

บทที่ 6 Transcendental Functions 1	Chapter 6 : Transcendental Functions 6.1 Logarithms 6.2 Exponential Functions 6.3 Derivatives of Inverse Trigonometric Function; Integrals 6.4 Hyperbolic Functions 2
6.1 Logarithms 3	6.1 Logarithms The natural logarithm function นิยาม Natural logarithm function $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad x > 0$ 4
The figure shows a graph of the natural logarithm function $y = \ln x$ and its reciprocal $y = \frac{1}{x}$. The area under the curve $y = \frac{1}{t}$ from $t = 1$ to $t = x$ is shaded in blue. The area under the curve $y = \frac{1}{t}$ from $t = x$ to $t = 1$ is shaded in orange. The area under the curve $y = \frac{1}{t}$ from $t = 1$ to $t = 1$ is shaded in green. The area under the curve $y = \frac{1}{t}$ from $t = 1$ to $t = 1$ is shaded in green. อนุพันธ์ของ $y = \ln x$ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0$ อนุพันธ์อันดับ 1 เป็นบวก อนุพันธ์อันดับ 2 เป็นลบ (เว้าลง) 5	ถ้า u เป็นฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์ของ x และจาก Chain Rule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ให้ $y = \ln u$ $\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln u &= \frac{d}{du} \ln u \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \quad u > 0 \end{aligned}$ 6

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุพันธ์ของ natural logarithm

$$\frac{d}{dx} \ln 2x = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} (2x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3} \frac{d}{dx} (x^2 + 3) = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx} (ax) = \frac{1}{x}$$

7

กฎของ Logarithm
สำหรับค่า a ใดๆ ที่ $a > 0$ และ $x > 0$

- $\ln ax = \ln a + \ln x$
- $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
- $\ln x^n = n \ln x$

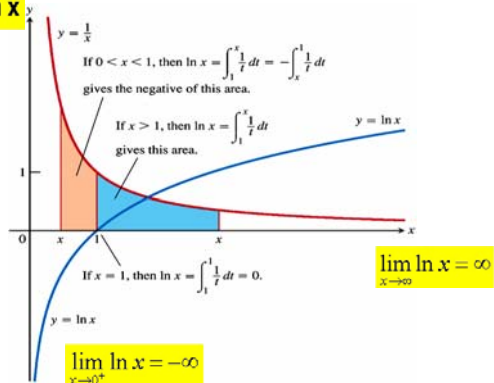
พิสูจน์ $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
จาก $\ln ax = \ln a + \ln x$
แทนที่ a ด้วย $1/x$
 $\ln 1/x + \ln x = \ln(1/x \cdot x)$
 $= \ln 1 = 0$
ดังนั้น $\ln(1/x) = -\ln x$
ถ้าแทนที่ x ด้วย $1/x$
 $\ln(a/x) = \ln a + \ln(1/x)$
 $= \ln a - \ln x$

พิสูจน์ $\ln ax = \ln a + \ln x$
 $\ln ax$ และ $\ln x$ มีอนุพันธ์เดียวกัน ดังนั้น
 $\ln ax = \ln x + C$
 $\ln(a \cdot 1) = \ln 1 + C$
 $C = \ln a$
 $\ln ax = \ln a + \ln x$

พิสูจน์ $\ln x^n = n \ln x$
 $\frac{d}{dx} \ln x^n = \frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} (x^n)$
 $= \frac{1}{x^n} nx^{n-1}$
 $= n \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} (n \ln x)$
 $\ln x^n = n \ln x + C$
 $\ln x^n = n \ln x \quad (C = 0)$

8

พิสัยของ $\ln x$



9

ปริพันธ์ $\int \left(\frac{1}{u} \right) du$

$$\int \left(\frac{1}{u} \right) du = \ln u + C \quad u > 0$$

$$\int \left(\frac{1}{-u} \right) d(-u) = \ln(-u) + C \quad u < 0$$

$$\int \left(\frac{1}{u} \right) du = \ln|u| + C$$

เราทราบว่า
 $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
ถ้า $n = -1$ จะอยู่ในรูป logarithm
 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

10

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2 - 5} dx = ?$$

ให้ $u = x^2 - 5, du = 2x dx$
 $u(0) = -5, u(2) = -1$

$$\int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{-5}^{-1} = -\ln 5$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4 \cos \theta}{3 + 2 \sin \theta} d\theta = ?$$

