

บทที่ 2

Derivatives

1

Chapter 2 : Derivatives

- 2.1 The Derivative as a Function
- 2.2 The Derivative as a Rate of Change
- 2.3 Derivatives of Products, Quotients, and Negative Power
- 2.4 Derivatives of Trigonometric Function
- 2.5 The Chain Rule
- 2.6 Implicit Differentiation
- 2.7 Related Rates

2

2.1

The Derivative as a Function

3

2.1 อนุพันธ์เป็นฟังก์ชัน (The derivative as a function)

นิยาม Derivative function

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อเทียบกับตัวแปร x คือฟังก์ชัน f' โดยมีค่าที่ x เป็น

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

โดย limit จะต้องหาได้

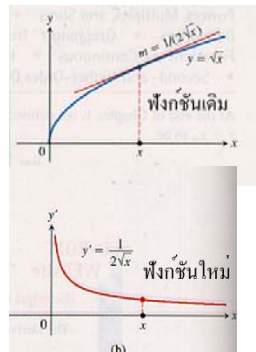
Domain ของ f' จะเป็นเซตของจุดที่อยู่ใน domain ของ f ซึ่งหา limit ได้ domain ของมันอาจจะเท่ากับ domain ของ f หรือน้อยกว่า ถ้า f' มีจริงที่ค่า x หนึ่ง เราอาจกล่าวได้ว่า f มีอนุพันธ์ (differentiable) ที่ x ถ้า f' มีจริงทุกจุดใน domain ของ f เราเรียกฟังก์ชันนี้มีอนุพันธ์ (f differentiable)

4

ตัวอย่างที่ 1

เมื่อเรานำฟังก์ชันที่ได้ไปเขียนกราฟจะได้กราฟดังรูป

(ก) จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sqrt{x}$ สำหรับ $x > 0$
จากนิยามของฟังก์ชันอนุพันธ์เราจะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (\text{แทนค่าฟังก์ชัน}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{เป็นฟังก์ชันใหม่} \end{aligned}$$


5

(ข) จงหาเส้นสัมผัสกับโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่ $x = 4$

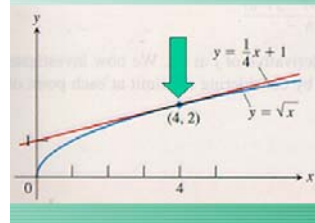
เส้นสัมผัสคือเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 4$ ดังนั้นความชันของเส้นตรงคือ $m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

และความชัน (m) คือ

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - 2}{x - 4}$$

ดังนั้น $y = m(x - 4) + 2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(x - 4) + 2 \\ &= \frac{1}{4}x + 1 \end{aligned}$$



6

สัญลักษณ์ (notation) ของอนุพันธ์มีหลายรูปแบบดังนี้

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ $x = a$ เราเขียนในรูปลิมิตได้ว่า

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

อนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ที่ $x = a$



เขียนแทนด้วย

$$y'|_{x=a} \text{ or } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \text{ or } \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

7

Differentiation: คือกระบวนการการคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่ ยกกำลัง ผลคูณ และผลรวม

(Derivatives of constants, powers, multiples, and sums)

กฎข้อที่ 1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่

ถ้า f มีค่าคงตัว $f(x) = c$ แล้ว

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

กฎข้อที่ 3 การคูณด้วยค่าคงที่

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของ x และ c เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

กฎข้อที่ 2 การยกกำลังสำหรับเลขจำนวนเต็มบวก

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

กฎข้อที่ 4 อนุพันธ์ของผลรวม

ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของ x แล้วผลบวก $u + v$ จะมีอนุพันธ์ที่ทุกจุดที่ซึ่งทั้ง u และ v มีอนุพันธ์ ที่จุดดังกล่าว

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ตัวอย่าง

$$y = x^4 + 12x + 2$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) + 0 \\ &= 4x^3 + 12 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

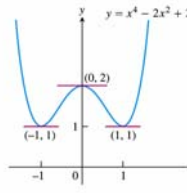
$$y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5 \end{aligned}$$

9

ตัวอย่าง เส้นโค้ง $y = x^4 - 2x^2 + 2$ มีเส้นสัมผัสเส้นแนวราบหรือไม่ ถ้ามีจะอยู่ที่ไหน

เส้นสัมผัสเส้นแนวราบจะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = 0$ ดังนั้น



$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

หาจุด x ที่มีความชันเป็นศูนย์จะได้

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

ดังนั้นที่จุด $x = 0, 1, -1$ ความชันของกราฟจะเป็นศูนย์ดังแสดงในรูป

10

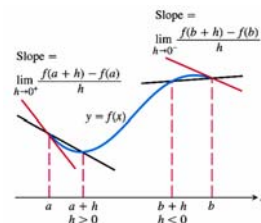
หาอนุพันธ์ได้บนช่วงหนึ่ง: อนุพันธ์ด้านเดียว

