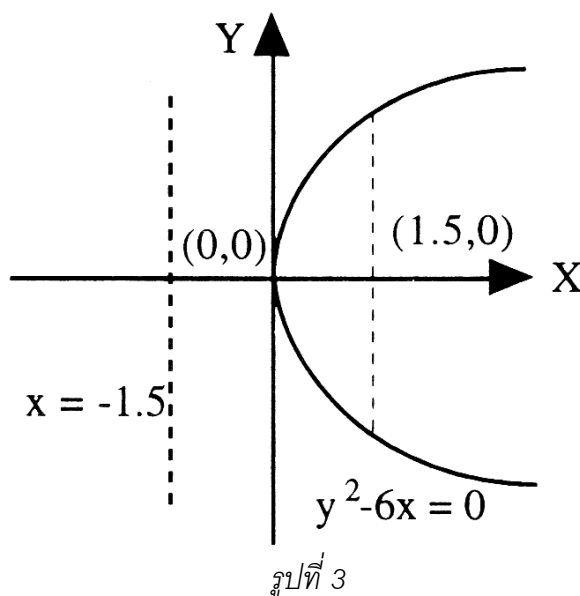
สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{3}{2}$

สมการแกน คือ $y = 0$ (แกน x)

ความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ 6 โดยมีจุดปลายของ

ลาตัสเรกตัมอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, 3)$ และ $(\frac{3}{2}, -3)$ ซึ่งเขียนกราฟ

ได้ดังรูปที่ 3



- (2) จาก $x^2 + 8y = 0$ จัดใหม่ได้ $x^2 = -8y$ นั่นคือ $c = -2$ พาราโบลาที่มีส่วนประกอบดังนี้
- (3)

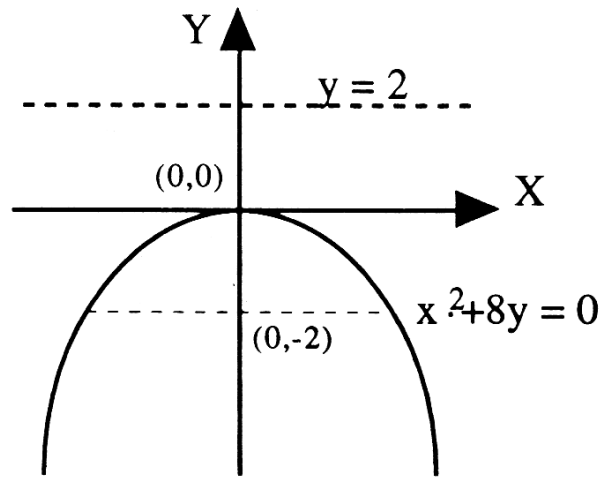
จุดยอด คือ $(0,0)$

จุดโฟกัส คือ $(0,-2)$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = 2$

สมการแกน คือ $x = 0$ (แกน y)

ความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ 8 โดยมีจุดปลายของลาตัสเรกตัมอยู่ที่ $(4,-2)$ และ $(-4,-2)$ ซึ่งเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 4

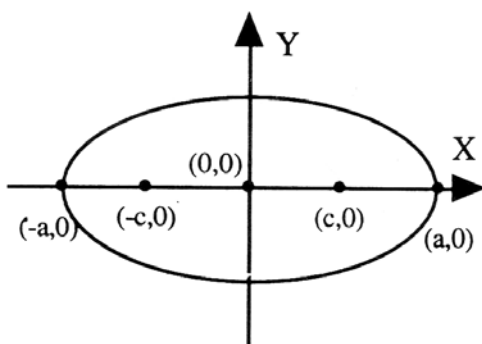


รูปที่ 4

นิยาม วงรี (Ellipse) คือ เซตของจุดทั้งหลายที่ผลบวกของระยะห่างจากจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าคงที่

