

บทที่ 1

Limits and Continuity

1

Chapter1: Limits and Continuity

- 1.1 Rates of Change and Limits
- 1.2 Finding Limits and One-sided Limits
- 1.3 Limits Involving Infinity
- 1.4 Continuity
- 1.5 Tangent Lines
- 1.6 Polar Coordinates and Graphs (9.5)
- 1.7 Mathematical Induction

2

1.1

Rates of Change and Limits

4

ในบทนี้จะแสดงการนิยามและคำนวณค่า limit ของฟังก์ชัน ซึ่งอาจทำได้โดยวิธี substitution, graphical investigation, numerical, algebra หรือ ร่วมกันหลายวิธีก็ได้

เราใช้ limit เพื่อกำหนดเส้นสัมผัส (tangent line) ให้กราฟของฟังก์ชันอนุพันธ์ (derivative function) ทำให้เราสามารถวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันได้

3

ตัวอย่างที่ 1 ก่อนขึ้นรถจากหน้าผาจะมีความเร็วเฉลี่ยเท่าไรในช่วง 2 วินาทีที่ติด

วิธีทำ จากการทดลองพบว่าวัตถุที่ตกอย่างอิสระใกล้ผิวโลกจะมีการเคลื่อนที่ $y = 16t^2$ ดังนั้น

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32 \text{ ฟุต/วินาที}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความเร็วของก้อนหินในตัวอย่างที่ 1 ที่ $t=2$

วิธีทำ

ใบเสร็จคำนวณ

เราสามารถคำนวณหาความเร็วเฉลี่ยของก้อนหินในช่วง $t = 2$ ถึงเวลาที่เพิ่มขึ้นอีกนิดหนึ่งคือ $t = 2 + h$, $h > 0$ ได้ดังนี้

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2+h)^2 - 16(2)^2}{h} \quad (1)$$

5

เราไม่สามารถที่จะใช้สมการที่หาได้นี้ไปคำนวณหาความเร็วที่ $t=2$ ได้ แต่เราสามารถนำสมการนี้ไปประเมินค่าในกรณีที่ h เข้าใกล้ 0 โดยแทน

ความยาวของช่วงเวลา h (วินาที)	ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $\frac{\Delta y}{\Delta t}$
1	80
0.1	65.6
0.01	64.16
0.001	64.016
0.0001	64.0016
0.00001	64.00016

ค่า h ในสมการจะได้ผลลัพธ์ดังตารางจะเห็นว่าเมื่อ h เข้าใกล้ 0 ความเร็วจะเข้าใกล้ 64

6

ในเชิงพีชคณิต

ถ้าเราขยายตัวตั้งของสมการ (1) เราจะได้

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2+h)^2 - 16(2)^2}{h} = \frac{16(4+4h+h^2) - 64}{h}$$

$$= \frac{64h+16h^2}{h} = 64+16h$$

ถ้า $h = 0$ จะได้ $\frac{\Delta y}{\Delta t} = 64$

7

Average rates of change and secant lines

ให้ฟังก์ชันคือ $y = f(x)$ เราสามารถหาอัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในช่วง $[x_1, x_2]$ ได้ โดยการหารค่าการเปลี่ยนแปลงของ y , $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ ด้วยความยาว $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ ในช่วงของการเปลี่ยนแปลง

นิยาม อัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลง

อัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลงของ $y = f(x)$ เทียบกับ x ในช่วง $[x_1, x_2]$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

8

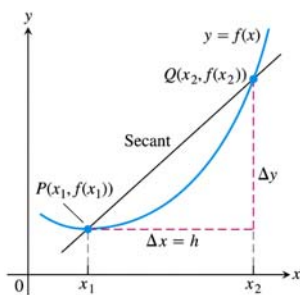
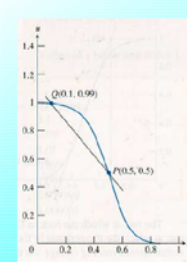


FIGURE 2.1 A secant to the graph $y = f(x)$. Its slope is $\Delta y/\Delta x$, the average rate of change of f over the interval $[x_1, x_2]$.

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ในช่วง $[x_1, x_2]$ คือความชันของเส้นตรงผ่านจุด $P(x_1, f(x_1))$ และจุด $Q(x_2, f(x_2))$

9

ตัวอย่างที่ 3 วิศวกรเครื่องกลกำลังออกแบบแผ่นกันความร้อนที่มีความหนา 1 นิ้ว สำหรับ

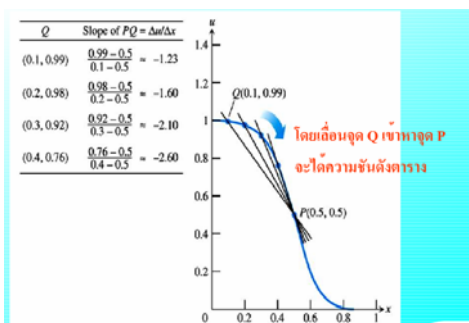


ยานอวกาศ แผ่นกันความร้อนได้ถูกตรวจสอบว่ามีอุณหภูมิ u เท่าไร ที่แต่ละระดับความลึกของแผ่นกันความร้อนดังแสดงในรูปที่ 1.2 (เมื่ออุณหภูมิได้ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานในช่วง $0 \leq u \leq 1$) และต้องการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของอุณหภูมิต่อหนึ่งหน่วยความลึกหรือความหนาที่จะทำให้แผ่นกันความร้อนนี้สามารถทนต่อความร้อนได้

วิธีทำ จากกราฟ จุดที่ชันที่สุดคือ P ที่ความลึก 0.5 นิ้ว อัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจากความลึก 0.1 นิ้วที่จุด Q ถึงจุด P คือ

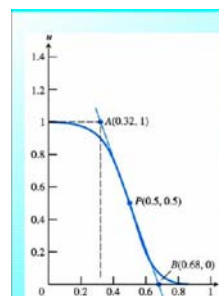
$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{0.99 - 0.5}{0.1 - 0.5} \approx -1.23 \text{ deg/in.}$$

ค่าเฉลี่ยนี้คือความชันของเส้นตัด (secant) ผ่านจุด P และ Q แต่มันไม่ได้บอกอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเร็วขนาดไหนที่จุด P ดังนั้นเราจึงต้องหาโดยการหาความชันของเส้นตัดในช่วง P ถึง Q (รูปที่ 1.3)



โดยเลื่อนจุด Q เข้าหาจุด P จะได้ความชันดังตาราง

11



เส้น secant จะหมุนความชันมาหาคาบรอบจุด P และที่จุด P จะมีความชันมากที่สุด เส้นตรงนี้จะเส้นสัมผัส (tangent) ของจุด P ดังรูปที่ 1.4