ให้ $u = 3 + 2 \sin \theta, du = 2 \cos \theta d\theta$
 $u(-\pi/2) = 1, u(\pi/2) = 5$

$$\int_1^5 \frac{2 du}{u} = 2 \ln|u| \Big|_1^5 = 2 \ln 5$$

ปริพันธ์ของ $\tan x$ และ $\cot x$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u}$$

ให้ $u = \cos x, du = -\sin x dx$

$$\int \tan x dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + C$$

$$= \ln|\sec x| + C$$

12

$$\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C$$

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, dx = ?$$

$$\text{ให้ } u = 2x, du = 2dx,$$

$$u(0) = 0, u(\pi/6) = \pi/3$$

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, dx = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|\sec u| \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2} \ln 2$$

13

Logarithmic differentiation

ทำสมาธิให้ถี่ถ้วนก่อนการหาอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 5 จงหา dy/dx ถ้า

$$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \quad x > 1$$

$$\ln y = \ln \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}$$

$$= \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln(x + 3) - \ln(x - 1)$$

14

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

15

อนุพันธ์ของ $\log_a u$

เปลี่ยนไปอยู่ในรูป natural logarithm ก่อน

$$\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln u}{\ln a} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} (\ln u)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (\log_{10} (3x + 1)) = ?$$

$$\frac{d}{dx} (\log_{10} (3x + 1)) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3x + 1} \cdot \frac{d}{dx} (3x + 1)$$

$$= \frac{3}{(\ln 10)(3x + 1)}$$

16

การปริพันธ์ที่มี $\log_a x$

เปลี่ยนไปอยู่ในรูป natural logarithm ก่อน

$$\int \frac{\log_2 x}{x} \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$$\text{ให้ } u = \ln x, du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \frac{\log_2 x}{x} \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int u \, du = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2 \ln 2} + C$$

17

6.2

Exponential function

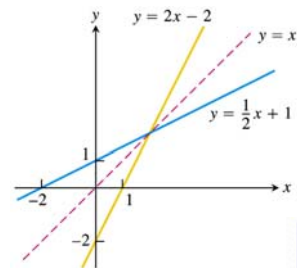
18

6.2 ฟังก์ชันยกกำลัง (Exponential Function)

อนุพันธ์ของค่าผกผันของฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์

$$\text{ให้ } f(x) = \frac{x}{2} + 1 \quad f^{-1}(x) = 2x - 2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2} \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 2$$



ความชันของเส้นตรงคู่ที่หักกัน
จะมีค่าเป็นส่วนกลับกันเสมอ

ความชันของกราฟจะมีค่าเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน

19

20

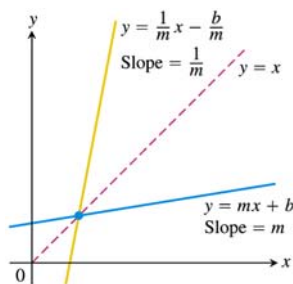
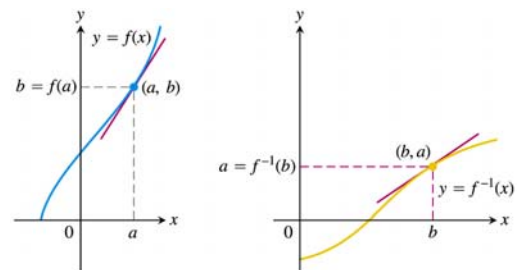


FIGURE 7.5 The slopes of nonvertical lines reflected through the line $y = x$ are reciprocals of each other.

21



The slopes are reciprocal: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ or $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

FIGURE 7.6 The graphs of inverse functions have reciprocal slopes at corresponding points.

22

ทฤษฎีบท 1 กฎการอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันผกผัน

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในช่วง I และ df/dx ไม่เป็น 0 ในช่วง I ดังนั้น f^{-1} จะหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในช่วง $f(I)$ ค่าของ df^{-1}/dx ที่จุดใด $f(a)$ จะเป็นส่วนกลับของค่าของ df/dx ที่ a นั่นคือ

$$\left(\frac{df^{-1}}{dx} \right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a}} \text{ or } (f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

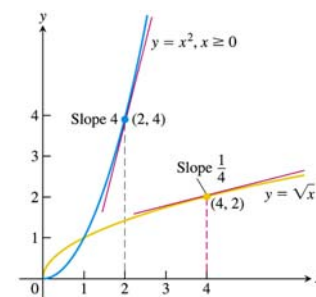


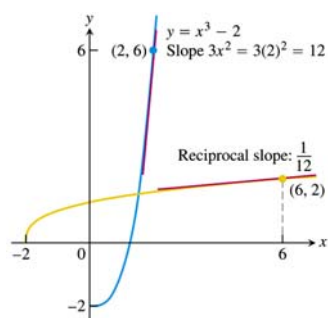
FIGURE 7.7 The derivative of $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ at the point $(4, 2)$ is the reciprocal of the derivative of $f(x) = x^2$ at $(2, 4)$ (Example 4).