วงรีจะมีจุดโฟกัสสองจุดและเส้นไดเรกตริกซ์สองเส้น ถ้ากำหนดจุดโฟกัสทั้งสองและผลบวกของระยะห่างให้จะสามารถหาสมการของวงรีได้ และได้ทราบมาแล้วว่า ถ้าวงรีมีจุดโฟกัสที่ $F(c,0)$ และ $F'(-c,0)$ และมีผลบวกของระยะห่างจากจุดโฟกัสทั้งสองเป็น $2a$ จะได้สมการ คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } a^2 > b^2 \text{ และ } b^2 = a^2 - c^2 \text{ มีกราฟดังรูปที่ 5}$$



รูปที่ 5

จะมีส่วนประกอบที่สำคัญดังนี้

จุดศูนย์กลาง คือ $C(0,0)$

จุดยอด คือ $V(a,0)$ และ $V'(-a,0)$

จุดโฟกัส คือ $F(c,0)$ และ $F'(-c,0)$

เมื่อ $c^2 = a^2 - b^2$

แกนเอก คือ $y = 0$ (แกน x)

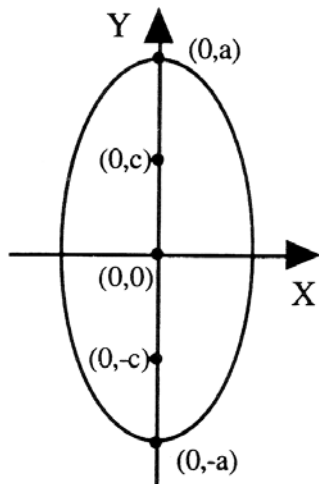
แกนโท คือ $x = 0$ (แกน y)

ความยาวแกนเอก เท่ากับ $2a$

ความยาวแกนโท เท่ากับ $2b$

ทำนองเดียวกันวงรีซึ่งมีจุดโฟกัสที่ $F(0,c)$ และ $F'(0,-c)$ และมีผลบวกของระยะห่างจากจุดโฟกัสทั้งสองเป็น $2a$ จะมีสมการ เป็น

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } a^2 > b^2 \text{ และ } b^2 = a^2 - c^2 \text{ มีกราฟดังรูปที่ 6}$$



รูปที่ 6

จะมีส่วนประกอบที่สำคัญดังนี้

จุดศูนย์กลาง คือ $C(0,0)$

จุดยอด คือ $V(0,a)$ และ $V'(0,-a)$

จุดโฟกัส คือ $F(0,c)$ และ $F'(0,-c)$

เมื่อ $c^2 = a^2 - b^2$

แกนเอก คือ $x = 0$ (แกน y)

แกนโท คือ $y = 0$ (แกน x)

ความยาวแกนเอก เท่ากับ $2a$

ความยาวแกนโท เท่ากับ $2b$

ข้อสังเกต (1) การเขียนกราฟวงรี จะทำได้โดยการเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จุดศูนย์กลางของวงรีเป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม เส้นขนานคู่หนึ่งตั้งฉากกับแกนเอก ลากผ่านจุดยอดของวงรี และมีความยาวเท่ากับความยาวของแกนโท เส้นขนานอีกคู่หนึ่ง ตั้งฉากกับแกนโท และความยาวเท่ากับความยาวแกนเอก แล้วเขียนวงรีแนบในสี่เหลี่ยมนี้ จะได้กราฟของวงรีตามต้องการ

(2) ถ้า $a = b$ แล้วสมการจะอยู่ในรูป $x^2 + y^2 = a^2$ ซึ่งจะมีกราฟเป็นรูปวงกลมที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี a

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาลักษณะของกราฟวงรีต่อไปนี้

(1) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

(2) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

วิธีทำ (1) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

เทียบกับรูปมาตรฐานจะได้ $a=3, b=2$ จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c = \sqrt{5}$ ดังนั้น วงรีนี้มีส่วนประกอบที่สำคัญดังนี้