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิสูงสุดคือความชันของเส้นตัดที่ผ่านจุด P นั่นคือ

$$\frac{1 - 0}{0.32 - 0.68} \approx -2.78 \text{ deg/in.}$$

จุดนี้เราจะเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง (instantaneous rates of change) จากตัวอย่างเราจะพบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่งเป็นค่าลิมิตของอัตราเฉลี่ย

12

Limits of functions

Limit คือค่าของจำนวนคงที่จำนวนหนึ่งซึ่งค่าของฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้เมื่อตัวแปรของฟังก์ชันนั้นมีค่าเข้าใกล้ตัวเลขตัวใดตัวหนึ่งแน่นอน
Limit ของฟังก์ชัน คือการหาค่าฟังก์ชันที่มีค่าเข้าใกล้จำนวนอะไรเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้หรือเกือบเท่าจำนวนเลขใดเลขหนึ่งที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่ามีลักษณะเช่นไรเมื่อ $x = 1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

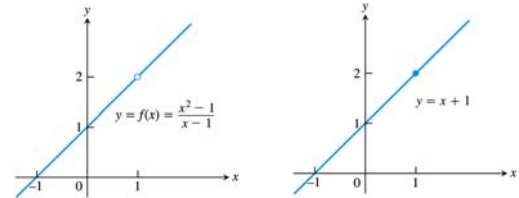
วิธีทำ ฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้จะเป็นจริงสำหรับเลขจำนวนจริง x ใดๆ ยกเว้นที่ $x = 1$

สำหรับที่ $x \neq 1$ จะได้

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

13

เมื่อนำ 2 ฟังก์ชันนี้ไปเขียนกราฟจะได้ดังรูป โดยฟังก์ชันเริ่มแรกจะหาค่าไม่ได้ที่ $x = 1$ (removed) ส่วนฟังก์ชันใหม่จะหาค่าได้ โดยที่รูปกราฟยังคงมีลักษณะเหมือนกัน



14

เมื่อเรานำค่า x ที่มีค่าเข้าใกล้ 1 จากทางด้านล่างและทางด้านบนของ 1 ไปใส่ในฟังก์ชันจะได้ค่าของฟังก์ชันดังแสดงในตาราง โดยจะเห็นว่าถึง x มีค่าเข้าใกล้ 1 มากเพียงใด ค่าของฟังก์ชันก็จะยิ่งเข้าใกล้ 2 มากเพียงนั้น

ค่าของ x เข้าใกล้ 1 จากด้านบน	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, x \neq 1$
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
0.99999	1.99999
1	หาพหุไม่ได้
1.000001	2.000001
1.001	2.001
1.01	2.01
1.1	2.1

15

อาจกล่าวได้ว่าค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้จำนวน 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 เขียนในรูปลิมิตได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

(อ่านว่าลิมิตของฟังก์ชัน x เมื่อ x เข้าใกล้ 1 มีค่าเท่ากับ 2) หรือ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

16

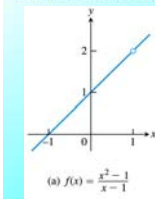
นิยามของลิมิตที่ไม่เป็นทางการ (Informal definition of limit)

ให้ $f(x)$ ถูกกำหนดไว้ภายในช่วงเปิดใดๆ ที่มีจุด x_0 อยู่ภายในช่วงนั้น ถ้าให้ L เป็นจำนวนจริง เราจะเรียก L ว่าเป็นลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อถ้าทุกค่าของ x เข้าใกล้ x_0 มากพอที่จะทำให้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ L นั้นคือ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

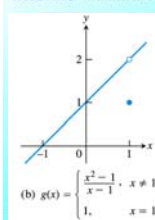
17

ตัวอย่างที่ 5 คาลิมิตที่ไม่ขึ้นอยู่กับการกำหนดฟังก์ชันที่ x_0



ฟังก์ชัน f มีลิมิต = 2 เมื่อ $x \rightarrow 1$ ถึงแม้ว่าที่ $x = 1$ จะหาค่า f ไม่ได้

ตัวอย่างที่ 5 คาลิมิตที่ไม่ขึ้นอยู่กับการกำหนดฟังก์ชันที่ x_0



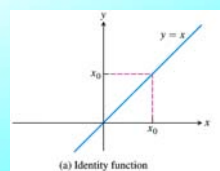
ฟังก์ชัน g มีลิมิต = 2 เมื่อ $x \rightarrow 1$ ถึงแม้ว่า $g(1) \neq 2$

คาลิมิตที่ไม่ขึ้นอยู่กับการกำหนดฟังก์ชันที่ x_0

18

ตัวอย่างที่ 6 ฟังก์ชันที่มี limit ทุกจุด

(a) ถ้า f เป็นฟังก์ชันเฉพาะ (identity function) $f(x) = x$ สำหรับค่า x_0 ใดๆ



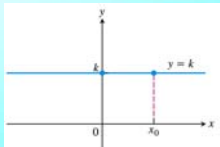
(a) Identity function

จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

ตัวอย่างที่ 6 ฟังก์ชันที่มี limit ทุกจุด

(b) ถ้า f เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) $f(x) = k$ สำหรับค่า x_0 ใดๆ



(b) Constant function

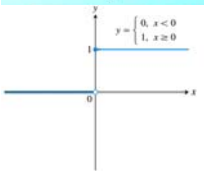
จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

19

ตัวอย่างที่ 7 จงอธิบายลักษณะของฟังก์ชันเหล่านี้เมื่อ $x \rightarrow 0$

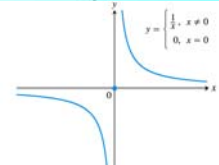
a) $u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ เป็น unit step function



หา limit ไม่ได้ที่ $x = 0$

ตัวอย่างที่ 7 จงอธิบายลักษณะของฟังก์ชันเหล่านี้เมื่อ $x \rightarrow 0$

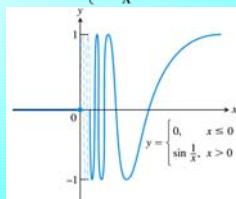
b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



หา limit ไม่ได้ที่ $x = 0$

ตัวอย่างที่ 7 จงอธิบายลักษณะของฟังก์ชันเหล่านี้เมื่อ $x \rightarrow 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$



หา limit ไม่ได้ที่ $x = 0$

21

1.2

Finding Limits and One-sided Limits

22

คุณสมบัติของลิมิต

ถ้า L, M, c และ k เป็นจำนวนจริงและ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ดังนั้น

1. กฎผลรวม: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$

2. กฎผลต่าง: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$

3. กฎผลคูณ: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

4. กฎคูณด้วยค่าคงที่: $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

5. กฎผลหาร: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

6. กฎการยกกำลัง: ถ้า r และ s เป็นเลขจำนวนเต็มและ $s \neq 0$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$

ทำให้ $L^{r/s}$ เป็นเลขจำนวนจริง

23

ตัวอย่างที่ 1 จงหา limit ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)$

(b) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

วิธีทำ

(a) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3$
 $= c^3 + 4c^2 - 3$

1. กฎผลรวม: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$

2. กฎผลต่าง: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$

24

$$\begin{aligned} (b) \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} &= \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow c} x^4 + \lim_{x \rightarrow c} x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 1}{\lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5} \\ &= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 - 3)} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 3} \\ &= \sqrt{4(-2)^2 - 3} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

25

ทฤษฎีที่ 2 ลิมิตของพหุนาม (polynomials) หาได้โดยการแทนค่า

ถ้า $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

ทฤษฎีที่ 3 ลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) หาได้

โดยการแทนค่า ถ้าลิมิตของตัวหารไม่เป็นศูนย์

ถ้า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามและ $Q(c) \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

26

กำจัดตัวหารที่เป็นศูนย์

เมื่อตัวหารเป็นศูนย์เราสามารถกำจัดออกไปด้วยการกำจัดตัวประกอบร่วม (common factor)

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

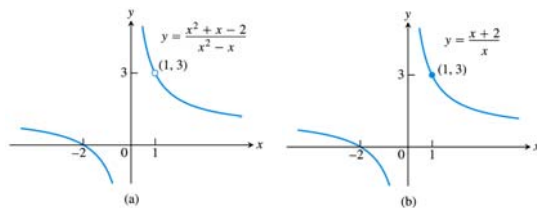
วิธีทำ กำจัดตัวประกอบร่วมของเศษและส่วนออก

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x} \quad \text{ถ้า } x \neq 1$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x} = 3$$

27

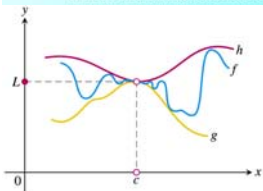
เมื่อนำฟังก์ชันเริ่มต้นและฟังก์ชันที่กำจัดตัวประกอบร่วมออกมาเขียนกราฟ จะได้ดังรูป ฟังก์ชันเริ่มต้นจะหาค่าไม่ได้ที่ $x = 1$ แต่มีลิมิต



28

Sandwich theorem

เราสามารถหาลิมิตโดยอ้อมได้ด้วย Sandwich Theorem



ถ้าฟังก์ชัน g และ h มีลิมิตเหมือนกันที่ $x \rightarrow c$ ดังนั้นฟังก์ชัน f ย่อมมีลิมิตค่าเดียวกันด้วย

ทฤษฎีบทที่ 4 Sandwich theorem

สมมติให้ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ สำหรับทุกค่า x ในช่วงเปิดที่มี c อยู่ภายในอาจจะยกเว้นที่ $x=c$ ของตัวมันเอง และให้

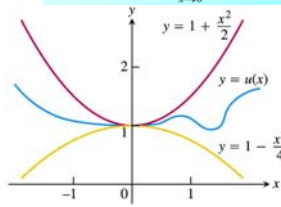
$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

29

ตัวอย่าง กำหนดให้ $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ สำหรับทุก $x \neq 0$

จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$



วิธีทำ

$$\text{เพราะว่า } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{4}) = 1$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2}) = 1$$

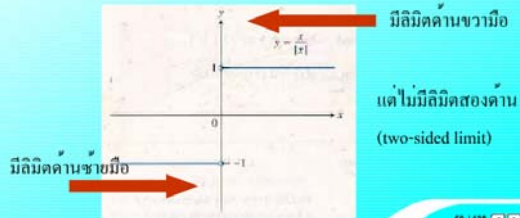
ดังนั้นตาม Sandwich Theorem จะได้

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$

30

One-sided limits

ฟังก์ชันบางฟังก์ชันจะมีลิมิตเพียงด้านใดด้านหนึ่ง ทางซ้ายมือหรือขวามือ ดังแสดงในรูป



31

นิยาม ลิมิตด้านขวามือ

$f(x)$ ถูกกำหนดให้อยู่ในช่วง (a, b) โดยที่ $a < b$ ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ค่ากำหนด L เมื่อ x เข้าใกล้ a จากภายในช่วงนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า f มี limit ด้านขวามือ L ที่ a และเขียนได้ว่า

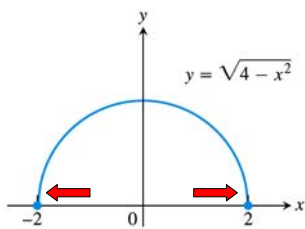
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

นิยาม ลิมิตด้านซ้ายมือ

$f(x)$ ถูกกำหนดให้อยู่ในช่วง (c, a) โดยที่ $c < a$ ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ค่ากำหนด M เมื่อ x เข้าใกล้ a จากภายในช่วงนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า f มี limit ด้านซ้ายมือ M ที่ a และเขียนได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

32



ที่ $x = -2$ จะไม่มีลิมิตด้านซ้ายมือ

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

ที่ $x = 2$ จะไม่มีลิมิตด้านขวามือ

33

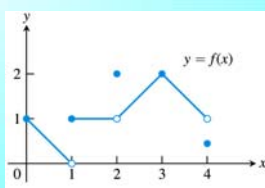
ทฤษฎีบทที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างลิมิตด้านเดียวและสองด้าน

ฟังก์ชัน $f(x)$ มีลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ c ถ้าเพียงแต่ว่ามันมีลิมิตด้านซ้ายมือและขวามือที่จุดนั้นและลิมิตด้านเดียวเหล่านี้มีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ และ } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

34

ตัวอย่างที่ 8



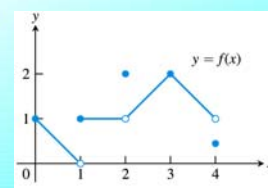
ที่ $x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ do not exist

ที่ $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ถึงแม้ว่า $f(1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ หาไม่ได้

ที่ $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ถึงแม้ว่า $f(2) = 2$

35

ตัวอย่างที่ 8



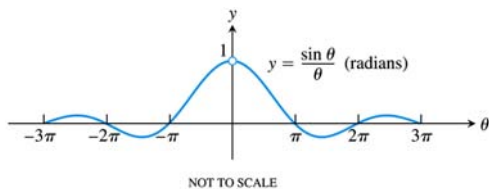
ที่ $x = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$

ที่ $x = 4$ $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ ถึงแม้ว่า $f(4) \neq 1$
 $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ do not exist

ที่จุด a อื่นๆ ในช่วง $[0, 4]$ $f(x)$ จะมีลิมิตเท่ากับ $f(a)$

36

ลิมิตที่มี $(\sin \theta) / \theta$ รูปที่แสดงนี้เป็นลักษณะของฟังก์ชันนี้



ทฤษฎีบทที่ 6

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ in radians})$$

37

ตัวอย่างที่ 10 จงแสดงให้เห็นว่า

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x} \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\ &= \frac{2}{5} (1) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(a) จาก

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\text{ดังนั้น } \cosh h = 1 - 2 \sin^2 (h/2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin^2 (h/2) - 1}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 (h/2)}{h} \\ &= - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \\ &= -(1)(0) = 0 \end{aligned}$$

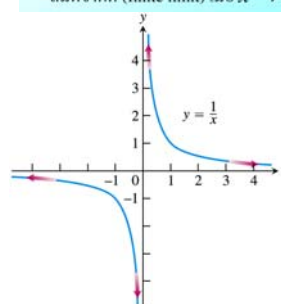
38

1.3

Limits Involving Infinity

1.3 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์ (Limits involving infinity)

ลิมิตจำกัด (finite limit) เมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$



ฟังก์ชันในรูปคือ

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

จะเห็นว่าเมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$

จะมีลิมิตเป็น 0

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

39

40

นิยาม ลิมิตเมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$

1. $f(x)$ มีลิมิต L เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ เขียนได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

2. $f(x)$ มีลิมิต L เมื่อ x เข้าใกล้ลบอนันต์ เขียนได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

41

ทฤษฎีบทที่ 7

ถ้า L , M และ k เป็นจำนวนจริง และ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \text{ และ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M \text{ ดังนั้น}$$

$$1. \text{ กฎผลรวม } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$$

$$2. \text{ กฎผลต่าง } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$$

$$3. \text{ กฎผลคูณ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

$$4. \text{ กฎผลคูณค่าคงที่ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

$$5. \text{ กฎผลหาร } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

6. กฎยกกำลัง ถ้า r และ s เป็นเลขจำนวนเต็ม, $s \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

$L^{r/s}$ เป็นจำนวนจริง

42

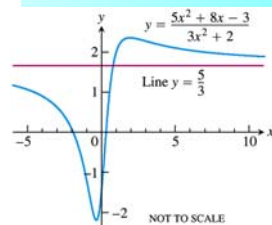
ตัวอย่างที่ 2

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

ลิมิตของฟังก์ชันตรงระยะเมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$ หาได้โดยการหารทั้งเศษและส่วนด้วยเลขยกกำลังสูงสุดของตัวหาร

ตัวอย่างที่ 3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$

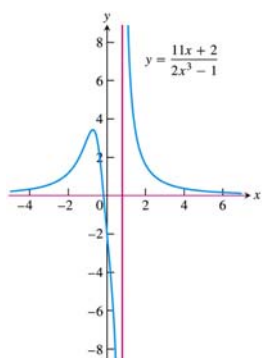


$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

จากรูปจะเห็นว่าฟังก์ชันลู่ออกเข้าหาเส้น $y = 5/3$ เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ทั้งทางบวกและลบ

43

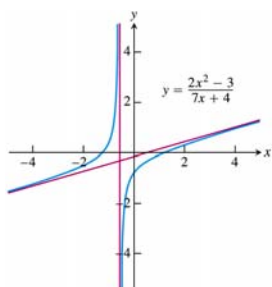
44



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)} = \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

จากรูปจะเห็นว่าฟังก์ชันลู่ออกเข้าหาเส้น $y = 0$ เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ทั้งทางบวกและลบ

45



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - (3/x)}{7 + (4/x)} = -\infty$$

จากรูปจะเห็นว่าฟังก์ชันจะห่างออกจากแกน x มากขึ้นเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ทั้งทางบวกและลบ

46

ข้อสังเกต ลิมิตของฟังก์ชันตรงระยะเมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$

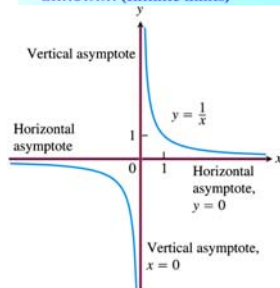
1. เมื่อตัวตั้งและตัวหารมีเลขยกกำลังเท่ากัน ค่าลิมิตคือค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีเลขยกกำลังสูงสุดของตัวตั้งและตัวหาร
2. เมื่อตัวตั้งมีเลขยกกำลังน้อยกว่าตัวหาร ค่าลิมิตจะเป็นศูนย์
3. เมื่อตัวตั้งมีเลขยกกำลังมากกว่าตัวหาร ค่าลิมิตจะหาไม่ได้

ตัวอย่าง

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + 7x}{2x^2 - 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + (7/x)}{2 - (3/x) - (10/x^2)} = \infty$$

47

เส้นกำกับในแนวราบและแนวตั้ง (Horizontal and vertical asymptotes):
ลิมิตอนันต์ (Infinite limits)



จากรูปจะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 บวก ลบ อนันต์ ฟังก์ชัน $y = 1/x$ จะเข้าใกล้ศูนย์ เส้น $y = 0$ หรือแกน x จึงเป็นเส้นกำกับในแนวราบ (horizontal asymptote) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จากซ้ายมือหรือขวามือค่าของฟังก์ชันจะเป็นอนันต์ ดังนั้นเส้น $x = 0$ หรือแกน y จึงเป็นเส้นกำกับในแนวตั้ง (vertical asymptote)

48

นิยาม Horizontal and vertical asymptotes

เส้นตรง $y = b$ เป็น horizontal asymptote ของกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ถ้า

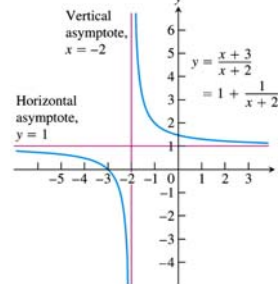
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ หรือ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

เส้นตรง $x = a$ เป็น vertical asymptote ของกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \text{ หรือ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

49

ตัวอย่าง จงหาเส้นกำกับของโค้ง $y = \frac{x+3}{x+2}$



เมื่อแยกเทอมประกอบจะได้

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}$$

จากรูปจะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ -2 บวก ลบ อนันต์ ฟังก์ชันจะมีค่าเข้าใกล้หนึ่ง เส้น $y = 1$ จึงเป็นเส้นกำกับในแนวนอน (horizontal asymptote) เมื่อ x เข้าใกล้ -2 จากซ้ายมือหรือขวามือค่าของฟังก์ชันจะเป็นอนันต์ ดังนั้นเส้น $x = -2$ จึงเป็นเส้นกำกับในแนวตั้ง (vertical asymptote)

50

การแทนที่ด้วยตัวแปรใหม่

บางทีการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยตรงอาจยาก การแทนที่ด้วยตัวแปรใหม่จะเป็นวิธีที่ง่ายกว่า

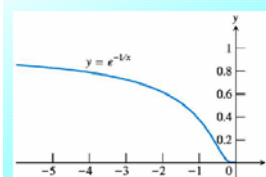
ตัวอย่าง จงหา $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(1/x)$

ให้ $t = 1/x$ จะได้ว่า $t \rightarrow 0^+$ เมื่อ $x \rightarrow \infty$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sin t = 0$$

51

ตัวอย่าง จงหา $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$



ให้ $t = 1/x$ จะได้ว่า $t \rightarrow \infty$ เมื่อ $x \rightarrow 0^+$

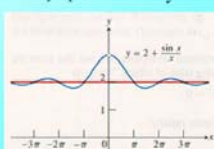
$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty$$

52

Sandwich Theorem

เราสามารถใช้ Sandwich Theorem หาลิมิตของฟังก์ชันได้เหมือนกัน เมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$

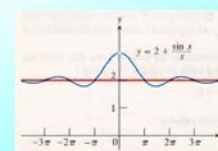
ตัวอย่าง จงหา limit เมื่อ x เข้าใกล้ 0 หรือ $\pm\infty$ โดยใช้ Sandwich Theorem หา asymptote ของโค้ง $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$



$$\text{เมื่อ } x \rightarrow 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ไม่มี asymptote ที่จุดกำเนิด

53



เมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$

$$\text{เนื่องจาก } 0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$$

จาก Sandwich Theorem จะได้ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2$$

เส้น $y = 2$ เป็นเส้นกำกับของโค้งในแนวนอน

54

นิยามที่ถูกต้องของลิมิตอนันต์ (Precise definitions of infinite limits)

นิยาม Infinite limits

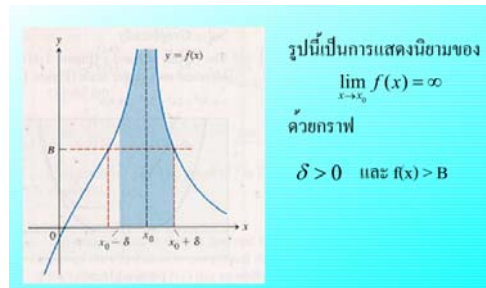
1. $f(x)$ เข้าใกล้ infinity เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 และเขียนได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

ถ้าสำหรับทุกค่าจำนวนจริงบวก B ที่ทำให้ $\delta > 0$ นั่นคือสำหรับทุกค่า x ที่

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B$$

55



56

นิยาม Infinite limits

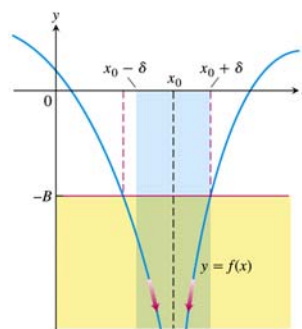
2. $f(x)$ เข้าใกล้ลบ infinity เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 และเขียนได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

ถ้าสำหรับทุกค่าจำนวนจริงลบ $-B$ ที่ทำให้ $\delta > 0$ นั่นคือสำหรับทุกค่า x ที่

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B$$

57



รูปนี้เป็นการแสดงนิยามของ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

ด้วยกราฟ

$$\delta > 0 \text{ และ } f(x) < -B$$

FIGURE 2.41 For $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, the graph of $f(x)$ lies below the line $y = -B$.

58

ฟังก์ชันบางอย่างเมื่อ x มีค่าน้อยจะมีค่าของฟังก์ชันต่างกัน แต่เมื่อ x มีค่ามาก ค่าของฟังก์ชันจะเหมือนกัน เราเรียกลักษณะของฟังก์ชันเหล่านี้ว่าแบบจำลองพฤติกรรมปลาย (end behavior model)

นิยาม End behavior model

ฟังก์ชัน g เป็น

- (a) end behavior model ทางขวาสำหรับ f

ถ้าเพียงแต่

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- (b) end behavior model ทางซ้ายสำหรับ f

ถ้าเพียงแต่

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

59

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x + e^{-x}$ จงแสดงให้เห็นว่า $g(x) = x$ เป็น end behavior model ทางขวาของ f ขณะที่ $h(x) = e^{-x}$ เป็น end behavior model ทางซ้ายของ f

จากนิยาม จะได้

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{x} \right) = 1$$

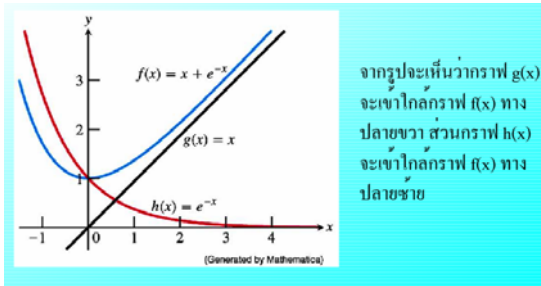
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{e^{-x}} \right) = 1$$

ดังนั้น $g(x)$ และ $h(x)$ มีพฤติกรรมปลาย

60

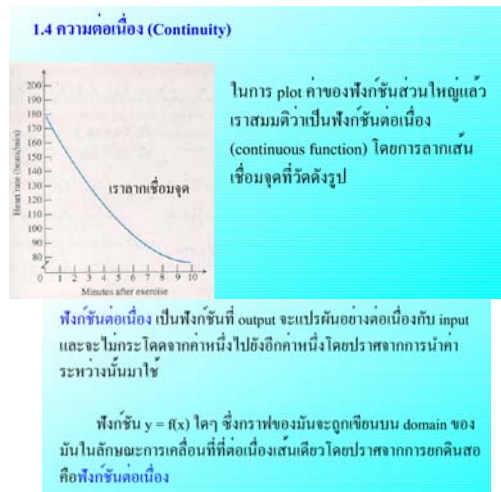
1.4

Continuity

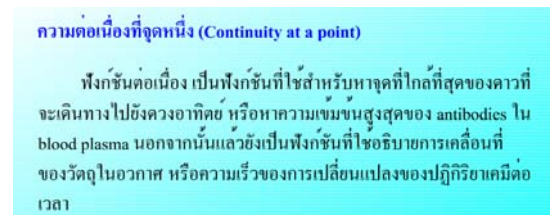


61

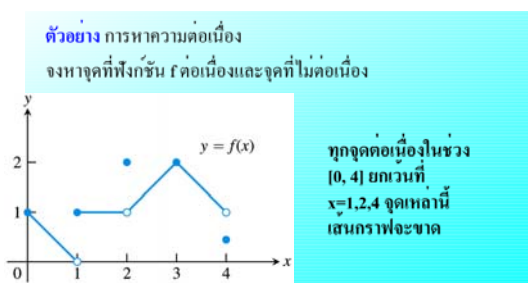
62



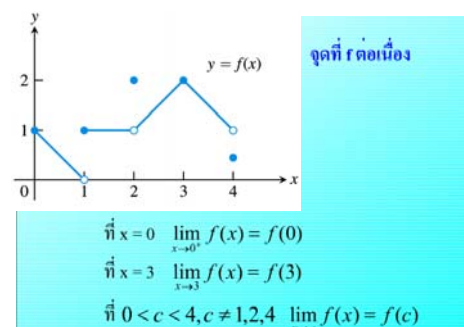
63



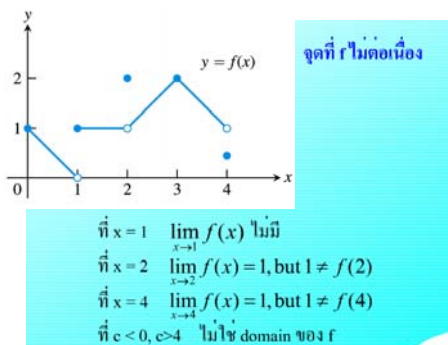
64



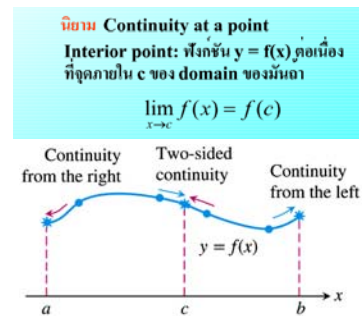
65



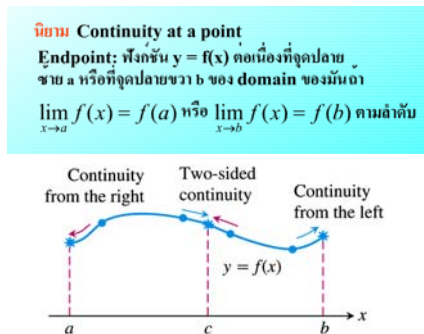
66



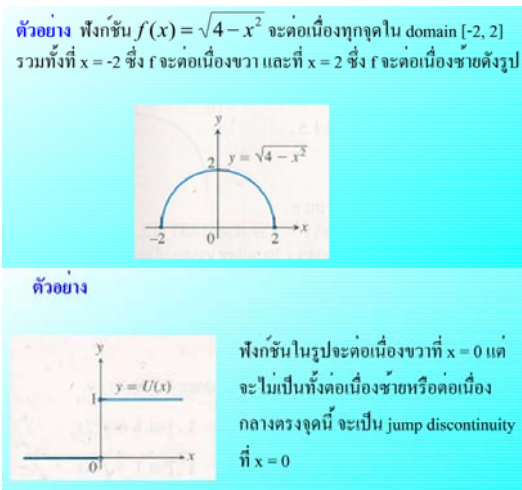
67



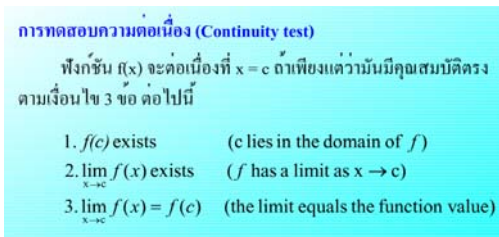
68



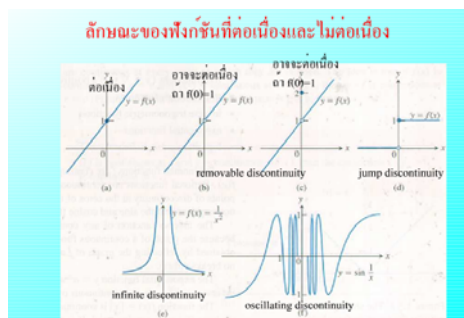
69



70



71

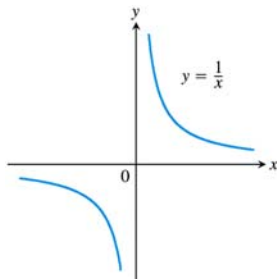


ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous function)

- ฟังก์ชันจะต่อเนื่องบนช่วงหนึ่งถ้าเพียงแต่ว่าทุกจุดจะต่อเนื่องในช่วงนั้น
- ฟังก์ชันต่อเนื่อง ทุกจุดของฟังก์ชันจะต่อเนื่องใน domain ของมัน
- ฟังก์ชันต่อเนื่องไม่จำเป็นต้องต่อเนื่องทุกช่วง

72

ตัวอย่าง ฟังก์ชัน $y = 1/x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเพราะว่าทุกจุดต่อเนื่องใน domain ของมัน มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$



73

ฟังก์ชันที่ทุกจุดต่อเนื่องใน domain ของมัน

- polynomials
- rational functions
- root function $y = \sqrt[n]{x}$, n a positive integer > 1
- trigonometric functions
- inverse trigonometric functions
- exponential functions
- logarithmic functions

74

Algebraic combinations

ทฤษฎีบทที่ 8 Properties of continuous functions

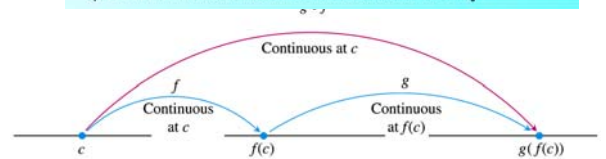
ถ้าฟังก์ชัน f และ g ต่อเนื่องที่ $x = c$ ดังนั้นผลลัพธ์ต่อไปนี้จะต่อเนื่องที่ $x = c$

1. ผลรวม: $f + g$
2. ผลต่าง: $f - g$
3. ผลคูณ: $f \cdot g$
4. คูณด้วยค่าคงที่: $k \cdot f$
5. ผลหาร: f/g , $g(c) \neq 0$

75

ประกอบกัน (Composites)

ทุกตัวประกอบของฟังก์ชันต่อเนื่องจะต่อเนื่องเช่นกัน ดังรูป

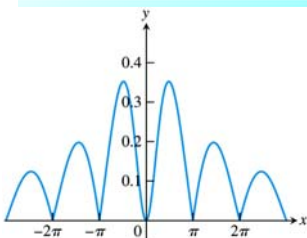


ทฤษฎีบทที่ 9 Composite of continuous functions

ถ้า f ต่อเนื่องที่ c และ g ต่อเนื่องที่ $f(c)$ ดังนั้น ตัวประกอบ $g \circ f$ จะต่อเนื่องที่ c เช่นกัน

76

ตัวอย่าง จงแสดงให้เห็นว่า $y = \frac{x \sin x}{x^2 + 2}$ ต่อเนื่อง



ให้ $g(x) = |x|$ (ต่อเนื่อง)
และ $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 2}$ (ต่อเนื่อง)
 y คือตัวประกอบ $g \circ f$
เมื่อนำไปเขียนกราฟจะได้ฟังก์ชันต่อเนื่องดังรูป

77

ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางของฟังก์ชันต่อเนื่อง (Intermediate value theorem for continuous functions)

ฟังก์ชันจะมี Intermediate value property ถ้ามัน ไม่เคยให้ 2 ค่าโดยปราศจากการใช้ทุกค่าในช่วงนั้น

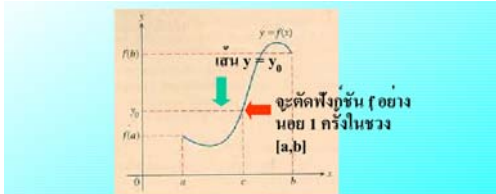
ทฤษฎีบทที่ 10 The intermediate value theorem for continuous functions

ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ต่อเนื่องในช่วงปิด $[a, b]$
สำหรับทุกค่าที่ไประหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ หรือ ถ้า y_0
คือค่าใด ๆ ที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ ดังนั้น $y_0 = f(c)$ สำหรับค่า c อย่างน้อย 1 ค่าในช่วง $[a, b]$

78

1.5

Tangent Lines



จากทฤษฎีจะได้

- เส้นของกราฟจะไม่มีการขาดช่วง (connectivity)
- สามารถหารากของสมการได้ (ช่วงที่ทำให้ f เปลี่ยนเครื่องหมาย คือรากของฟังก์ชัน)

79

80

1.5 เส้นสัมผัส (Tangent lines)

เส้นสัมผัสของส่วนโค้งคืออะไร?



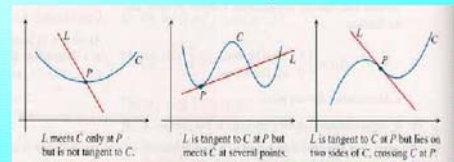
เป็นเส้นสัมผัส (touch) กับวงกลมที่ดึงดูดกับเส้นรัศมี ดังรูป

81

Tangent มีความหมายหนึ่งในข้อต่อไปนี้

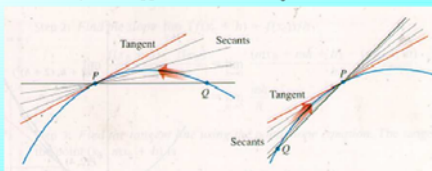
1. L ผ่านจุด P ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากจากจุด P ไปยังจุดศูนย์กลางวงกลม C
2. L ผ่านเพียงจุดเดียวของ C คือ P
3. L ผ่านจุด P และอยู่บนด้านหนึ่งของ C เพียงด้านเดียว

เมื่อนำ 3 ข้อนี้มาใช้กับกราฟดังรูปจะไม่ได้



82

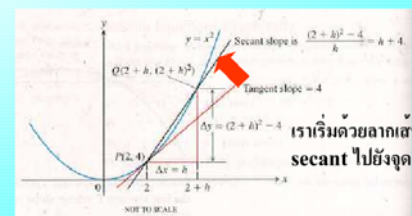
เราจะต้องใช้ dynamic approach ดังแสดงในรูป



1. เราเริ่มด้วยการคำนวณความชันของ secant PQ
2. หา limit ของความชันของ secant เมื่อ Q เข้าใกล้ P
3. ถ้ามี limit ให้เป็นค่าความชันที่ P และกำหนด tangent ให้เส้นโค้งที่จุด P นี้ค่าความชันนี้

83

ตัวอย่าง จงหาความชันของทาราไบลา $y = x^2$ ที่จุด $P(2, 4)$ และเขียนสมการเส้นสัมผัสที่จุดนี้



เราเริ่มด้วยลากเส้น secant ไปยังจุด P

84

$$\begin{aligned}\text{หาความชัน } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h}{h} \\ &= h + 4\end{aligned}$$

$$\text{หาลิมิตของความชัน } \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4 = m$$

หาเส้นสัมผัส

$$\text{จาก point-slope form } y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{จะได้เส้นสัมผัสคือ } y = 4x - 4$$

85

นิยาม slope and tangent line

ความชันของโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ คือ

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{ต้องมี limit})$$

เส้นสัมผัสของโค้งที่ผ่านจุด P คือเส้นตรงที่ผ่านจุด P ที่มีค่าความชันนี้

ตัวอย่าง

(ก) จงหาความชันของโค้ง $y = 1/x$ ที่ $x = a$

(ข) จุดไหนที่มีความชันเท่ากับ $-1/4$?

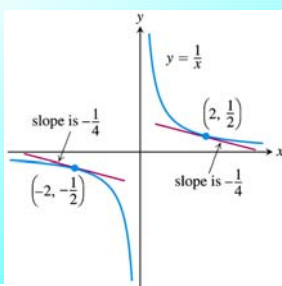
(ค) จะเกิดอะไรกับเส้นสัมผัสของโค้งที่จุด $(a, 1/a)$ เมื่อ a เปลี่ยนแปลง

$$\begin{aligned}(\text{ก}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

$$\text{ความชัน} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

86

(ข)

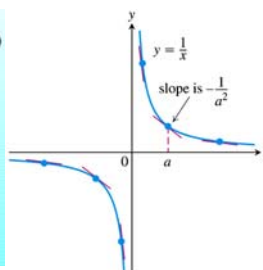


$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } a = 2$$

87

(ค)



เมื่อ $a \rightarrow 0^+$
ความชันจะเพิ่มขึ้นเป็น $-\infty$
เมื่อ $a \rightarrow 0^-$
ความชันจะเพิ่มขึ้นเป็น $-\infty$

88

อัตราการเปลี่ยนแปลง: อนุพันธ์ที่จุด

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

เราเรียกผลต่างของผลหาร (difference quotient) ของ f ที่ x_0 เมื่อ h เพิ่มขึ้น ถ้าผลต่างนี้มีลิมิตเมื่อ h เข้าใกล้ 0 เราจะเรียกว่าอนุพันธ์ของ f ที่ x_0 (derivative of f at x_0) จะให้ความชันที่ $x = x_0$ หรืออัตราการเปลี่ยนแปลง เมื่อเทียบกับจุด x_0

89

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 ในหัวข้อที่ 1.1 ก่อนหาค่าจากหน้าผาคตามสมการระยะทาง $y = 16t^2$ จงหาความเร็วที่ $t=2$

ให้ $f(t) = 16t^2$ ที่ $t=2$ และ $t=2+h$ จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลง

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{16(2+h)^2 - 16(2)^2}{h} \\ &= \frac{16(h^2 + 4h)}{h} = 16(h + 4)\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 16(h + 4) = 64 \text{ ft/sec}$$

90

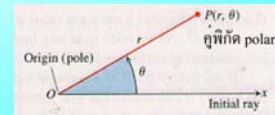
1.6

Polar Coordinates and Graphs (9.5)

91

1.6 Polar coordinates and graphs

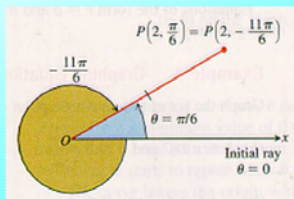
Polar coordinates



รูปนี้แสดงการเรียกชื่อส่วนต่างๆ ของพิกัด polar

92

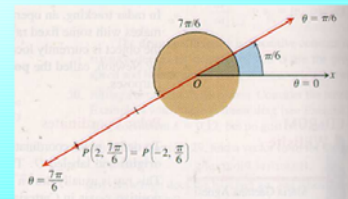
คุณสมบัติของ polar



พิกัด polar สามารถเขียนได้หลายรูปแบบดังรูป

93

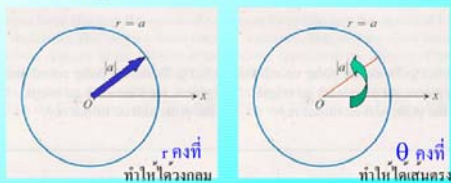
คุณสมบัติของ polar



พิกัด polar สามารถมีค่า r เป็นลบได้

94

การเขียนกราฟ polar

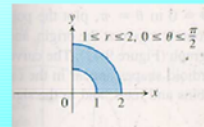


Equation
 $r = a$ Circle of radius $|a|$ centered at O
 $\theta = \alpha$ Line through O making an angle with the initial ray

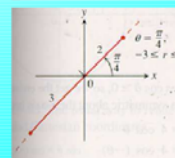
95

ตัวอย่าง เขียนสมการและอสมการ

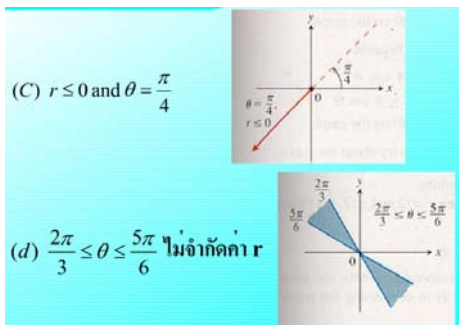
(a) $1 \leq r \leq 2$ and $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



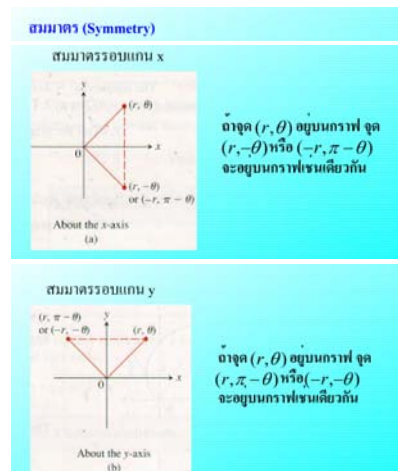
(b) $-3 \leq r \leq 2$, $\tan \theta = \frac{\pi}{4}$



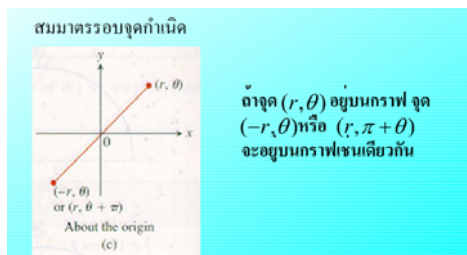
96



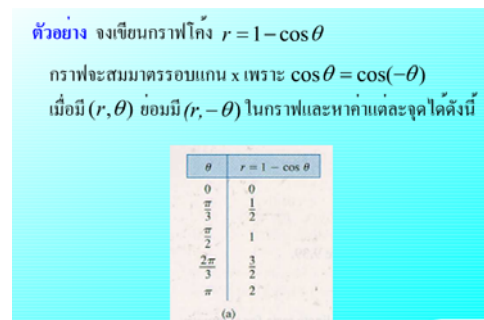
97



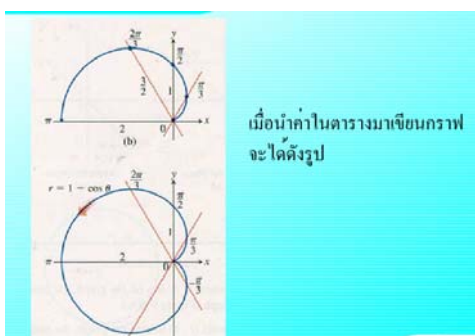
98



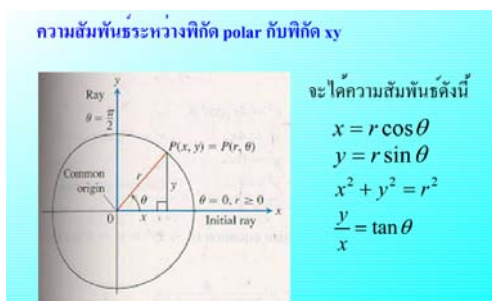
99



100



101

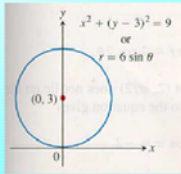


102

1.7

Mathematical Induction

ตัวอย่าง จงหาสมการ polar ของสมการวงกลม $x^2 + (y-3)^2 = 9$



จากความสัมพันธ์จะได้

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$r^2 - 6r \sin \theta = 0$$

$$r = 0 \text{ or } r - 6 \sin \theta = 0$$

103

104

1.7 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

สามารถแสดงให้เห็นได้ว่าใช้ได้กับทุกเลขจำนวนเต็มบวกโดยใช้ความจริงที่ไม่ต้องพิสูจน์ (axiom) ที่เรียกว่า mathematical induction principle การพิสูจน์นี้จะเรียกว่า proof by induction

105

ขั้นที่ 1: ตรวจสอบสมการว่าใช้กับ $n = 1$ ได้

ขั้นที่ 2: พิสูจน์ว่าสมการใช้ได้กับเลขจำนวนเต็มบวกใดๆ $n = k$ และ

สามารถใช้กับเลขจำนวนเต็มบวกถัดไป $n = k+1$ ได้

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่าผลรวมของเลขจำนวนเต็มบวกใดๆ n มีค่าดังนี้

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

106

ขั้นที่ 1: ให้ $n = 1$ แทนค่าในสูตรจะได้ $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ถูกต้อง

ขั้นที่ 2: ให้ $n = k$ แล้ว $n = k + 1$ จะได้

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ดังนั้น $1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\stackrel{n}{=} \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \quad \text{ถูกต้อง}$$

107