(Differentiable on an interval: One-sided derivatives)

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิดถ้ามันมีอนุพันธ์ที่แต่ละจุดของช่วงและหาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้ามันมีอนุพันธ์ในช่วงภายใน (a, b) และมี

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ ซึ่งคืออนุพันธ์ขวามือที่จุดปลายที่ } a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \text{ ซึ่งคืออนุพันธ์ซ้ายมือที่จุดปลายที่ } b$$



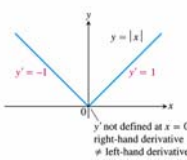
รูปนี้แสดงให้เห็นว่าอนุพันธ์ที่จุดปลายคือลิมิตด้านเดียว

ฟังก์ชันจะมีอนุพันธ์ที่จุดใดๆ ก็ต่อเมื่อมันมีอนุพันธ์ซ้ายมือและอนุพันธ์ขวามือที่นั่น และอนุพันธ์ทั้งสองด้านนี้เท่ากัน

11

12

ตัวอย่าง จงแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน $y = |x|$ มีอนุพันธ์บน $(-\infty, 0)$ และ $(0, \infty)$ แต่จะไม่มีที่ $x = 0$



จากกราฟเมื่อเราหาอนุพันธ์ในช่วง $(0, \infty)$ จะได้

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

เมื่อเราหาอนุพันธ์ในช่วง $(-\infty, 0)$ จะได้

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = -1$$

จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชัน $y = |x|$ มีอนุพันธ์บนช่วง $(-\infty, 0)$ และ $(0, \infty)$

จากกราฟเมื่อเราหาอนุพันธ์ของ $|x|$ ที่ 0 จะได้

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

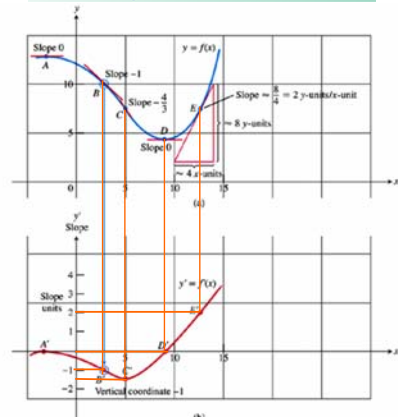
อนุพันธ์ซ้ายมือของ $|x|$ ที่ 0 จะได้

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

อนุพันธ์ซ้ายมือไม่เท่ากับอนุพันธ์ขวามือจึงสรุปได้ว่าไม่มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$

13

Graphing f' from estimated values



โดยลากเส้นสัมผัสกราฟที่ตรงจุดที่ความชันเปลี่ยนแปลงแล้วหาความชันของกราฟที่จุดนั้น

14

เราได้อะไรจากกราฟอนุพันธ์

1. ทราบตำแหน่งของอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่มีค่าบวก ลบ และศูนย์
2. ทราบขนาดของการเปลี่ยนแปลงที่ x ใดๆ
3. ทราบตำแหน่งที่อัตราการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้น หรือลดลง

15

ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้จะต่อเนื่อง

(Differentiable functions are continuous)

ทฤษฎีบทที่ 1 การหาอนุพันธ์ได้บ่งบอกถึงความต่อเนื่อง

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x = c$ แล้ว f ย่อมต่อเนื่องที่ $x = c$

คุณสมบัติการหาค่ากลางของอนุพันธ์

(Intermediate value property of derivatives)

ทฤษฎีบทที่ 2 คุณสมบัติการหาค่ากลางของอนุพันธ์

ถ้า a และ b เป็นจุดใดๆ 2 จุดในช่วงที่ f หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น f' จะมีค่าใดทุกค่าระหว่าง $f'(a)$ กับ $f'(b)$

16

Second- and higher-order derivatives

อนุพันธ์อันดับสอง $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$

อนุพันธ์อันดับสาม $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3}$

อนุพันธ์อันดับ n

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

ตัวอย่างที่ 10

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(4)} = 0$$

17

2.2

The Derivative as a Rate of Change

18

2.2 อนุพันธ์เป็นอัตราของการเปลี่ยนแปลง (The derivative as a rate of change)

จะเป็นการประยุกต์อนุพันธ์กับการจำลองอัตราการเปลี่ยนแปลงต่างๆ

อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous rates of change)

นิยาม อัตราการเปลี่ยนแปลงที่ขณะใดขณะหนึ่ง

อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดๆ ของ f เทียบกับ x ที่ x_0 ก็คืออนุพันธ์