จุดศูนย์กลาง คือ $(0,0)$

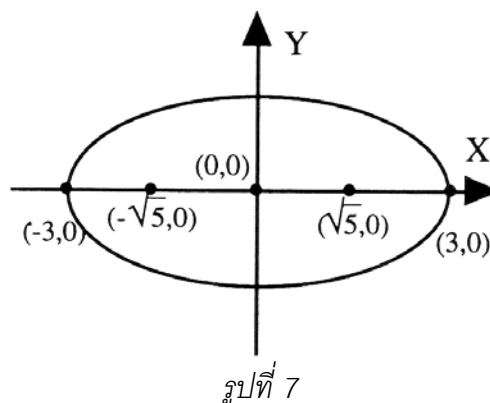
จุดยอด คือ $(\pm 3, 0)$

จุดโฟกัส คือ $(\pm\sqrt{5}, 0)$

ความยาวแกนเอก เท่ากับ 6

ความยาวแกนโท เท่ากับ 4

ดังรูปที่ 7



$$(2) \quad 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$$

$$25x^2 + 9y^2 = 225$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

เทียบกับรูปมาตรฐานได้ $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ ดังนั้น วงรีมีส่วนประกอบที่สำคัญ ดังนี้

จุดศูนย์กลาง คือ $C(0,0)$

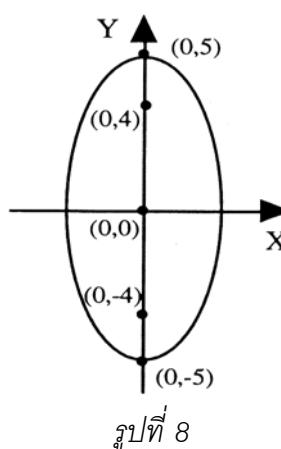
จุดยอด คือ $(0, \pm 5)$

จุดโฟกัส คือ $(0, \pm 4)$

ความยาวแกนเอก เท่ากับ 10

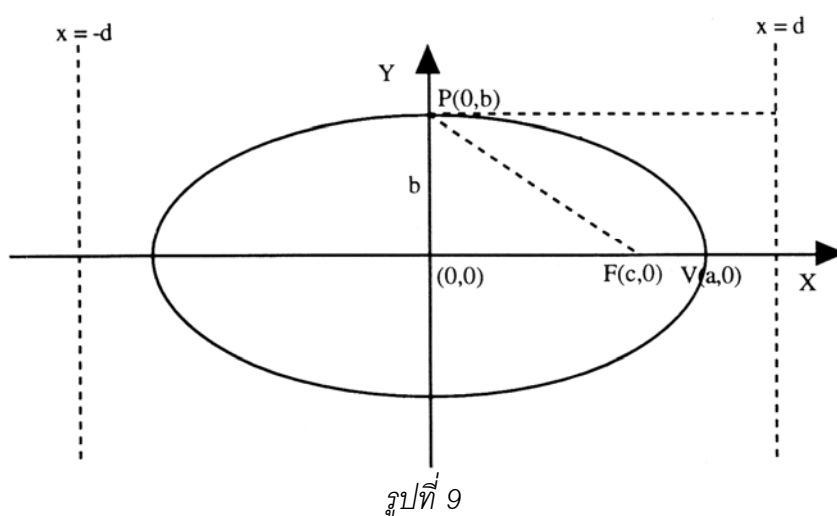
ความยาวแกนโท เท่ากับ 6

และ มีกราฟตามรูปที่ 8



จากการหาสมการวงรีที่กล่าวมาแล้ว เป็นการหาโดยอาศัยนิยามที่ไม่เกี่ยวกับไดเรกตริกซ์และค่าเยื้องศูนย์กลาง ซึ่งจะเห็นว่าสิ่งสำคัญในการหาสมการและการเขียนกราฟ คือ จุดยอดและจุดโฟกัส หรือ ค่า a , b และ c แต่อย่างไรก็ตามถ้าทราบค่าไดเรกตริกซ์และค่าเยื้องศูนย์กลาง (e) ก็จะสามารถหาสมการและเขียนกราฟได้เช่นเดียวกัน โดยนำค่าเยื้องศูนย์กลางไปช่วยหาค่า a , b และ c ได้ดังนี้

ให้วงรีมีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ จุดโฟกัสที่ $F(c,0)$ และ $F'(-c,0)$ จุดยอดที่ $V(0,a)$ และ $V'(0,-a)$ และมีสมการไดเรกตริกซ์ เป็น $x = \pm d$ (ดังรูปที่ 9)



