

บทที่ 5

Applications of Integrals

1

Chapter 5 : Applications of Integrals

- 5.1 Volumes by Slicing and Rotation About an Axis
- 5.2 Modeling Volume Using Cylindrical Shells
- 5.3 Lengths of Plane Curves

2

5.1

Volumes by Slicing and Rotation About an Axis

3

5.1 Volumes by slicing and rotation about an axis

เราสามารถใช้นิพจน์ของ Riemann sums หา

- volume of solids
- lengths of curves
- amount of work
- forces against floodgates
- coordinates of the points where solid objects balance

อย่างไรก็ตามในบทนี้เราจะหาเฉพาะปริมาตรของวัตถุทรงตันกับ
ความยาวของส่วนโค้งเท่านั้น

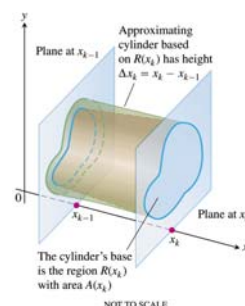
4

การหาปริมาตรด้วยการปาดเป็นชิ้นเล็กๆ (Volumes by slicing)

ถ้าเรามีวัตถุทรงตันวางอยู่ในช่วง $[a, b]$ โดยที่จุด x วัตถุจะมีรูปหน้าตัด $R(x)$ และมีพื้นที่หน้าตัด $A(x)$ และ A เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x ถ้าเราตัดวัตถุเป็นชิ้นบางๆหนา Δx ชิ้นของวัตถุจะเป็นรูปทรงกระบอกตันดังรูป

NOT TO SCALE

5



เราให้ระนาบของชิ้นที่ตัดนี้อยู่ที่ x_k และ x_{k-1}
ปริมาตรของชิ้นที่ตัดบางๆ นี้นคือ

$$V_k = A(x_k) \cdot \Delta x$$

ดังนั้นเมื่อเราหาปริมาตรของแต่ละชิ้น
บางๆ ที่เราตัดมาบวกกันเราจะได้ปริมาตร
ทั้งหมดของวัตถุทรงตัน นี้นคือ

$$\Sigma V_k = \Sigma A(x_k) \cdot \Delta x$$

นี่คือ Riemann sum

6

นิยาม การหาปริมาตรของรูปทรงตัน

ปริมาตรของรูปทรงตันของพื้นที่หน้าตัด $A(x)$ ที่ทราบขอบเขตจาก $x = a$ ถึง $x = b$ คือปริพันธ์ของ A จาก a ถึง b

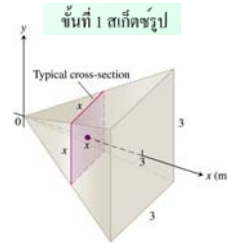
$$V = \int_a^b A(x) dx$$

เราจะหาปริมาตรโดยวิธี slicing ได้อย่างไร?

มีขั้นตอนการหาดังนี้

- Step 1: Sketch the solid and a typical cross section
- Step 2: Find a formula for $A(x)$
- Step 3: Find the limits of integration
- Step 4: Integrate $A(x)$ to find the volume

ตัวอย่างที่ 1 ปริมาตรสูง 3 เมตร มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีด้านยาว 3 เมตร รูปหน้าตัดของปริมาตรจะตั้งฉากกับแกนความสูงของปริมาตร โดยที่ระยะ x เมตร จากยอดของปริมาตร คำนวณหาปริมาตรของปริมาตร



ขั้นที่ 1 สเก็ตช์รูป

ขั้นที่ 2 หาสมการพื้นที่ $A(x)$

รูปหน้าตัดที่จุด x จากยอดปริมาตรเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตั้งฉากกับแกนความสูง พื้นที่หน้าตัดคือ

$$A(x) = x^2$$

ขั้นที่ 3 หาช่วงของการปริพันธ์
ช่วงคือ $0 \leq x \leq 3$

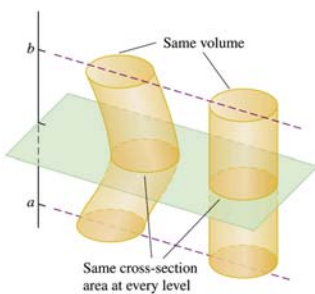
ขั้นที่ 4 ปริพันธ์หาปริมาตร $V = \int_0^3 A(x) dx$

$$= \int_0^3 x^2 dx = 9 \text{ m}^3$$

7

8

Cavalieri's Volume Theorem

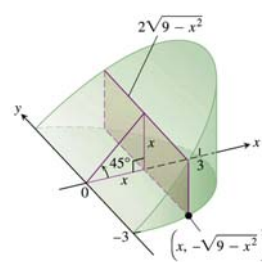


รูปทรงตันที่มีความสูงเท่ากันและมีพื้นที่หน้าตัดเหมือนกัน ณ ที่แต่ละความสูงจะมีปริมาตรเท่ากัน

9

ตัวอย่างที่ 2 ถังรูปโค้งถูกตัดตามรูปทรงกระบอกที่มีรัศมียาว 3 หน่วย โดยประกอบด้วย 2 ระบาย ระบายหนึ่งจะตั้งฉากกับแกนของรูปทรงกระบอก อีกระบายหนึ่งจะตั้งฉากกับระบายแรก ที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอกโดยทำมุม 45° กับระบายแรก จงหาปริมาตรของถัง

ขั้นที่ 1 สเก็ตช์รูป



ขั้นที่ 2 หาสมการพื้นที่ $A(x)$

หน้าตัดของถังตามแนวแกน x เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จุด x จากจุดกึ่งกลาง จะมีพื้นที่

$$A(x) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

ขั้นที่ 3 หาช่วงของการปริพันธ์
ช่วงคือ $0 \leq x \leq 3$

ขั้นที่ 4 ปริพันธ์หาปริมาตร

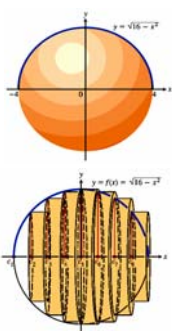
$$V = \int_0^3 A(x) dx$$

$$= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx$$

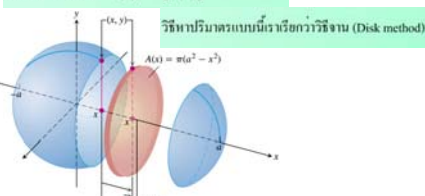
$$= 18 \text{ cubic unit}$$

การสร้างรูปทรงตันที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมโดยการหมุน

เราสามารถสร้างรูปทรงตันขึ้นมาโดยการหมุนระนาบของเส้นที่รอบแกนหมุนที่กำหนดไว้



จากรูปขอบเขตพื้นที่ที่คือพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \sqrt{16-x^2}$ กับแกน x เมื่อเราหมุนรอบนี้รอบแกน x 1 รอบ จะได้รูปทรงกลมตัน ถ้าเราตัดทรงกลมเป็นชิ้นเล็กๆ ที่จุด x จากจุดกึ่งกลางในระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x จะได้น้ำหนักเป็นรูปวงกลม โดยมีพื้นที่ $A(x) = \pi[R(x)]^2$

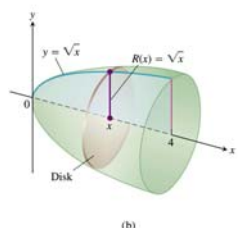
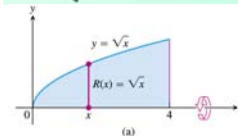


The sphere generated by rotating the circle $x^2 + y^2 = a^2$ about the y -axis. The radius is $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (Example 5).

11

ตัวอย่างที่ 3 ขอบเขตของพื้นที่ที่อยู่ระหว่างโค้ง

$y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$ และแกน x ถูกหมุนรอบแกน x เพื่อสร้างรูปทรงตัน จงหาปริมาตรของรูปทรงตันนี้



ขั้นที่ 1 สเก็ตช์รูป ดังแสดงในรูป (a) เมื่อหมุนรอบแกน x จะได้รูปทรงตันดังรูป (b)

ขั้นที่ 2 หาสมการพื้นที่ $A(x)$

หน้าตัดจะเป็นรูปจานวงกลม ที่จุด x จะมีรัศมี $\sqrt{x}$ และมีพื้นที่

$$A(x) = \pi[\sqrt{x}]^2$$

ขั้นที่ 3 หาช่วงของการปริพันธ์
ช่วงคือ $[0, 4]$

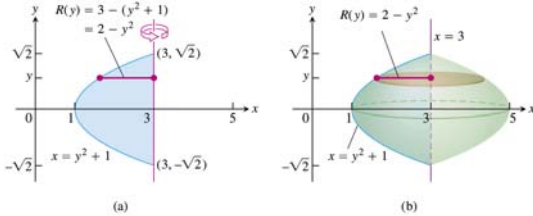
ขั้นที่ 4 ปริพันธ์หาปริมาตร

$$V = \int_0^4 \pi[R(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^4 \pi[x] dx$$

$$= 8\pi \text{ ล.บ. หน่วย}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ถูกสร้างขึ้นมาด้วยการหมุนรอบเส้นที่ระหว่างพาราโบลา $x = y^2 + 1$ และเส้น $x = 3$ รอบเส้น $x = 3$

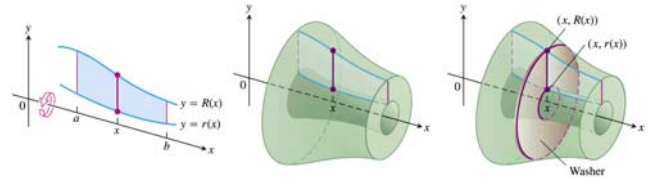


$$V = \int_a^b \pi [R(y)]^2 dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [2 - y^2]^2 dy$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] dy = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \text{ ลบ. หน่วย}$$

13

การสร้างรูปทรงตันที่มีหน้าตัดเป็นรูวงแหวนโดยการหมุน

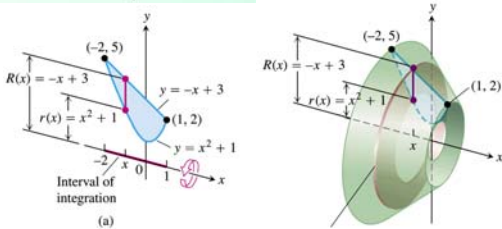


กรณีที่เราเลือกพื้นที่ที่ไม่ได้อยู่ที่จุดศูนย์กลางของการหมุน รูปหน้าตัดจะเป็นรูวงแหวน (washer) เมื่อหมุนรอบแกนหมุนที่กำหนดให้ ดังแสดงในรูป พื้นที่หน้าตัดที่จุด x คือ

$$A(x) = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

14

ตัวอย่างที่ 5 ขอบเขตพื้นที่ที่อยู่ระหว่างโค้ง $y = x^2 + 1$ และเส้น $y = -x + 3$ ถูกหมุนรอบแกน x เพื่อสร้างรูปทรงตัน จงหาปริมาตรของรูปทรงตันนี้



ดังนั้นปริมาตรคือ

$$V = \int_a^b \pi ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$

$$= \int_{-2}^1 \pi [(-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2] dx$$

$$= \int_{-2}^1 \pi (8 - 6x - x^2 - x^4) dx$$

$$= \frac{117\pi}{5} \text{ ลบ. หน่วย}$$

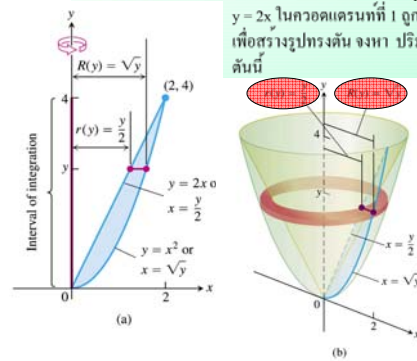
หาปริมาตรที่จุด x ใดๆ

$$R(x) = -x + 3$$

$$r(x) = x^2 + 1$$

15

ตัวอย่างที่ 6 ขอบเขตพื้นที่ที่อยู่รอบด้วยพาราโบลา $y = x^2$ และเส้น $y = 2x$ ในภาคที่หนึ่ง ถูกหมุนรอบแกน y เพื่อสร้างรูปทรงตัน จงหา ปริมาตรของรูปทรงตันนี้



หาปริมาตรที่จุด y ใดๆ

ดังนั้นปริมาตรคือ

$$V = \int_a^b \pi ([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy$$

$$= \int_0^4 \pi \left[\left(\sqrt{y} \right)^2 - \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right] dy$$

$$= \frac{8\pi}{3} \text{ ลบ. หน่วย}$$

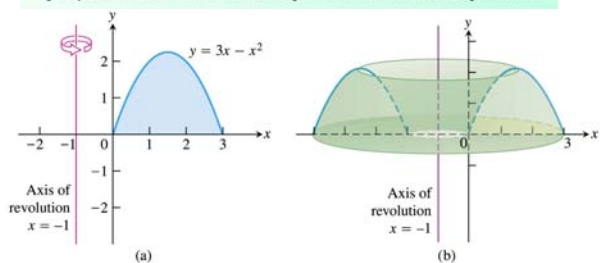
16

5.2 การจำลองปริมาตรโดยใช้เปลือกทรงกระบอก (Modeling Volume Using Cylindrical Shell)

ในกรณีที่แกนหมุนตั้งฉากกับแกนช่วงปริพันธ์ เราจะหาปริมาตรโดยผลรวมของ Thin Cylindrical Shell แทน เริ่มจากแกนจุดหมุนขยายออกไปรอบนอกคล้ายวงเปลือกไม้ วิธีหาปริมาตรแบบนี้เรียกว่าวิธีเปลือกทรงกระบอก (Cylindrical shell)

เพื่อให้เข้าใจวิธีการหาปริมาตรด้วยวิธีนี้ง่ายขึ้น เรามาดูตัวอย่างต่อไปนี้

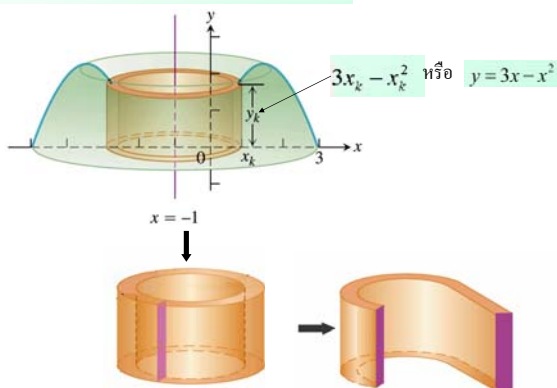
ตัวอย่างที่ 1 ขอบเขตพื้นที่ที่อยู่ระหว่างแกน x และพาราโบลา $y = 3x - x^2$ ถูกหมุนรอบแกน y ที่เส้น $x = -1$ เพื่อสร้างรูปทรงตัน จงหาปริมาตรของรูปทรงตันนี้



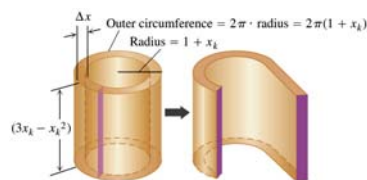
17

18

ขั้นที่ 1 ตัดรูปทรงตันออกเป็นชั้นรูปเปลือกทรงกระบอก



ขั้นที่ 2 คัดเปลือกทรงกระบอกด้านนอก



เมื่อเราเอากรวยใดตัดเปลือกทรงกระบอกออกก็จะกลายเป็นแท่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังรูป ปริมาตรของแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้คือ

$$\Delta V \approx 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x$$

$$h = (3x_k - x_k^2) \quad l = 2\pi(1 + x_k) \quad \Delta x = \text{thickness}$$

20

ขั้นที่ 3 รวมปริมาตรของแต่ละชั้นของเปลือกทรงกระบอก

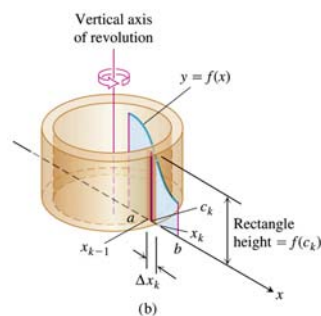
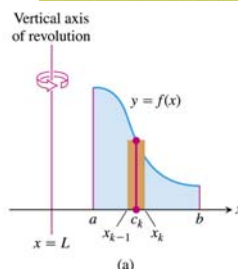
$$V \approx \sum 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x$$

ซึ่งเป็น Riemann sum ดังนั้นปริมาตรของวัตถุทรงตันนี้คือ

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(1 + x)(3x - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (2x^2 + 3x - x^3) dx \\ &= \frac{45\pi}{2} \text{ ลบ.หน่วย} \end{aligned}$$

21

สูตรของเปลือก (The shell Formula)



จากรูปเมื่อหมุนรอบแกน y ความสูงของเปลือกทรงกระบอก (b) เป็นไปตามฟังก์ชัน $y = f(x)$ และเปลือกชั้นนี้ตั้งอยู่ห่างจากจุดหมุน x (คือรัศมี (r) ของเปลือก) ดังนั้นปริมาตรของวัตถุทรงตันในช่วง [a, b] คือ

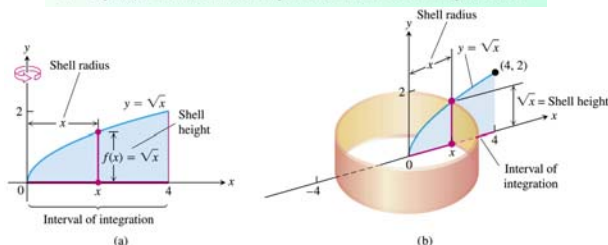
$$V = \int_a^b 2\pi r h dx$$

ทำนองเดียวกันเมื่อหมุนรอบแกน x จะได้

$$V = \int_c^d 2\pi r h dy$$

22

ตัวอย่างที่ 2 ขอบเขตพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยโค้ง $y = \sqrt{x}$ แกน x และเส้น $x = 4$ ถูกหมุนรอบแกน y เพื่อสร้างรูปทรงตัน จงหาปริมาตรของรูปทรงตันนี้

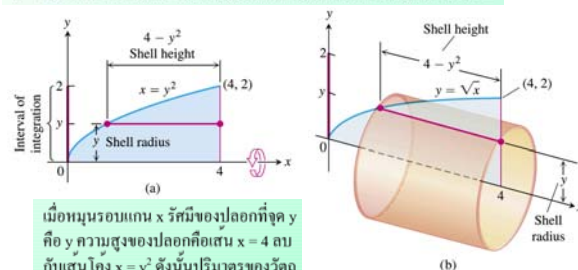


จากรูป รัศมีของเปลือกที่จุด x คือ ความสูงของเปลือกคือ $f(x)$ ดังนั้นปริมาตรของวัตถุทรงตันนี้คือ

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x}) dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx \\ &= \frac{128\pi}{5} \text{ ลบ.หน่วย} \end{aligned}$$

23

ตัวอย่างที่ 3 ขอบเขตพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยโค้ง $y = \sqrt{x}$ แกน x และเส้น $x = 4$ ถูกหมุนรอบแกน x เพื่อสร้างรูปทรงตัน จงหาปริมาตรของรูปทรงตันนี้



เมื่อหมุนรอบแกน x รัศมีของเปลือกที่จุด y คือ ความสูงของเปลือกคือเส้น $x = 4$ ลบกับเส้นโค้ง $x = y^2$ ดังนั้นปริมาตรของวัตถุทรงตันนี้คือ

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2) dy \\ &= 2\pi \int_0^2 (y)(4 - y^2) dy \\ &= 8\pi \text{ ลบ.หน่วย} \end{aligned}$$

24

5.3 ความยาวของเส้นโค้งระนาบ (Length of Plane Curves)



ถ้าคุณเป็นวิศวกรการทาง ต้องการวัดความยาวของถนนที่คดเคี้ยวไปมา คุณจะทำอย่างไร?

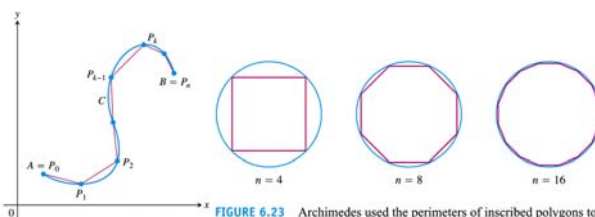
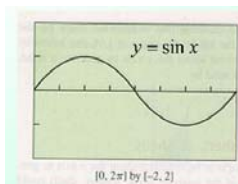


FIGURE 6.23 Archimedes used the perimeters of inscribed polygons to approximate the circumference of a circle. For $n = 96$ the approximation method gives $\pi \approx 3.14103$ as the circumference of the unit circle.

FIGURE 6.24 The curve C defined parametrically by the equations $x = f(t)$ and $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. The length of the curve from A to B is approximated by the sum of the lengths of the polygonal path (straight line segments) starting at $A = P_0$, then to P_1 , and so on, ending at $B = P_n$.

25

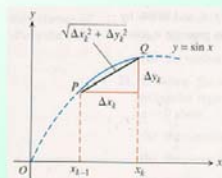
26



หรือถ้าต้องการหาความยาวของเส้นโค้ง $y = \sin x$ ในช่วง $[0, 2\pi]$ คุณจะหาได้อย่างไร?

คณิตศาสตร์ช่วยคุณได้แน่นอน

เราจะหาค่าโดยประมาณการปริพันธ์ โดยการแบ่งเส้นโค้ง ช่วง $[0, 2\pi]$ ออกเป็นส่วนเล็กๆ ในลักษณะที่ส่วนของเส้นโค้งที่แบ่งเข้าใกล้เส้นตรงมากที่สุดดังรูป



จากรูปความยาวโดยประมาณของส่วนโค้ง PQ คือ

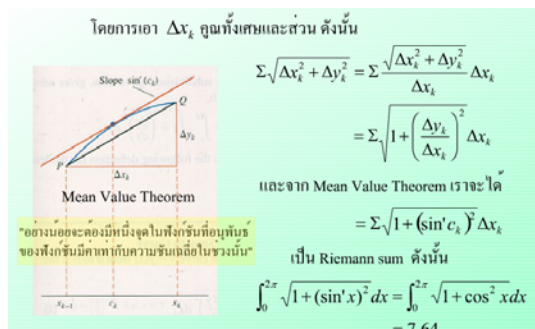
$$\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

ดังนั้นความยาวของส่วนโค้งทั้งหมดตลอดช่วงที่พิจารณา คือ

$$\sum \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

เราต้องทำให้ผลรวมนี้อยู่ในรูป Riemann sum ก่อนจึงจะปริพันธ์ได้

27



โดยการเอา Δx_k คูณทั้งเศษและส่วน ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} &= \sum \frac{\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}}{\Delta x_k} \Delta x_k \\ &= \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k \end{aligned}$$

และจาก Mean Value Theorem เราจะได้

$$= \sum \sqrt{1 + (\sin' c_k)^2} \Delta x_k$$

เป็น Riemann sum ดังนั้น

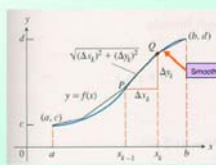
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\sin' x)^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 7.64$$

ความยาวของเส้นโค้ง $y = \sin x$ ช่วง $[0, 2\pi]$ คือ 7.64

28

ความยาวของโค้งเรียบ (Length of a smooth curve)

ฟังก์ชันจะต้องเป็น continuous first derivative ถึงจะมี ความเรียบเสมอ (smoothness)



ดังนั้นผลรวมในรูป Riemann sum คือ

$$\sum \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$$

เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ เราจะสามารถหาความยาวของส่วนโค้งได้ดังนี้

ถ้า f ราบเรียบในช่วง $[a, b]$ ความยาวของเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก a ถึง b คือ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

ถ้า g ราบเรียบในช่วง $[c, d]$ ความยาวของเส้นโค้ง $x = g(y)$ จาก c ถึง d คือ

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

29

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความยาวที่แท้จริงของโค้ง $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1$, $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2\sqrt{2}x^{1/2})^2} dx \\ &= \frac{13}{6} \end{aligned}$$

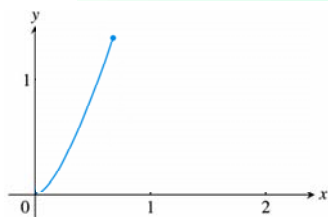
30

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความยาวของโค้ง $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$, $0 \leq x \leq 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3} \rightarrow \text{หาค่าไม่ได้ที่ } x=0$$

เราจึงลองเปลี่ยนแกนปริพันธ์เป็นแกน y และเปลี่ยนฟังก์ชันเป็น

$$x = 2y^{3/2}, \quad 0 \leq y \leq 1$$



$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (3y^{1/2})^2} dy \\ &= \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1) \approx 2.27 \end{aligned}$$

31

The short differential formula

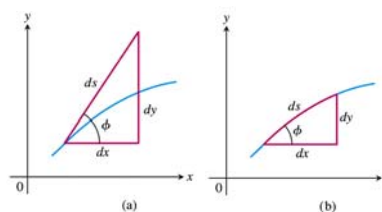
ถ้าเรานำ dx หรือ dy ซ้อนเข้าไปใน $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ หรือ $\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ เราจะได้สมการ differential เหมือนกันคือ

$$L = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

เราทำให้สั้นลงได้อีก

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$L = \int ds$$



32

Parametric formula for arc length

กรณีที่ dy/dx ไม่ต่อเนื่องเราสามารถหาความยาวของเส้นโค้งได้ด้วยวิธี parametrization

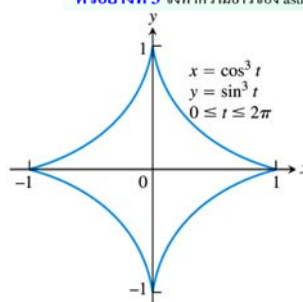
ถ้าเส้นโค้ง C สามารถแสดงในรูปสมการ parametric $x=f(t)$, $y=g(t)$ โดยที่ $\alpha \leq t \leq \beta$ ซึ่ง f' และ g' มีความต่อเนื่องและไม่เป็นศูนย์ในเวลาเดียวกันในช่วง จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

33

ตัวอย่างที่ 3 จงหาความยาวของ astroid

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ 0 &\leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$



$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (3\cos^2 t(-\sin t))^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (3\sin^2 t(\cos t))^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\cos t \sin t dt$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\text{ความยาวทั้งหมด} = 4(3/2) = 6$$

34