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ต้องมี limit}$$

19

ตัวอย่าง พื้นที่ A ของวงกลมมีความสัมพันธ์กับเส้นผ่าศูนย์กลางดังนี้
 $A = \frac{\pi}{4} D^2$ จงหาพื้นที่ที่จะเปลี่ยนแปลงเร็วขนาดไหนเมื่อเทียบกับเส้นผ่าศูนย์กลางเมื่อเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 10 เมตร

เราอนุพันธ์สมการ A เทียบกับ D จะได้

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}$$

ที่ $D = 10$ เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่คือ

$$\frac{\pi \cdot 10}{2} = 5\pi \quad \text{ตารางเมตร/เมตร}$$

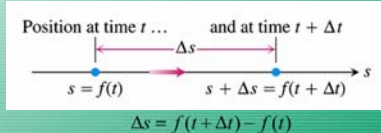
20

การเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรง: ระยะขจัด, ความเร็ว, อัตราเร็ว, ความเร่งและ jerk
(Motion along a line: displacement, velocity, speed, acceleration, and jerk)

วัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นที่ที่กำหนดให้ เราสามารถหาระยะทางของการเคลื่อนที่ที่เป็นฟังก์ชันกับเวลาได้ คือ

$$s = f(t)$$

displacement ของวัตถุในช่วง t ถึง $t + \Delta t$ คือ



21

average velocity

$$v_{av} = \frac{\text{displacement}}{\text{travel time}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

นิยาม (Instantaneous) Velocity

ความเร็ว (ขณะใด) เป็นอนุพันธ์ของตำแหน่งเทียบกับเวลา ถ้าตำแหน่งของวัตถุที่เวลา t เป็น $s = f(t)$ แล้วความเร็วของวัตถุที่เวลา t คือ

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

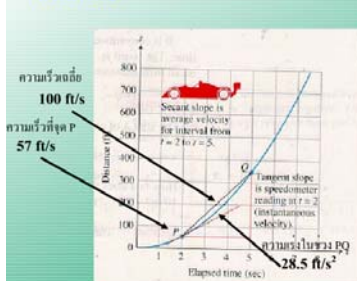
นิยาม อัตราเร็ว (speed)

อัตราเร็วคือค่าสัมบูรณ์ของความเร็ว

$$\text{อัตราเร็ว} = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

22

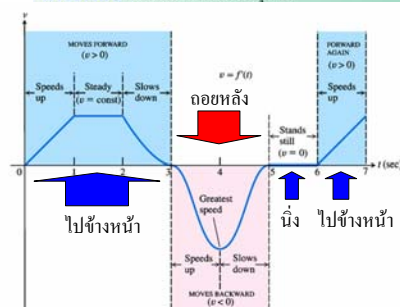
ตัวอย่างที่ 2 หาความเร็วของรถแข่ง



รถแข่งเริ่มออกรถที่ความเร็ว 0 แล้วเร่งเครื่องให้รถวิ่งเร็วขึ้นโดยอัตราเร่งจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงเวลาที่จุด P, Q คือความเร็วเฉลี่ยของรถที่จุด P คือความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง

23

ตัวอย่างที่ 3 การเคลื่อนที่ของอนุภาค



รูปกราฟแสดงความเร็วของอนุภาคที่เวลาต่างๆ อัตราเร็วเป็นบวกแสดงว่าไปข้างหน้า อัตราเร็วเป็นลบแสดงว่าถอยหลัง อัตราเร็วเป็นศูนย์แสดงว่าอนุภาคหยุดนิ่ง

24

นิยาม ความเร่ง (acceleration), jerk

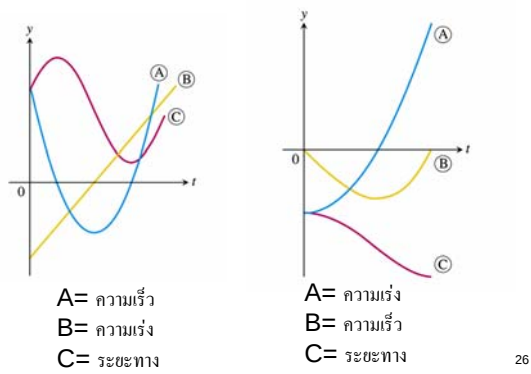
ความเร่ง คืออนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับเวลา ถ้าตำแหน่งของวัตถุที่เวลา t เป็น $s = f(t)$ แล้วความเร่งของวัตถุที่เวลา t คือ

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Jerk คืออนุพันธ์ของความเร่งเทียบกับเวลา

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

อะไรคือระยะทาง ความเร็ว และความเร่ง



ตัวอย่างที่ 4 การตกอย่างอิสระ

ลูกปืนตกมาจากจุดหนึ่งโดยมีเวลาและระยะทางของการเคลื่อนที่ดังรูป

จากการทดลองของกาลิเลโอ ระยะที่วัตถุที่ตกอย่างอิสระใกล้โลกจะมีความสัมพันธ์กับเวลาคือ

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

ระยะทางใน 2 วินาทีแรกคือ

$$s(2) = 4.9(2)^2 = 19.6 \text{ เมตร}$$

ความเร็วคือ

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t$$

$$v(2) = 19.6 \text{ เมตร/วินาที}$$

อัตราเร็วคือ $|v(2)| = 19.6 \text{ เมตร/วินาที}$

ความเร่งคือ

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

ตัวอย่างที่ 5 การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

ก้อนหินถูกกระชกให้ลอยขึ้นไปในอากาศโดยมีสมการการเคลื่อนที่และความเร็ว

เริ่มต้นแสดงในรูป หินจะขึ้นได้สูงสุด?

เมื่อนำสมการการเคลื่อนที่และความเร็วไปเขียนกราฟจะได้ดังรูป จุดที่ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดคือจุดที่ความเร็วเป็นศูนย์

$S = 160t + 16t^2$

$V_0 = 160 \text{ ft/s}$

$s = 160t - 16t^2$

$v = \frac{ds}{dt} = 160 - 32t$

ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = 160 - 32t = 0$

$t = 5$ วินาที

$s_{\max} = 160(5) - 16(5)^2 = 400$ ฟุต

ความเร็ว? และอัตราเร็ว? ที่ 256 ฟุต เหนือพื้นดินทั้งตอนขึ้นและตอนลง

หาเวลาที่ใช้

ดังนั้นความเร็วที่ 2 และ 8 วินาทีคือ

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256$$

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$

$$16(t^2 - 10t + 16) = 0$$

$$(t - 2)(t - 8) = 0$$

$$t = 2 \text{ sec}, t = 8 \text{ sec}$$

อัตราเร็ว = 96 ฟุต/วินาที

นิยาม อัตราเร็ว (speed)

อัตราเร็วคือค่าสัมบูรณ์ของความเร็ว

$$\text{อัตราเร็ว} = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

ความเร่งของก้อนหิน=? ที่ใด ๆ หลังระเบิด

อนุพันธ์สมการการเคลื่อนที่สองครั้งจะได้ความเร่งดังนี้

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ ft/sec}^2$$

เมื่อไหร่ก้อนหินจะตกกระทบพื้น?

ก้อนหินกระทบพื้นคือจุดที่ระยะการเคลื่อนที่ของก้อนหินเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$s = 160t - 16t^2 = 0$$

$$16t(t - 10) = 0$$

$$t = 0 \text{ sec}, t = 10 \text{ sec}$$

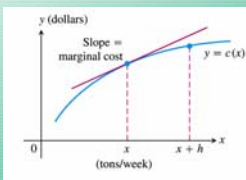
ก้อนหินจะตกกระทบพื้นที่เวลา 10 วินาที

ความอ่อนไหวต่อการเปลี่ยนแปลง (Sensitivity to change)

เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยใน x แต่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างมากในค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เราเรียกว่าฟังก์ชันมีความไวต่อการเปลี่ยนแปลงใน x อนุพันธ์ $f'(x)$ จะเป็นตัววัดความไวนี้

อนุพันธ์ในเชิงเศรษฐศาสตร์

เทอมที่ใช้ $c(x)$ = cost of product
marginal: rate of change
marginal cost of production คือ dc/dx



รูปนี้แสดงฟังก์ชัน $y = c(x)$ โดยที่ y คือค่าใช้จ่ายในการผลิต x คือจำนวนหน่วยที่ผลิต ดังนั้น $\frac{c(x+h)-c(x)}{h}$ คือค่าใช้จ่ายเฉลี่ยต่อหน่วย h หน่วย

และ $\frac{dc}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h)-c(x)}{h}$
เราเรียกว่า marginal cost of production

ตัวอย่าง สมการค่าใช้จ่ายในการผลิตเครื่องฉายรังสี x เครื่อง เมื่อผลิต 8-10 เครื่องคือ $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ และ $r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ ถ้าให้ $r(x) = 9x$ เป็นผลกำไรจากการขายเครื่องฉายรังสี x เครื่อง ราคายอดขายสามารถผลิตสินค้าได้วันละ 10 เครื่อง ถ้าต้องการผลิตเพิ่มขึ้นอีก 1 เครื่องต่อวัน จะต้องเสียค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้นเท่าไร? ถ้าไรสูงสุดเท่าไร

marginal cost คือ $c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$

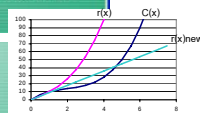
ดังนั้นถ้าต้องการผลิตเพิ่มขึ้นอีก 1 เครื่องต่อวันจะต้องเสียค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น $c'(10) = 3(10)^2 - 12(10) + 15 = 195$

ผลตอบแทนจะเพิ่มขึ้นเท่าไรถ้าขาย 11 เครื่องต่อวัน?

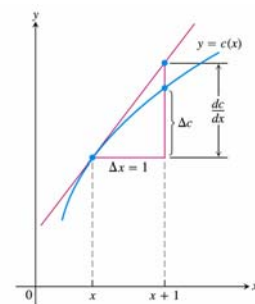
อัตราผลตอบแทนคือ $r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$ $r'(x) = 9x$

$r'(10) = 3(10)^2 - 6(10) + 12 = 252$

ถ้าไรสูงสุดคือที่ $3x^2 - 12x + 15 = 9$ $x = 0.586$ (ขาดทุน) และ $x = 3.414$



The marginal cost dc/dx



is approximately the extra cost Δc of producing $\Delta x = 1$ more unit.

2.3

Derivatives of Products, Quotients, and Negative Power

2.3 อนุพันธ์ของผลคูณ ผลหาร และยกกำลังลบ (Derivatives of products, quotients, and negative powers)

กฎข้อที่ 5 อนุพันธ์ของผลคูณ

ถ้า u และ v หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว อนุพันธ์ของผลคูณ uv ยอมหาได้เป็น

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

กฎข้อที่ 6 อนุพันธ์ของผลหาร

ถ้า u และ v หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v(x) \neq 0$ แล้ว อนุพันธ์ของผลหารยอมหาได้เป็น

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

กฎข้อที่ 7 กฎยกกำลังสำหรับเลขจำนวนเต็มลบ

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ และ $x \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ไม่ต่างจากกฎยกกำลังเลขจำนวนเต็มบวก

กฎข้อที่ 5 อนุพันธ์ของผลคูณ
ถ้า u และ v หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว อนุพันธ์ของ
ผลคูณ uv ยอมหาได้เป็น

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \frac{1}{x} \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

37

กฎข้อที่ 6 อนุพันธ์ของผลหาร
ถ้า u และ v หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v(x) \neq 0$
แล้ว อนุพันธ์ของผลหารยอมหาได้เป็น

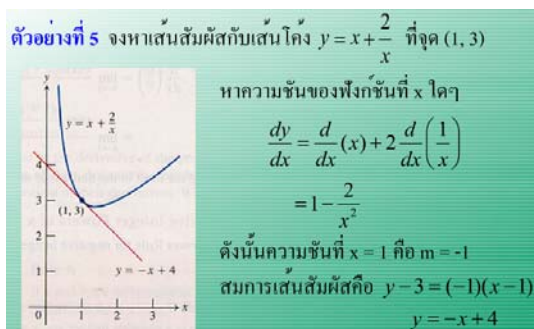
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

ให้ $u = t^2 - 1, v = t^2 + 1$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{(t^2 + 1) \cdot 2t - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

8



39

2.4 Derivatives of Trigonometric Function

40

2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ (Derivatives of trigonometric functions)

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน sine

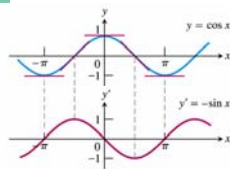
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน sine คือ ฟังก์ชัน cosine

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน cosine

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน cosine คือ ค่าลบของฟังก์ชัน sine

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$



41

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน sine

ตัวอย่างที่ 1

(a) $y = x^2 - \sin x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= 2x - \cos x \end{aligned}$$

(b) $y = \frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

42

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน cosine

ตัวอย่างที่ 2

$$(a) y = \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$(b) y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \sin x} \end{aligned}$$

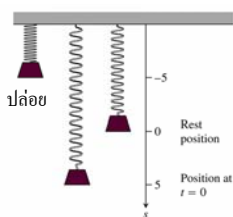
43

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณอื่นๆ

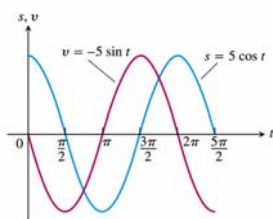
$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x} & \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x} & \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x \end{aligned}$$

44

การเคลื่อนที่แบบ Simple harmonic



ช็อคออกมา



45

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า $y = \sec x$ จงหา y''

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\ &= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) \\ &= \sec x \sec^2 x + \tan x(\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x \end{aligned}$$

46

Continuity of trigonometric functions

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 จะต่อเนื่องตลอด domain ของมัน

$\sec x$ และ $\tan x$ จะต่อเนื่องทุกจุดยกเว้นที่ $x = \frac{\pi}{2}$ โดย x เป็นจำนวนเต็มและเป็นศูนย์

$\csc x$ และ $\cot x$ จะต่อเนื่องทุกจุดยกเว้นที่ $x = \pi$ โดย x เป็นจำนวนเต็ม

เราจึงสามารถคำนวณหา limit ของฟังก์ชันตรีโกณได้ด้วยการแทนค่าได้เลย

47

ตัวอย่างที่ 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} &= \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} \\ &= \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi - 0)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

48

2.5

The Chain Rule and parametric equations

49

2.5 กฎลูกโซ่ (The chain rule)

Derivative of a composite function

ตัวอย่างที่ 1

$y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ เป็นฟังก์ชันประกอบของ $y = 2u$ และ $u = 3x - 5$ อนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

เมื่อเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้จะได้

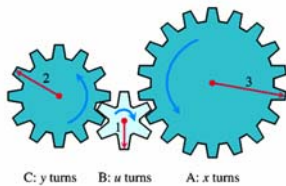
$$\frac{dy}{dx} = 6, \quad \frac{dy}{du} = 2, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

50

ซึ่งจะเห็นว่าอนุพันธ์ที่ได้จะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

เปรียบเทียบความสัมพันธ์นี้เหมือนกับการหมุนของเฟืองที่ขบกันดังรูป



51

ทฤษฎีบทที่ 3 กฎลูกโซ่ (The chain rule)

ถ้า $f(u)$ หาอนุพันธ์ได้จุด $u = g(x)$ และ $g(x)$

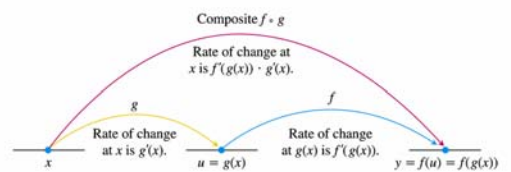
หาอนุพันธ์ได้จุด x แล้วฟังก์ชันประกอบหรือประกอบ

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x

และ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ถ้าให้ $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ซึ่ง } \frac{dy}{du} \text{ เป็นค่าที่ } u = g(x)$$



52

ตัวอย่างที่ 3 วัตถุเคลื่อนที่ตามแนวแกน x โดยมีตำแหน่งที่เวลา $t \geq 0$ ใดๆ เป็น $x(t) = \cos(t^2 + 1)$ จงหาความเร็วของวัตถุในรูปฟังก์ชันของ t

ให้ $x = \cos(u)$, $u = t^2 + 1$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -\sin(u) & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ & & &= -\sin(u) \cdot 2t \\ \frac{du}{dt} &= 2t & &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ & & &= -2t \sin(t^2 + 1) \end{aligned}$$

53

"Outside-inside" rule

เราอาจจะหาอนุพันธ์ตามกฎลูกโซ่ด้วยวิธีต่อไปนี้ได้

ถ้า $y = f(g(x))$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

อนุพันธ์ฟังก์ชัน f ข้างนอกและให้เหลือเป็นฟังก์ชันข้างใน $g(x)$ อย่างเดียวแล้วคูณด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชันข้างใน

54

Repeated use of the Chain Rule

บางครั้งเราอาจต้องใช้กฎลูกโซ่หลายรอบเพื่อหาค่าอนุพันธ์ได้อย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5

จงหาอนุพันธ์ของ $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) \quad \text{รอบที่ 1} \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) \quad \text{รอบที่ 2} \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt}(2t)) \quad \text{รอบที่ 3} \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\ &= -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t) \end{aligned}$$

55

Slopes of parametrized curves

ความชันของโค้งตัวแปรเสริม

โค้งตัวแปรเสริม $(x(t), y(t))$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t ถ้า x และ y หาอนุพันธ์ได้ที่ t จะได้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

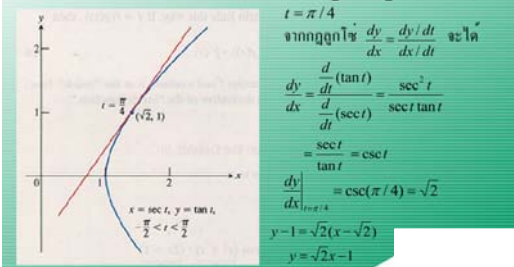
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad dx/dt \neq 0$$

56

Parametric equations

ตัวอย่างที่ 6

จงหาเส้นสัมผัสของ hyperbola ขวามือที่มี **อนุพันธ์ในตัวแปรเสริม** เป็น $x = \sec t$, $y = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ที่จุด $(\sqrt{2}, 1)$ โดยที่



57

อนุพันธ์อันดับสองจะได้ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}, \quad dx/dt \neq 0$

ตัวอย่างที่ 7

จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ในเทอมของ t ถ้า $x = t - t^2$, $y = t - t^3$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t} \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1-3t^2}{1-2t} \right) = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2-6t+6t^2)/(1-2t)^2}{(1-2t)} \\ &= \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3} \end{aligned}$$

58

Power chain rule กฎของลูกโซ่ยกกำลัง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันอนุพันธ์ของ u และถ้า u เป็นฟังก์ชันอนุพันธ์ของ x ดังนั้นตามทฤษฎีบท $y = f(u)$ ในกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ \text{จะได้ } \frac{d}{dx} f(u) &= f'(u) \frac{du}{dx} \\ \text{และถ้า } f(u) &= u^n \text{ ดังนั้น} \\ \frac{d}{dx} u^n &= nu^{n-1} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

59

ตัวอย่างที่ 8

(a) จงหาความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y = \sin^5 x$ ที่จุด $x = \pi/3$

อนุพันธ์ฟังก์ชันเพื่อหาความชันจะได้

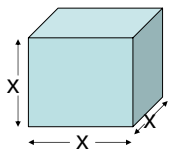
(b) จงแสดงให้เห็นว่าความชันทุกเส้นสัมผัสโค้ง $y = 1/(1-2x)^3$ มีค่าเป็นบวก

อนุพันธ์ฟังก์ชันเพื่อหาความชันจะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5 \sin^4 x \cdot \frac{d}{dx} \sin x \\ &= 5 \sin^4 x \cos x \\ \text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=\pi/3} &= 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{45}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (1-2x)^{-3} \\ &= -3(1-2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx} (1-2x) \\ &= -3(1-2x)^{-4} \cdot (-2) \\ &= \frac{6}{(1-2x)^4} \end{aligned}$$

60



ก้อนน้ำแข็งละลาย

โดยมีเงื่อนไขว่า ที่ $t = 0$, $V = V_0$

$t = 1$, $V = (3/4)V_0$

หรือละลายไป $1/4 V_0$

ปริมาตร $V = x^3 \Rightarrow x = V^{1/3}$

พื้นที่ผิว $S = 6x^2$

ความสัมพันธ์ของการละลายขึ้นกับค่าคงที่ $k \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -kS$

แทนค่า $\frac{d(x^3)}{dt} = -k(6x^2) \Rightarrow 3x^2 \frac{dx}{dt} = -k(6x^2)$

หรือ $\frac{dx}{dt} = -2k \Rightarrow \int_{x_0}^{x_t} dx = -2k \int_0^t dt \Rightarrow x_t - x_0 = -2kt + c$

จากเงื่อนไขที่ว่า $t = 0$, $V = V_0$ แทนค่า $c = 0$

61

$$t=1, V = (3/4)V_0 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}V_t\right)^{\frac{1}{3}} - V_0^{\frac{1}{3}} = -2k$$

$$k = \frac{\left(\frac{3}{4}V_0\right)^{\frac{1}{3}} - V_0^{\frac{1}{3}}}{-2}$$

และหา $t = ?$, $V = 0$ แทนค่า

$$0 - V_0^{\frac{1}{3}} = -\frac{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - (1)\right)V_0^{\frac{1}{3}}}{-2} t$$

$$t = -\frac{1}{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - (1)\right)} \text{ หรือ } t = \frac{1}{(1 - 0.91)} = 11 \text{ ชั่วโมง}$$

62

2.6

Implicit Differentiation

การหาอนุพันธ์โดยปริยาย

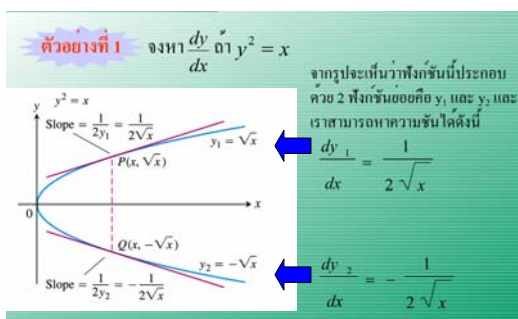
63

2.6 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit differentiation)

Implicitly defined functions

ด้วยการให้ y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x และอนุพันธ์ทั้งสองด้านของสมการเทียบกับ x ด้วยกฎต่าง ๆ แล้วหา $\frac{dy}{dx}$ ในเทอมของ x และ y ร่วมกันเพื่อหาสมการที่คำนวณความชันที่จุดใด ๆ (x, y) กระบวนการหา $\frac{dy}{dx}$ นี้เรียกว่า implicit differentiation

64



65

เราสามารถที่จะหา $\frac{dy}{dx}$ ด้วยวิธีปริยายด้วยการหาอนุพันธ์ทั้ง 2 ด้านของสมการเทียบกับ x ดังนี้

$$y^2 = x \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

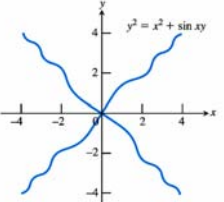
$$2y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{เมื่อแทน } y \text{ ด้วย } x \text{ จะได้} \quad \text{และ} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์เหมือนวิธีแรก

66

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y^2 = x^2 + \sin xy$



$$y^2 = x^2 + \sin xy$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy) \frac{d}{dx}(xy)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)(y + x \frac{dy}{dx})$$

$$(2y - x \cos xy) \frac{dy}{dx} = 2x + y \cos xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}$$

67

Derivatives of higher order

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $2x^3 - 3y^2 = 8$

อนุพันธ์อันดับ 1

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y}, y \neq 0$$

อนุพันธ์อันดับ 2

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2 y'}{y^2}$$

$$= \frac{2x}{y} - \frac{x^3}{y^2} \cdot y'$$

$$= \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}$$

68

Rational power of differentiable function

กฎยกกำลังสำหรับเลขยกกำลังตรรกยะ

ทฤษฎีบทที่ 4

ถ้า n เป็นเลขเศษส่วน แล้ว x^n หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดภายใน domain ของ x^{n-1} และ

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

69

ตัวอย่างที่ 6

(a) $\frac{d}{dx} (1-x^2)^{1/4} = \frac{1}{4} (1-x^2)^{-3/4} (-2x)$

$$= \frac{-x}{2(1-x^2)^{3/4}}$$

(b) $\frac{d}{dx} (\cos x)^{-1/5} = -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} (-\sin x)$

$$= \frac{1}{5} (\sin x)(\cos x)^{-6/5}$$

70

2.7

Related Rates

อัตราสัมพันธ์

71

2.7 Related rates

Related rate equations

สมมติว่าอนุภาค $P(x,y)$ กำลังเคลื่อนที่ไปตามโค้ง C โดยที่พิกัด x และ y จะเป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ของเวลา t ถ้า D คือระยะห่างจากจุดกำเนิด ด้วยกฎลูกโซ่ เราสามารถหาสมการที่สัมพันธ์กันของ dD/dt , dx/dt และ dy/dt ได้ดังนี้

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} (2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt})$$

72

ตัวอย่างที่ 1 ให้ cone มีรัศมี r ความสูง h เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ของ t และ V เป็นปริมาตรของ cone จงหาสมการที่สัมพันธ์กันของ dV/dt , dr/dt และ dh/dt

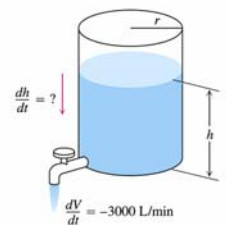
$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left(r^2 \cdot \frac{dh}{dt} + 2r \frac{dr}{dt} \cdot h \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt} \right)$$

73

ตัวอย่างที่ 2



V : liters
 r, h : mm

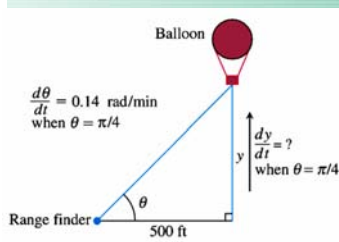
$$V = 1000\pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2} \text{ m/min}$$

74

ตัวอย่างที่ 3



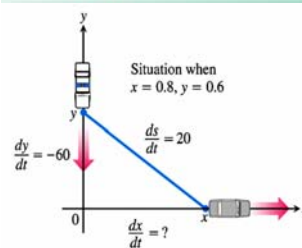
$$y = 500 \tan \theta$$

$$\frac{dy}{dt} = 500 (\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

$$= 500 (\sqrt{2}) (0.14) = 140 \text{ ft/min}$$

75

ตัวอย่างที่ 4



$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

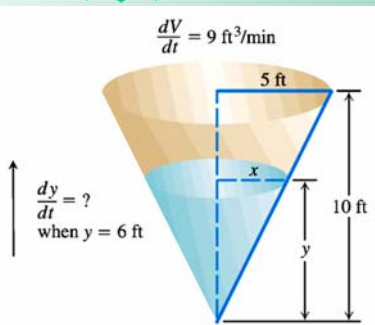
$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}} \left(0.8 \frac{dx}{dt} + 0.6(-60) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 70 \text{ mph}$$

76

ตัวอย่างที่ 5



$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

$$x = \frac{y}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 y = \frac{\pi}{12} y^3$$

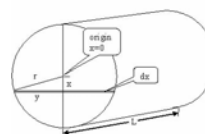
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt}$$

$$9 = \frac{\pi}{4} (6)^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \text{ ft/min}$$

77

การคำนวณหาปริมาตรของเหลวในถังทรงบอที่วางในแนวนอน



$$dV = 2yLdx$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}, -r \leq x \leq r$$

$$dV = 2L\sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\{V\}_{x_1}^{x_2} = 2L \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\text{Let } x = r \sin \theta \rightarrow dx = r \cos \theta d\theta$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int r \cos \theta \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int r^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \rightarrow \int r^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{r^2}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{r^2}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) = \frac{r^2}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta)$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \arcsin(x/r)$$

$$\{V\}_{x_1}^{x_2} = 2L \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - x^2} dx = L \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin(x/r) \right]_{x_1}^{x_2}$$