จะได้ว่า

$$e = \frac{a-c}{d-a} \quad (1)$$

และเนื่องจาก $a^2 - c^2 = b^2$ จะได้ว่า $|PF| = a$ ดังนั้น

$$e = \frac{a}{d} \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{a}{d} &= \frac{a-c}{d-a} \\ d &= \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

แทนค่าลงไปใน (2) จะได้

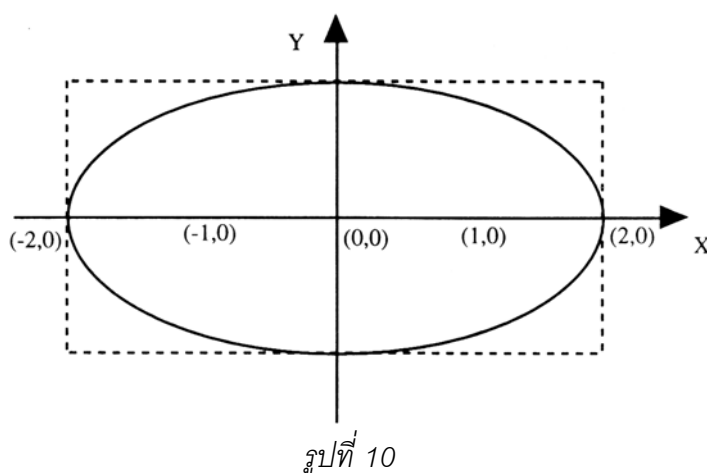
$$e = \frac{c}{a}$$

จากความสัมพันธ์นี้ ทำให้ได้ว่า ถ้าทราบค่า e แล้ว จะสามารถหาสมการของวงรีได้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการของวงรีพร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรีที่มีค่า $e = 1/2$ และมีจุดโฟกัสที่ $(\pm 1, 0)$

วิธีทำ เนื่องจากวงรีมีจุดโฟกัสที่ $(\pm 1, 0)$ จุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ จะได้ว่าแกนเอกของวงรีขนานกับแกน x และมีค่า $c = 1$ ดังนั้นสมการจะอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ จาก $e = 1/2$ จะได้ $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $a = 2c$ นั่นคือ $a = 2$ และได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$ ดังนั้นสมการของวงรีนี้ คือ (ดูรูปที่ 10)

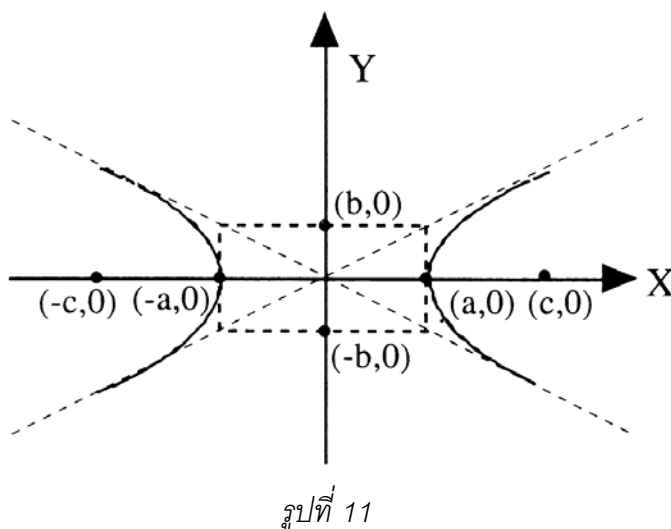
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$



นิยาม **ไฮเพอร์โบลา** (Hyperbola) คือ เซตของจุดทั้งหลายที่ผลต่างของระยะห่างจากจุดโฟกัสทั้งสองเป็นค่าคงตัว

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $F(c, 0)$ และ $F(-c, 0)$ และมีค่าผลต่างของระยะห่างจากจุดโฟกัสทั้งสองเป็น $2a$ จะมีสมการอยู่ในรูป

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{และมีกราฟดังรูปที่ 11}$$



และไฮเพอร์โบลาที่มีสมการจัดให้อยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a^2 > b^2$ จะมีส่วนประกอบสำคัญ ดังนี้