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

23

24



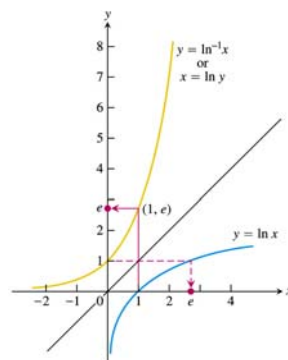
$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=2} = 3x^2 \Big|_{x=2} = 12$$

$$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12}$$

ไม่จำเป็นต้องรู้สมการก็หาความชันได้

25

The inverse of $\ln x$ and the number e



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln^{-1} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln^{-1} x = 0$$

$$e = \ln^{-1} 1$$

26

ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลธรรมชาติ $y = e^x$

สามารถยกกำลังได้

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = 1/e^2, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Take log ได้

$$\ln e^x = x \ln e = x$$

$$e^x = \ln^{-1} x$$

$$e^{\ln x} = x$$

27

อนุพันธ์และปริพันธ์ของ e^x

$$y = e^x$$

$$\ln y = x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

28

$$\frac{d}{dx} e^{-x} = e^{-x} \frac{d}{dx} (-x) = -e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \frac{d}{dx} (\sin x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

ปริพันธ์

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/2} = e - 1$$

29

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้ปัญหากำหนดเริ่มต้นต่อไปนี้

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2x, \quad x > \sqrt{3}, \quad y(2) = 0$$

ปริพันธ์ทั้งสองข้าง

$$e^y = x^2 + C$$

$$C = e^0 - (2)^2 = -3$$

$$e^y = x^2 - 3$$

$$\ln e^y = \ln(x^2 - 3)$$

$$y = \ln(x^2 - 3)$$

จะเป็นจริงเมื่อ $x > \sqrt{3}$

ตรวจสอบ

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^{\ln(x^2-3)} \frac{d}{dx} \ln(x^2-3)$$

$$= (x^2-3) \frac{2x}{(x^2-3)} = 2x$$

ค่า e ในรูปลิมิต

ทฤษฎีบท 2 ค่า e ในรูปลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

พิสูจน์

ถ้า $f(x) = \ln x$ ดังนั้น $f'(x) = 1/x$ ฉะนั้น

$$f'(1) = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right] \\ \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right] &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} &= e \end{aligned}$$

31

X	Y	
1.	2.	
0.1	2.59374	
0.01	2.70481	
0.001	2.71692	
0.0001	2.71815	
0.00001	2.71827	
0.000001	2.71828	
$Y_1 = (1 + X)^{(1/X)}$		

32

ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียลทั่วไป a^x

นิยาม General exponential functions

สำหรับค่า a และ x ใดๆ ที่ $a > 0$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32$$

$$2^\pi = e^{\pi \ln 2} \approx e^{2.18} \approx 8.8$$

33

กฎการยกกำลัง (รูปแบบสุดท้าย)

$$x^n = e^{n \ln x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= \frac{d}{dx} e^{n \ln x} \\ &= e^{n \ln x} \frac{d}{dx} (n \ln x) \\ &= x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

34

การอนุพันธ์และปริพันธ์ของ a^u

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx} e^{x \ln a} \\ &= e^{x \ln a} \cdot \ln a \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

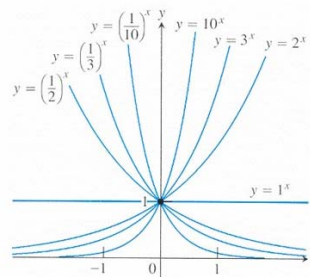
ตัวอย่าง

$$\frac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3$$

$$\frac{d}{dx} 3^{-x} = 3^{-x} \ln 3 \frac{d}{dx} (-x) = -3^{-x} \ln 3$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 3^{\sin x} &= 3^{\sin x} \ln 3 \frac{d}{dx} (\sin x) \\ &= 3^{\sin x} (\ln 3) \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a^u &= a^u \ln a \frac{du}{dx} \\ \frac{d^2}{dx^2} (a^x) &= \frac{d}{dx} (a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x \end{aligned}$$



36

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} a^u &= a^u \ln a \frac{du}{dx} \\ a^u \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} a^u \\ \int a^u \frac{du}{dx} dx &= \int \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} (a^u) dx \\ &= \frac{1}{\ln a} \int \frac{d}{dx} (a^u) dx = \frac{1}{\ln a} a^u + C \\ \boxed{\int a^u du &= \frac{a^u}{\ln a} + C}\end{aligned}$$

37

$$\begin{aligned}\int 2^x dx &= \frac{2^x}{\ln 2} + C \\ \int 2^{\sin x} \cos x dx &= \int 2^u du \\ (u = \sin x, du &= \cos x dx) \\ &= \frac{2^u}{\ln 2} + C \\ &= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C\end{aligned}$$

38

6.3

Derivatives of Inverse Trigonometric Function; Integrals

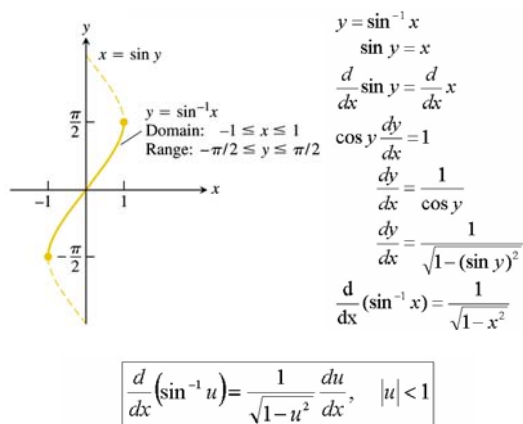
6.3 อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

อนุพันธ์ของ arcsine

$x = \sin y$ หาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด $-\pi/2 < y < \pi/2$
 $y = \sin^{-1} x$ หาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด $-1 < x < 1$

39

40



41

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1}$$

ตัวอย่างที่ 1

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \frac{d}{dx} x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

42

อนุพันธ์ของ arctangent

$$\begin{aligned}
 y &= \tan^{-1} x \\
 \tan y &= x \\
 \frac{d}{dx} \tan y &= \frac{d}{dx} x \\
 \sec^2 y \frac{dy}{dx} &= 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \\
 &= \frac{1}{1 + (\tan y)^2} \\
 &= \frac{1}{1 + x^2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}}$$

43

ตัวอย่างที่ 2 อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามแกน x โดยตำแหน่งของมันที่เวลา t ใดๆ ซึ่ง $t \geq 0$ คือ $x(t) = \tan^{-1} \sqrt{t}$ จงหาความเร็วของอนุภาคที่ $t = 16$

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{d}{dt} \tan^{-1} \sqrt{t} = \frac{1}{1 + (\sqrt{t})^2} \frac{d}{dt} \sqrt{t} \\
 &= \frac{1}{1 + t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \\
 v(16) &= \frac{1}{1 + 16} \cdot \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{136}
 \end{aligned}$$

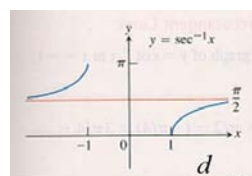
44

อนุพันธ์ของ arcsecant

$$\begin{aligned}
 y &= \sec^{-1} x \\
 \sec y &= x \\
 \frac{d}{dx} \sec y &= \frac{d}{dx} x \\
 \sec y \tan y \frac{dy}{dx} &= 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan y &= \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} \\
 &= \pm \sqrt{x^2 - 1} \\
 \frac{dy}{dx} &= \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

45



$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \\
 \frac{d}{dx} \sec^{-1} x &= \pm \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \\
 \boxed{\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \pm \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1}
 \end{aligned}$$

46

ตัวอย่างที่ 3

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2 - 1}} \frac{d}{dx} (5x^4) \\
 &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8 - 1}} (20x^3) \\
 &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8 - 1}}
 \end{aligned}$$

47

อนุพันธ์อื่นๆ อีก 3 ฟังก์ชัน

Inverse Function-Inverse Cofunction Identities

$$\begin{aligned}
 \cos^{-1} x &= \pi/2 - \sin^{-1} x & \frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} &= -\frac{du/dx}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad |u| < 1 \\
 \cot^{-1} x &= \pi/2 - \tan^{-1} x & \frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} &= -\frac{du/dx}{1 + u^2} \\
 \csc^{-1} x &= \pi/2 - \sec^{-1} x & \frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} &= \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1
 \end{aligned}$$

48

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการเส้นสัมผัสของกราฟ

$$y = \cot^{-1} x \text{ ที่ } x = -1$$

$$\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x$$

$$\begin{aligned} \cot^{-1}(-1) &= \pi/2 - \tan^{-1}(-1) \\ &= \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = -\left. \frac{1}{1+x^2} \right|_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 3\pi/4 = (-1/2)(x+1)$$

49

ท่องจำด้วยความเข้าใจ

$$1. \frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$2. \frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$3. \frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$4. \frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{1+u^2}$$

$$5. \frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

$$6. \frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = -\frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

50

สูตรการปริพันธ์

The following formulas hold for any constant $a \neq 0$.

$$1. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (\text{Valid for } u^2 < a^2)$$

$$2. \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (\text{Valid for all } u)$$

$$3. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \quad (\text{Valid for } u^2 > a^2)$$

51

ตัวอย่างที่ 5

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{12}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \pi/4$$

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x \Big|_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \pi/12$$

52

ตัวอย่างที่ 6

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \\ &= \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

53

ตัวอย่างที่ 7

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2-2)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(u/a) + C \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C \end{aligned}$$

54

ตัวอย่างที่ 8

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2} &= \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) + C\end{aligned}$$

55

ตัวอย่างที่ 9

$$\begin{aligned}(u = e^x, \ln u = x, du/u = dx) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}} &= \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} \\ &= \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C\end{aligned}$$

56

6.4

Hyperbolic Functions

6.7 Hyperbolic Functions

ฟังก์ชัน f ที่อยู่บนช่วงที่กำหนดและตรงกลางของฟังก์ชันอยู่ที่จุดกำเนิดสามารถเขียนได้ว่า

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{even part}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{odd part}}$$

หรือ

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{Hyperbolic cosine ของ } x} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{Hyperbolic sine ของ } x}$$

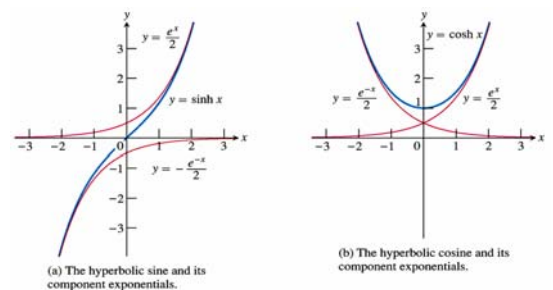
57

58

$$\begin{aligned}\text{Hyperbolic cosine of } x: \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{Hyperbolic sine of } x: \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \text{Hyperbolic tangent: } \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \text{Hyperbolic cotangent: } \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ \text{Hyperbolic secant: } \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ \text{Hyperbolic cosecant: } \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}\end{aligned}$$

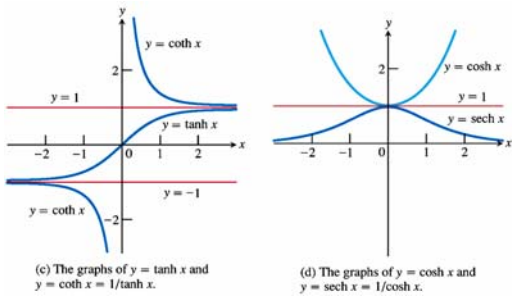
59

กราฟของฟังก์ชัน $\sinh x$ และ $\cosh x$



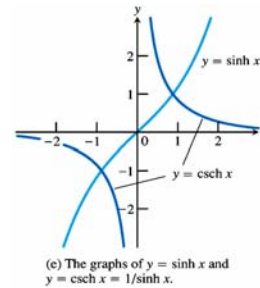
60

กราฟของฟังก์ชัน $\tanh x$, $\coth x$ และ $\operatorname{sech} x$



1

กราฟของฟังก์ชัน $\operatorname{csch} x$



62

เอกลักษณ์ของ Hyperbolic Function

$$\begin{aligned}\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \cosh^2 x &= \frac{\cosh 2x + 1}{2} \\ \sinh^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2} \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \tanh^2 x &= 1 - \operatorname{sech}^2 x \\ \coth^2 x &= 1 + \operatorname{csch}^2 x\end{aligned}$$

63

อนุพันธ์ของ Hyperbolic Function

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh u) &= \cosh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\cosh u) &= \sinh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\tanh u) &= \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\coth u) &= -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) &= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

64

ปริพันธ์ของ Hyperbolic Function

$$\begin{aligned}\int \sinh u \, du &= \cosh u + C \\ \int \cosh u \, du &= \sinh u + C \\ \int \operatorname{sech}^2 u \, du &= \tanh u + C \\ \int \operatorname{csch}^2 u \, du &= -\coth u + C \\ \int \operatorname{sech} u \tanh u \, du &= -\operatorname{sech} u + C \\ \int \operatorname{csch} u \coth u \, du &= -\operatorname{csch} u + C\end{aligned}$$

65

ตัวอย่างที่ 1 การหาอนุพันธ์และปริพันธ์

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\tanh \sqrt{1+t^2}) &= \sec^2 h \sqrt{1+t^2} \frac{d}{dt}(\sqrt{1+t^2}) \\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \sec^2 h \sqrt{1+t^2} \\ \int \coth 5x \, dx &= \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{5} \ln |u| + C = \frac{1}{5} \ln |\sinh 5x| + C\end{aligned}$$

66

$$\int_0^1 \sinh^2 x dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\cosh 2x - 1) dx$$

$$= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672$$

$$\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2) dx$$

$$\approx 1.6137$$

67

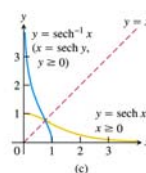
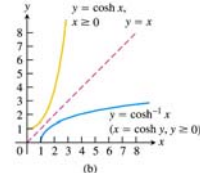
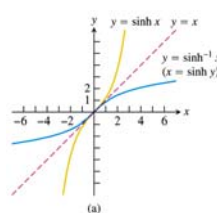
ฟังก์ชัน Hyperbolic ผกผัน

ในการหาปริพันธ์เราจะใช้ 6 basic Hyperbolic Functions

$$y = \sinh^{-1} x$$

$$y = \cosh^{-1} x$$

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$



(a)

(b)

(c)

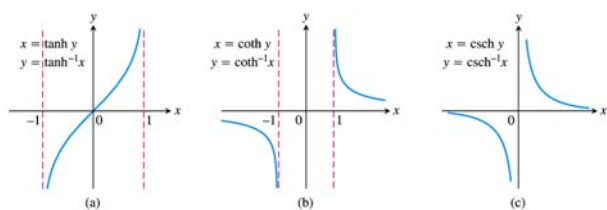
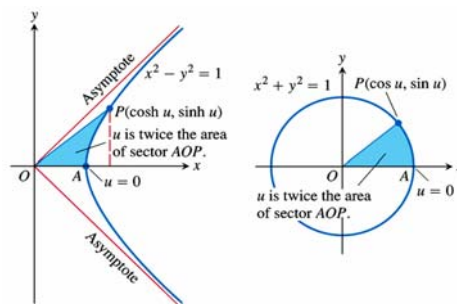


FIGURE 7.33 The graphs of the inverse hyperbolic tangent, cotangent, and cosecant of x .

69

เปรียบเทียบ hyperbolic กับ Trigonometric Functions ด้วย
แผนภาพ



70

เอกลักษณ์ของ Hyperbolic Function

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

71

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน Hyperbolic ผกผัน

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \quad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \quad u \neq 0$$

72

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่าถ้า u เป็นฟังก์ชันเชิง
อนุพันธ์ของ x ซึ่งมีค่ามากกว่า 1 แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) &= \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \\ y &= \cosh^{-1} x \\ x &= \cosh y \\ 1 &= \sinh y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\end{aligned}$$

73

สูตรปริพันธ์ของ Hyperbolic ผกผัน

- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad a > 0$
- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad u > a > 0$
- $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C & \text{if } u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C & \text{if } u^2 > a^2 \end{cases}$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad 0 < u < a$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C, \quad u \neq 0$

74

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}$

$$\begin{aligned}(u &= 2x, du = 2dx, a = \sqrt{3}) \\ \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) \Big|_0^1 \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 \approx 0.98665\end{aligned}$$

75