จุดศูนย์กลางคือ $(0, 0)$

จุดยอดคือ $(a, 0)$ และ $(-a, 0)$

จุดโฟกัสคือ $(c, 0)$ และ $(-c, 0)$

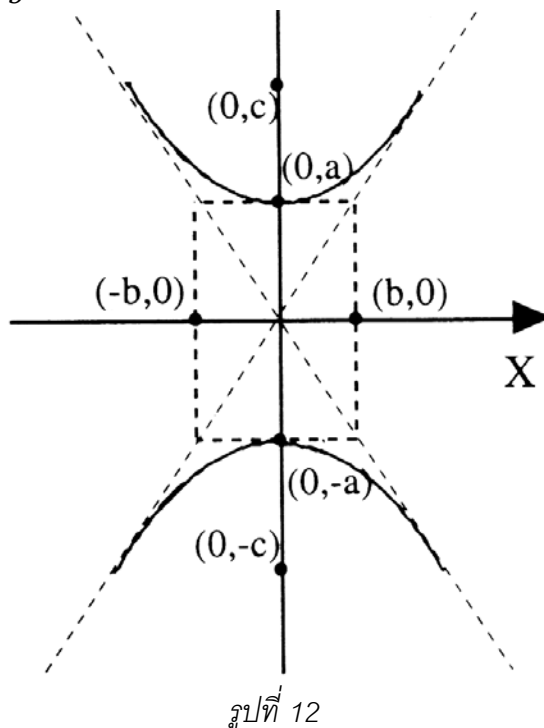
แกนตามขวาง คือ $y = 0$ (แกน x) แกนสังยุค คือ $x = 0$ (แกน y)

ความยาวแกนตามขวาง เท่ากับ $2a$

ความยาวแกนสังยุค เท่ากับ $2b$

ในทำนองเดียวกัน ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, c)$ และ $(0, -c)$ และมีผลต่างของระยะห่างจากจุดโฟกัส ทั้งสองเป็น $2a$ จะมีสมการอยู่ในรูป

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{และมีกราฟดังรูปที่ 12}$$



และไฮเพอร์โบลาที่สมการจัดให้อยู่ในรูปนี้ มีส่วนประกอบที่สำคัญ คือ

จุดศูนย์กลางคือ $(0, 0)$

จุดยอดคือ $(0, a)$ และ $(0, -a)$

จุดโฟกัสคือ $(0, c)$ และ $(0, -c)$

แกนตามขวาง คือ $x = 0$ (แกน y) แกนสังยุค คือ $y = 0$ (แกน x)

ความยาวแกนตามขวาง เท่ากับ $2a$

ความยาวแกนสังยุค เท่ากับ $2b$

ข้อสังเกต การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา ทำได้โดยการเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาเป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุมด้านคู่ขนานคู่หนึ่งตั้งฉากกับแกนตามขวาง ลากผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา และมีความยาวเท่ากับความยาวของแกนสังยุค ด้านคู่ขนานอีกคู่หนึ่งตั้งฉากกับแกนสังยุคยาวเท่ากับความยาวของแกนตามขวาง สี่เหลี่ยมนี้เรียกว่า สี่เหลี่ยมศูนย์กลาง (Central rectangle) เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมศูนย์กลางเรียกว่า เส้นกำกับกราฟ (Asymptotes) (สมการคือ $y = \pm \frac{b}{a}x$ เมื่อแกนตามขวาง คือ แกน x และ คือ $y = \pm \frac{a}{b}x$ เมื่อแกนตามขวาง คือ แกน y) เขียนกราฟไฮเพอร์โบลาสัมผัสสี่เหลี่ยมศูนย์กลางที่จุดยอดและปลายเปิดของโค้ง สัมผัสกับเส้นกำกับกราฟที่จุดอนันต์

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาลักษณะกราฟของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

$$(1) \quad 4x^2 - 3y^2 - 16 = 0$$

$$(2) \quad 9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$$

วิธีทำ

$$(1) \quad 4x^2 - 3y^2 - 16 = 0$$

$$4x^2 - 3y^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{(16/3)} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานได้ $a = 2$, $b = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $c = \sqrt{\frac{28}{3}}$

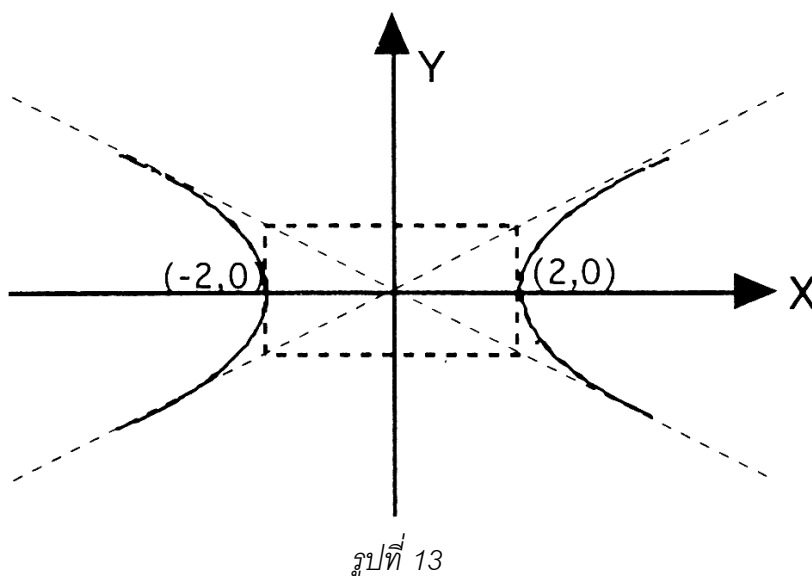
ไฮเพอร์โบลานี้มีส่วนประกอบที่สำคัญ ดังนี้

จุดศูนย์กลาง คือ $(0,0)$

จุดยอด คือ $(\pm 2, 0)$

จุดโฟกัส คือ $\left(\pm \sqrt{\frac{28}{3}}, 0\right)$

ความยาวแกนตามขวาง เท่ากับ 4 ความยาวแกนตั้งยุค เท่ากับ $8/\sqrt{3}$ มีกราฟดังรูปที่ 13



$$(2) \quad 9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$$

$$9y^2 - 16x^2 = 144$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานได้ $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$

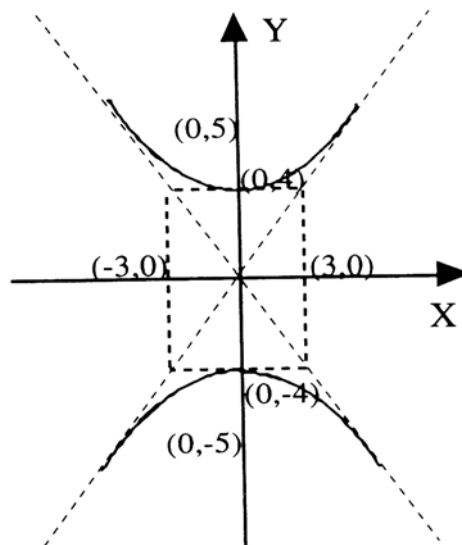
ดังนั้น ไฮเพอร์โบลานี้มีส่วนประกอบที่สำคัญ ดังนี้

จุดศูนย์กลาง คือ $(0,0)$

จุดยอด คือ $(0, \pm 4)$

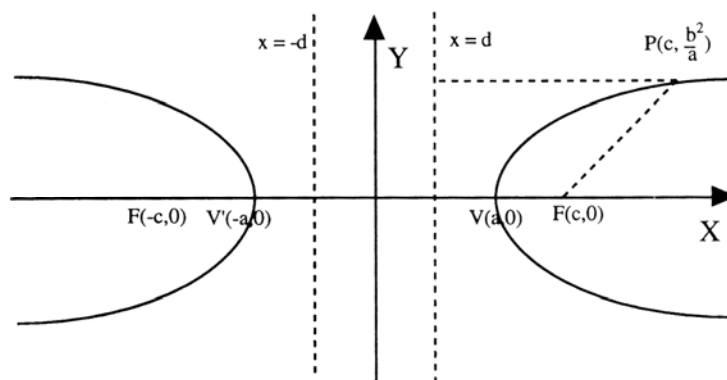
จุดโฟกัส คือ $(0, \pm 5)$

ความยาวแกนตามขวาง เท่ากับ 8 ความยาวแกนสังยุค เท่ากับ 6 มีกราฟดังรูปที่ 14



รูปที่ 14

สำหรับไฮเพอร์โบลาก็เช่นเดียวกับวงรี กล่าวคือ ถ้าทราบค่าเยื้องศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา (e) จะสามารถหาค่า e ในเทอมของ a กับ c ได้ จากนั้นก็จะสามารถหาสมการของไฮเพอร์โบลาได้เช่นเดียวกัน ความสัมพันธ์ระหว่าง e กับ a และ c หาได้ดังนี้ สมมติไฮเพอร์โบลามีกราฟดังรูปที่ 15 มีสมการไดเรกตริกซ์ เป็น $x = \pm d$ ดังนั้นสมการของไฮเพอร์โบลาจะอยู่ในรูป



รูปที่ 15

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

และได้

$$e = \frac{c-a}{a-d}$$

(3)

ลากเส้น FP ตั้งฉากกับแกนตามขวางตัดกราฟไฮเพอร์โบลาที่ P จะได้

$$|PF| = \frac{b^2}{a}$$

ดังนั้น

$$e = \frac{b^2}{a(c-d)} \quad (4)$$

จาก (3) และ (4) ได้

$$\frac{c-a}{a-d} = \frac{b^2}{a(c-d)}$$

ดังนั้น

$$d = \frac{a^2}{c}$$

แทนค่าใน (3) ได้

$$e = \frac{d}{a}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการพร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีค่า $e = 3$ และจุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 3)$

วิธีทำ จากไฮเพอร์โบลามีจุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 3)$ จะได้ว่าไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางขนานกับแกน y และ $a = 3$ ดังนั้นสมการอยู่ในรูป

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

จาก

$$e = 3 = \frac{c}{a}$$

จะได้

$$c = 3a = 9$$

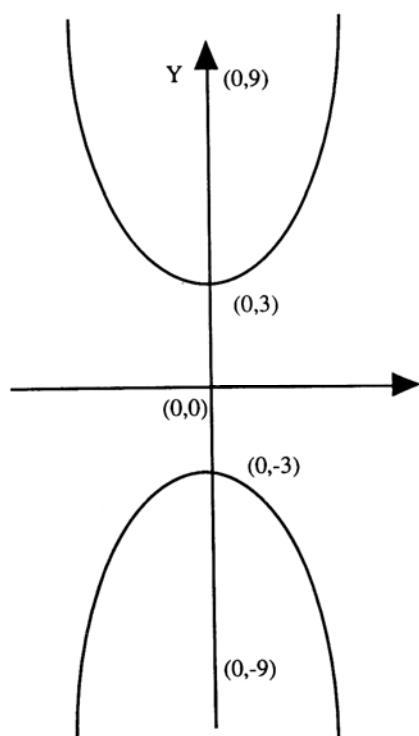
ดังนั้น

$$b^2 = c^2 - a^2 = 72$$

สมการไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{72} = 1$$

และมีกราฟดังรูปที่ 16



รูปที่ 16

จากการพิจารณาเกี่ยวกับภาคตัดกรวยที่ได้กล่าวมาแล้ว จะเห็นว่าเป็นภาคตัดกรวยที่มีจุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีแกนพิกัดเป็นเป็นแกน แต่โดยทั่วไปแล้วภาคตัดกรวยไม่จำเป็นต้องมีจุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ซึ่งจะถือว่าเป็นภาคตัดกรวยในกรณีทั่วไป กรณีที่ภาคตัดกรวยมีจุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ใดๆ และมีแกนขนานกับแกนพิกัดนั้น เราสามารถพิจารณาลักษณะของกราฟได้โดยอาศัยการเลื่อนแกนทางขนาน เพื่อจัดรูปสมการให้เข้ารูปมาตรฐาน ส่วนกรณีที่ภาคตัดกรวยมีแกนไม่ขนานกับแกนพิกัด จะพิจารณาได้โดยอาศัยการหมุนแกน หรืออาศัยทั้งการเลื่อนแกนและการหมุนแกนเพื่อจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานแล้วจะสามารถพิจารณาลักษณะกราฟได้ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป