

บทที่ 7 Integration Techniques, L'Hopital's Rule, and Improper Integrals 1	Chapter 7 : Integration Techniques, L'Hopital's Rule, and Improper Integrals 7.1 Basic Integration Formulas 7.2 Integration by Parts 7.3 Partial Fractions 7.4 Trigonometric Substitutions 7.5 L'Hopital's Rule 7.6 Improper Integrals 2																								
7.1 Basic Integration Formulas 3	7.1 Basic Integration Formulas TABLE 8.1 Basic integration formulas <table> <tr> <td>1. $\int du = u + C$</td><td>13. $\int \cot u \, du = \ln \sin u + C$ $= -\ln \csc u + C$</td></tr> <tr> <td>2. $\int k \, du = ku + C$ (any number k)</td><td>14. $\int e^u \, du = e^u + C$</td></tr> <tr> <td>3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$</td><td>15. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)</td></tr> <tr> <td>4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)</td><td>16. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$</td></tr> <tr> <td>5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$</td><td>17. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$</td></tr> <tr> <td>6. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$</td><td>18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$</td></tr> <tr> <td>7. $\int \cos u \, du = \sin u + C$</td><td>19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$</td></tr> <tr> <td>8. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$</td><td>20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left \frac{u}{a} \right + C$</td></tr> <tr> <td>9. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$</td><td>21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ ($a > 0$)</td></tr> <tr> <td>10. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$</td><td>22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ ($u > a > 0$)</td></tr> <tr> <td>11. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$</td><td></td></tr> <tr> <td>12. $\int \tan u \, du = -\ln \cos u + C$ $= \ln \sec u + C$</td><td></td></tr> </table> 6	1. $\int du = u + C$	13. $\int \cot u \, du = \ln \sin u + C$ $= -\ln \csc u + C$	2. $\int k \, du = ku + C$ (any number k)	14. $\int e^u \, du = e^u + C$	3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$	15. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)	4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)	16. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$	5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	17. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$	6. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$	7. $\int \cos u \, du = \sin u + C$	19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$	8. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$	20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left \frac{u}{a} \right + C$	9. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$	21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ ($a > 0$)	10. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$	22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ ($u > a > 0$)	11. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$		12. $\int \tan u \, du = -\ln \cos u + C$ $= \ln \sec u + C$	
1. $\int du = u + C$	13. $\int \cot u \, du = \ln \sin u + C$ $= -\ln \csc u + C$																								
2. $\int k \, du = ku + C$ (any number k)	14. $\int e^u \, du = e^u + C$																								
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$	15. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)																								
4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)	16. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$																								
5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	17. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$																								
6. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$																								
7. $\int \cos u \, du = \sin u + C$	19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$																								
8. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$	20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left \frac{u}{a} \right + C$																								
9. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$	21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ ($a > 0$)																								
10. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$	22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ ($u > a > 0$)																								
11. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$																									
12. $\int \tan u \, du = -\ln \cos u + C$ $= \ln \sec u + C$																									
Algebraic procedures บางทีอาจจะต้องเขียนใหม่เพื่อให้สอดคล้องกับสูตรมาตรฐาน ตัวอย่างที่ 1 Making a simplifying substitution จงหาค่า $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx$ $[u = x^2 - 9x + 1, du = (2x - 9)dx]$ $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}}$ $= \int u^{-1/2} du$ $= 2u^{1/2} + C$ $= 2\sqrt{x^2 - 9x + 1} + C$ 5	ตัวอย่างที่ 2 Completing the square จงหาค่า $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$ $[8x - x^2 = 16 - (x-4)^2]$ $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}}$ $[u = x-4, du = dx]$ $= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ $= \sin^{-1} \left(\frac{x-4}{4} \right) + C$ 6																								

ตัวอย่างที่ 3 Expanding a power and using a trigonometric identity

$$\begin{aligned}\text{จงหา } \int (\sec x + \tan x)^2 dx \\ (\sec x + \tan x)^2 &= \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x \\ \tan^2 x &= \sec^2 x - 1 \\ \int (\sec x + \tan x)^2 dx &= \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \sec^2 x - 1) dx \\ &= 2 \int \sec^2 x dx + 2 \int \sec x \tan x dx - \int dx \\ &= 2 \tan x + 2 \sec x - x + C\end{aligned}$$

7

ตัวอย่างที่ 4 Eliminating a square root

$$\begin{aligned}\text{จงหา } \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x} dx \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ 1 + \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta \\ 1 + \cos 4x &= 2 \cos^2 2x \\ \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x} dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2} \sqrt{\cos^2 2x} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

8

ตัวอย่างที่ 5 Reducing an improper function

$$\begin{aligned}\text{จงหา } \int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} dx \\ \left[\frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \frac{6}{3x + 2} \right] \\ \int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} dx = \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x + 2} \right) dx \\ = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|3x + 2| + C\end{aligned}$$

9

ตัวอย่างที่ 6 Separating a fraction

$$\begin{aligned}\text{จงหา } \int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ \int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ = -3\sqrt{1 - x^2} + 2 \sin^{-1} x + C\end{aligned}$$

10

ตัวอย่างที่ 7 Multiplying by a form of 1

$$\begin{aligned}\text{จงหา } \int \sec x dx \\ \int \sec x dx = \int \sec x(1) dx \\ = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ [u = \sec x + \tan x, du = (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx] \\ = \int \frac{du}{u} \\ = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ 1. \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C \\ 2. \int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C\end{aligned}$$

11

7.2

Integration by Parts

12

7.2 Integration by parts

$$\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

Product rule in integral form

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

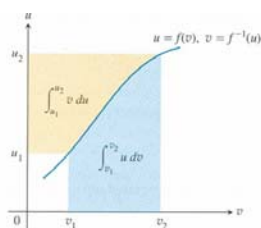
13

$$\begin{aligned}\int \left(u \frac{dv}{dx}\right) dx &= \int \left(\frac{d}{dx}(uv)\right) dx - \int \left(v \frac{du}{dx}\right) dx \\ &= uv - \int \left(v \frac{du}{dx}\right) dx\end{aligned}$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$\boxed{\int_{v_1}^{v_2} u dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v du}$$

14



$$\int_{v_1}^{v_2} u dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v du$$

15

ตัวอย่างที่ 1 Using Integration by Parts

จงหา $\int x \cos x dx$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$[u = x, du = dx]$$

$$[dv = \cos x dx, v = \sin x]$$

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

16

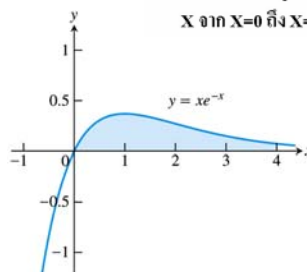
สรุป เราจะต้องแยก $u dv$ ออกเป็น 2 ส่วนโดยมีหลักการแยกว่า

1. ส่วนที่เป็น dv จะต้องปริพันธ์ได้
2. $\int v du$ จะต้องเป็นเทอมที่สามารถปริพันธ์ได้ง่ายกว่า $\int u dv$

17

ตัวอย่างที่ 3 Finding Area

จงหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างโค้ง $y = xe^{-x}$ และแกน X จาก $X=0$ ถึง $X=4$



$$\text{area} = \int_0^4 x e^{-x} dx$$

$$[u = x, du = dx]$$

$$[dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x}]$$

$$\begin{aligned}x e^{-x} dx &= -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + C \\ &= [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^4 \\ &= 1 - 5e^{-4} \approx 0.91\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 Integral of the Natural Logarithm

จงหา $\int \ln x dx$
 $[u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx]$
 $[dv = dx, v = x]$
 $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$
 $= x \ln x - x + C$

19

Repeated use

ถ้าหาก $\int v du$ ยังไม่สามารถจะปริพันธ์ได้ทันที เรา
 จะต้องดำเนินการแยก $u dv$ ออกเป็นสองส่วนซ้ำ
 วิธีการเดิมอีกจนกว่าจะได้ผลลัพธ์ออกมา

20

ตัวอย่างที่ 5 Repeated use of integration by parts

จงหา $\int x^2 e^x dx$
 $[u = x^2, du = 2x dx]$
 $[dv = e^x dx, v = e^x]$
 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$
 $[u = x, du = dx]$
 $[dv = e^x dx, v = e^x]$
 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$
 $= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

21

Solving for the unknown integral

ตัวอย่างที่ 6

จงหา $\int e^x \cos x dx$
 $[u = e^x, du = e^x dx]$
 $[dv = \cos x dx, v = \sin x]$
 $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$
 $[u = e^x, du = e^x dx]$
 $[dv = \sin x dx, v = -\cos x]$

22

$\int e^x \cos x dx$
 $= e^x \sin x - (-e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx)$
 $= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$
 $2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C$
 $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x + C}{2}$

23

Tabular integration

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\int x^2 e^x dx$

$[f(x) = x^2, g(x) = e^x]$
 อนุพันธ์ ปริพันธ์
 x^2 (+) e^x
 $2x$ (-) e^x
 2 (+) e^x
 0 e^x

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

24

ตัวอย่างที่ 8 จงหา $\int x^3 \sin x dx$

$$[f(x) = x^3, g(x) = \sin x]$$

อนุพันธ์		ปริพันธ์
x^3	(+)	$\sin x$
$3x^2$	(-)	$-\cos x$
$6x$	(+)	$-\sin x$
6	(-)	$\cos x$
0		$\sin x$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

25

7.3

Partial Fractions

26

7.3 Method of Partial Fractions (f(x)/g(x) Proper)

ขั้นที่ 1: ให้ $x-r$ เป็น linear factor ของ $g(x)$ สมมติให้ $(x-r)^m$ คือยกกำลังสูงสุดของ $x-r$ ที่หาร $g(x)$ ได้ ดังนั้นเขียนในรูปผลรวมทั้งหมด m เทอม

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

ขั้นที่ 2: ให้ x^2+px+q เป็น quadratic factor ของ $g(x)$ สมมติให้ $(x^2+px+q)^n$ คือยกกำลังสูงสุดของ factor นี้ที่หาร $g(x)$ ได้ ดังนั้นเขียนในรูปผลรวมทั้งหมด n เทอม

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

ขั้นที่ 3: ให้ $f(x)/g(x)$ เท่ากับผลรวมของเทอมข้างจัด เทอมส่วนแล้วเรียงตามเลขยกกำลังของ x จากมากไปหาน้อย

ขั้นที่ 4 แก้สมการหาค่า A, B, C

27

7.3 Partial Fractions

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} \rightarrow \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \int \frac{2}{x+1} + \int \frac{3}{x-3}$$

28

ตัวอย่างที่ 1 Using Partial Fractions

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$$

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x - 3A + B$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad A+B &= 5 \\ -3A+B &= -3 \\ A+2B &= 3 \end{aligned}$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-3| + C$$

29

General description of the method

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ที่อยู่ในรูป sum of partial fractions จะต้อง

1. เลขยกกำลังของ $f(x)$ จะต้องน้อยกว่า $g(x)$ (proper function) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$
2. ต้องทราบตัวประกอบของ $g(x)$

$$x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$$

30

ตัวอย่างที่ 2 Using a repeated linear factor

จงแยกเศษส่วน $\frac{6x+7}{(x+2)^2}$

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$6x+7 = (x+2)A + B$$

$$= Ax + (2A+B)$$

$$A=6, \quad 2A+B=7$$

$$B=-5$$

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$$

31

ตัวอย่างที่ 3 Using partial fractions

จงหา $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2} dx$

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} \right) dx$$

32

ตัวอย่างที่ 4 Integrating an improper fraction

จงหา $\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} dx$

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$$

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} dx = \int 2x dx + \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$$

$$= x^2 + 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-3| + C$$

33

ตัวอย่างที่ 5 Solving an initial value problem

จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx} = 2xy(y^2+1)$
โดยที่ $y(0) = 1$

$$\frac{1}{y(y^2+1)} dy = 2x dx$$

$$\int \frac{1}{y(y^2+1)} dy = \int 2x dx = x^2 + C_1$$

$$\frac{1}{y(y^2+1)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1}$$

$$A=1, B=-1, C=0$$

$$\int \frac{1}{y(y^2+1)} dy = \int \frac{1}{y} dy - \int \frac{y}{y^2+1} dy$$

$$= \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y^2+1| + C_2$$

$$\ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y^2+1| = x^2 + C$$

$$x=0, y=1$$

$$C = -\ln \sqrt{2}$$

$$\ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y^2+1| = x^2 - \ln \sqrt{2}$$

34

ตัวอย่างที่ 6 Integrating with an irreducible quadratic factor in the denominator

จงหา $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$A=2, B=1, C=-2, D=1$$

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

35

Heaviside Method

ขั้นที่ 3 เขียนผลรวมเศษส่วน

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x-r_n)}$$

ขั้นที่ 1: เขียน

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n)}$$

ขั้นที่ 2: หา factor ที่ละตัว

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\dots(r_1-r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\dots(r_2-r_n)}$$


$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\dots(r_n-r_{n-1})}$$

36

ตัวอย่างที่ 7 Using the Heaviside Method

จงหา A, B, และ C จาก

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

ถ้าเอา (x-1) คูณทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{(x-2)} + \frac{C(x-1)}{(x-3)}$$

ให้ x = 1

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} = A+0+0$$

$$A = 1$$

A ได้จากการปิด (x-1) ของเศษส่วน

37

$$A = \frac{(1)^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)} = 1$$

$$B = \frac{(2)^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)} = -5$$

$$C = \frac{(3)^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)} = 5$$

38

ตัวอย่างที่ 8 Integrating the Heaviside Method

จงหา $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} dx$

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}$$

$$r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = -5$$

$$A = \frac{0+4}{(x)(0-2)(0+5)} = -\frac{2}{5}$$

$$A_2 = \frac{2+4}{(2)(x-2)(2+5)} = \frac{3}{7}$$

$$A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2)(x+5)} = -\frac{1}{35}$$

39

$$\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}$$

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} dx$$

$$= -\frac{2}{5} \ln|x| + \frac{3}{7} \ln|x-2| - \frac{1}{35} \ln|x+5| + C$$

40

Other ways to determine the coefficients

- differentiation

- assign selected numerical values to x

ตัวอย่างที่ 9 Using differentiation

จงหา A, B, และ C จาก

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

แทนค่า x = -1 จะได้ C = -2 อนุพันธ์ทั้งสองด้านจะได้

$$1 = 2A(x+1) + B$$

แทนค่า x = -1 จะได้ B = 1 อนุพันธ์ทั้งสองด้านจะได้

$$2A = 0, A = 0$$

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}$$

41

ตัวอย่างที่ 10 Assigning numerical values to x

จงหา A, B, และ C จาก

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

แทนค่า x = 1 จะได้ A = 1

แทนค่า x = 2 จะได้ B = -5

แทนค่า x = 3 จะได้ C = 5

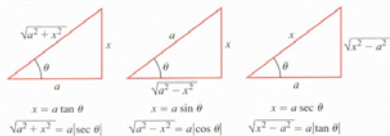
$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{(x-2)} + \frac{5}{(x-3)}$$

42

7.4 Trigonometric substitutions

การแทนที่ด้วยตรีโกณจะช่วยให้เราแทน binomial a^2+x^2 , a^2-x^2 , x^2-a^2 ด้วยค่าเดียว

Three basic substitutions



$$\begin{aligned} x &= a \tan \theta & x &= a \sin \theta & x &= a \sec \theta \\ \sqrt{a^2+x^2} &= a \sec \theta & \sqrt{a^2-x^2} &= a \cos \theta & \sqrt{x^2-a^2} &= a \tan \theta \end{aligned}$$

$$x = a \tan \theta$$

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2 \sec^2 \theta$$

Trigonometric Substitutions

1. $x = a \tan \theta$ replaces $a^2 + x^2$ by $a^2 \sec^2 \theta$.
2. $x = a \sin \theta$ replaces $a^2 - x^2$ by $a^2 \cos^2 \theta$.
3. $x = a \sec \theta$ replaces $x^2 - a^2$ by $a^2 \tan^2 \theta$.

43

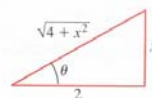
ตัวอย่างที่ 1 Using the substitution $x = a \tan \theta$

$$\text{จงหา } \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$x = 2 \tan \theta, dx = 2 \sec^2 \theta d\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$4 + x^2 = 4 + 4 \tan^2 \theta = 4 \sec^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta}} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{|\sec \theta|} \\ &= \int \sec \theta d\theta \end{aligned}$$



$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C$$

44

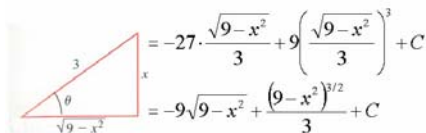
ตัวอย่างที่ 2 Using the substitution $x = a \sin \theta$

$$\text{จงหา } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}, \quad -3 < x < 3$$

$$x = 3 \sin \theta, dx = 3 \cos \theta d\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9 \sin^2 \theta = 9 \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{27 \sin^3 \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta}{|3 \cos \theta|} \\ &= 27 \int \sin^3 \theta d\theta \\ &= 27 \int (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

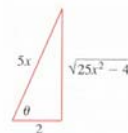


45

ตัวอย่างที่ 3 Using the substitution $x = a \sec \theta$

$$\text{จงหา } \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \quad x > \frac{2}{5}$$

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25 \left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} = 5 \sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$



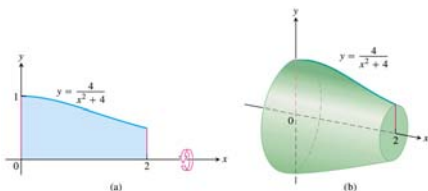
$$x = \frac{2}{5} \sec \theta, dx = \frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta d\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \sec^2 \theta - \frac{4}{25} = \frac{4}{25} \tan^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} &= \int \frac{dx}{5 \sqrt{x^2 - (4/25)}} \\ &= \int \frac{(2/5) \sec \theta \tan \theta d\theta}{5 \cdot (2/5) \tan \theta} = \frac{1}{5} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2} \right| + C \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 Finding the volume of a solid of revolution

จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่สร้างขึ้นโดยการหมุนรอบแกน X ของขอบเขตระหว่างเส้นโค้ง $y = 4/(x^2+4)$ กับแกน X และเส้น $X=0$ และ $X=2$



$$V = \int_0^2 \pi [R(x)]^2 dx = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

47

$$x = 2 \tan \theta, dx = 2 \sec^2 \theta d\theta, \theta = \tan^{-1} \frac{x}{2}$$

$$4 + x^2 = 4 + 4 \tan^2 \theta = 4 \sec^2 \theta$$

$$V = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{(4 \sec^2 \theta)^2}$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} 2 \cos^2 \theta d\theta = \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \pi \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} = 4.04$$

48

7.6 L'Hopital's Rule

Indeterminate form 0/0

ถ้าฟังก์ชันต่อเนื่อง $f(x)$ และ $g(x)$ มีค่าเป็นศูนย์ที่ $x = a$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

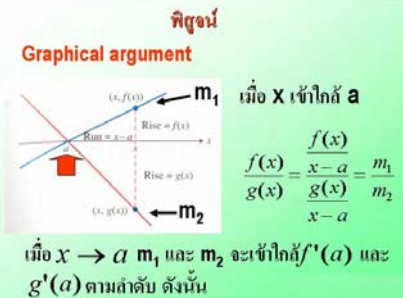
ไม่สามารถหาค่าได้ด้วยการแทนค่า $x = a$ การแทนค่าจะให้ $0/0$ ซึ่งไม่มีความหมายอันใดเราเรียกค่านี้นว่า indeterminate form

ทฤษฎีบท 1 L'hospital's Rule (First form)

สมมติว่า $f(a) = g(a) = 0$ ซึ่งสามารถหาค่า $f'(a)$ และ $g'(a)$ ได้ และ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

49



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{m_1}{m_2} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

50

Confirm analytically

$$\begin{aligned} \frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 Using L'hospital's Rule

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \frac{3 - \cos x}{1} \Big|_{x=0} = 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{2\sqrt{1+x}}{1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

51

ทฤษฎีบท 2 L'hospital's Rule (Stronger form)

สมมติว่า $f(a) = g(a) = 0$ ซึ่ง f และ g มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด I มี a อยู่ และ $g'(x) \neq 0$ บนช่วง I ถ้า $x \neq a$ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2} - 1/2}{2} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

52

ตัวอย่างที่ 3 Incorrectly applying strong form

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0$$

ถ้าเราอนุพันธ์อีกครั้ง

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ผิด

53

ตัวอย่างที่ 4 Using L'hospital's rule with one-side limits

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty$$

เมื่อเราถึงจุดหนึ่งที่อนุพันธ์หนึ่งเข้าใกล้ศูนย์แต่อีกอันไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นลิมิตเป็น 0 ถ้าตัวตั้งเป็นศูนย์ หรือเป็น infinity ถ้าตัวหารเป็นศูนย์

54

Indeterminate form $\infty / \infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty$

Working with the indeterminate form ∞ / ∞

ตัวอย่างที่ 5

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$$

ไม่ต่อเนื่องที่ $x = \pi/2$ ใช้ one-sided limits

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sin x = 1$$

ด้านขวามีลิมิตเป็น 1 เช่นกัน ดังนั้น two-sided limit คือ 1

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

55

Working with the indeterminate form $\infty \cdot 0$

ตัวอย่างที่ 6

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \infty \cdot 0$$

$$h = 1/x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \sinh \right) = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \infty \cdot 0$$

$$h = 1/x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \sinh \right) = 1$$

56

Working with the indeterminate form $\infty - \infty$

ตัวอย่างที่ 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$$

ถ้า $x \rightarrow 0^+$ แล้ว $\sin x \rightarrow 0^+$ และ

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow \infty - \infty$$

ทำนองเดียวกัน

ถ้า $x \rightarrow 0^-$ แล้ว $\sin x \rightarrow 0^-$ และ

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty$$

รวมเศษส่วน

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0} \text{ still } \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

57

Indeterminate forms $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Take log ก่อน

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\ln f(x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \ln f(x)} = e^L$$

a เป็น finite หรือ infinite ก็ได้

58

Working with the indeterminate form 1^∞

ตัวอย่างที่ 8 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = ?$

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln f(x)} \\ &= e^1 = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

59

Working with the indeterminate form 0^0

ตัวอย่างที่ 9 จงหาว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ มีลิมิตหรือไม่และมีค่าลิมิตเท่าไร

$$\ln f(x) = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln f(x)} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

60

Working with the indeterminate form ∞^0

ตัวอย่างที่ 10

จงหา $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln f(x)} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

61

7.6

Improper Integrals

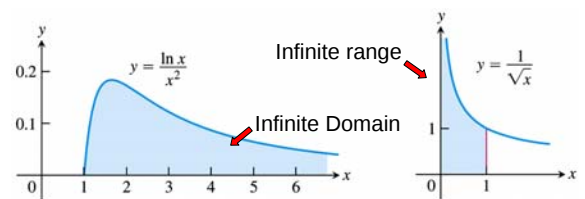
62

Improper Integrals

ที่ผ่านมามาราทราบคุณสมบัติของ **definite integral** ว่ามี 2 คุณสมบัติ

1. Domain ของปริพันธ์จาก a ถึง b เป็น finite
 2. ช่วงของตัวปริพันธ์เป็น finite บน domain นี้
- ถ้าปัญหาต่างจากนี้จะทำอย่างไร?

63



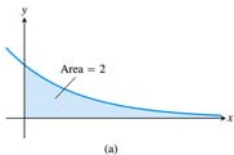
หาพื้นที่ จาก $x=1$ ถึง $x=\infty$

หาพื้นที่ จาก $x=0$ ถึง $x=1$

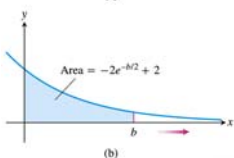
ถ้าเกิดให้กำนันน้อยยกว่าผิดหนึ่งจะเกิดอะไรขึ้น?

64

Infinite limits of integration



$$\begin{aligned} A(b) &= \int_0^b e^{-x/2} dx \\ &= -2e^{-x/2} \Big|_0^b \\ &= -2e^{-b/2} + 2 \end{aligned}$$



หาขีดจำกัดของ $A(b)$ เมื่อ $b \rightarrow \infty$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} A(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} (-2e^{-b/2} + 2) = 2$$

$$\int_0^\infty e^{-x/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x/2} dx = 2$$

นิยาม Improper integrals with infinite integration limits

ตัวปริพันธ์ที่มี infinite limits of integration คือ improper integrals

ในข้อ 1 และ 2 ถ้าขีดจำกัดเป็น finite improper integral จะเข้าสู่ (converges) และขีดจำกัดของ improper integral

ถ้าไม่มีขีดจำกัด improper integral จะหายออก (diverges)

1. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, \infty)$ แล้ว

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

2. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $(-\infty, b]$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

3. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ แล้ว

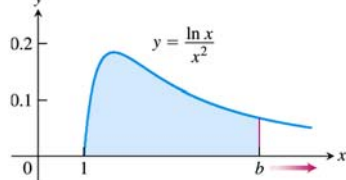
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

c เป็นเลขจำนวนจริง

66

Evaluating an improper integral on $[1, \infty)$

ตัวอย่างที่ 1 พื้นที่ภายใต้ curve $y = (\ln x)/x^2$ จาก $x=1$ ถึง $x=\infty$ เป็น finite หรือไม่ ถ้าเป็นจะมีค่าเท่าไร



$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[(\ln x) \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

67

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[(\ln x) \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 \right]$$

$$= -\left[\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln b}{b} \right] - 0 + 1$$

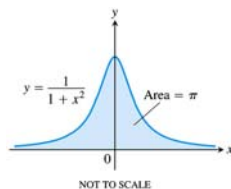
$$= -\left[\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1/b}{1} \right] + 1 = 1$$

Improper integral
ถ้าเข้าพื้นที่มีค่า 1

68

Evaluating an integral on $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\tan^{-1} x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



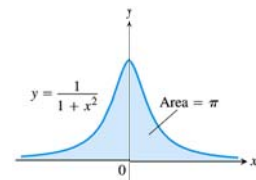
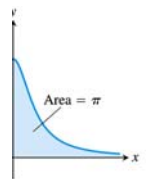
69

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\tan^{-1} x \right]_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$



70

The Integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

ฟังก์ชัน $y = 1/x$ จะเป็นขอบเขตระหว่างผู้เข้ากับผายออก

ตัวอย่างที่ 3 Determining convergence

p มีค่าเท่าไรที่ทำให้ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ผู้เข้าและผายออก
เมื่อไร และมีค่าเท่าไร

ถ้า $p \neq 1$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) \right]$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

ถ้า $p > 1$ จะผู้เข้าหาค่า $1/(p-1)$

ถ้า $p < 1$ จะผายออก

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

71

72

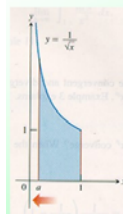
ถ้า $p=1$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty \quad \text{หายออกไป}\end{aligned}$$

73

Integrands with infinite discontinuities

กรณีที่มี vertical asymptote



หาพื้นที่จาก $x=0$ ถึง $x=1$

$$a \rightarrow 1$$

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

$$a \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

74

นิยาม Improper integrals with infinite discontinuities

ปริพันธ์ของฟังก์ชันที่กลายเป็น infinite ที่จุดภายในช่วงของการปริพันธ์คือ improper integrals

1. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $(a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

2. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, b)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

3. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบน $[a, c) \cup (c, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

75

A divergent improper integral

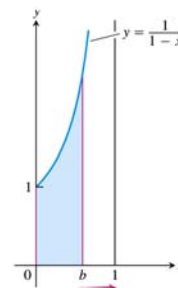
ตัวอย่างที่ 4 จงหาการลู่ออกของ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

ต่อเนื่องบน $[0, 1)$

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} [-\ln|1-x|]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} [-\ln(1-b) + 0] = \infty\end{aligned}$$

หายออกไป



76

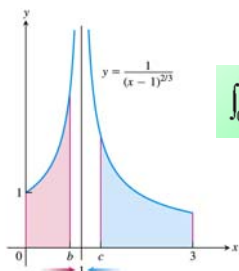
Infinite discontinuity at an interior point

ตัวอย่างที่ 5

$$\text{จงหา } \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

ต่อเนื่องบน $[0, 1)$ และ $(1, 3]$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



77

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} [3(b-1)^{1/3} + 3] = 3\end{aligned}$$

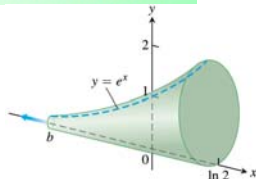
$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_c^3 \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^+} [3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

78

Finding the volume of an infinite solid

ตัวอย่างที่ 6



$$A(x) = \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} e^{2x}$$

limit as $b \rightarrow -\infty$

$$V = \int_b^{\ln 2} A(x) dx = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4} e^{2x} dx = \frac{\pi}{8} (4 - e^{2b})$$

$$b \rightarrow -\infty, e^{2b} \rightarrow 0$$

$$V = (\pi/8)(4 - 0) = \pi/2$$

79

Test for convergence and divergence

- Direct comparison test

- Limit comparison test

ทฤษฎีบท 3 Direct comparison test

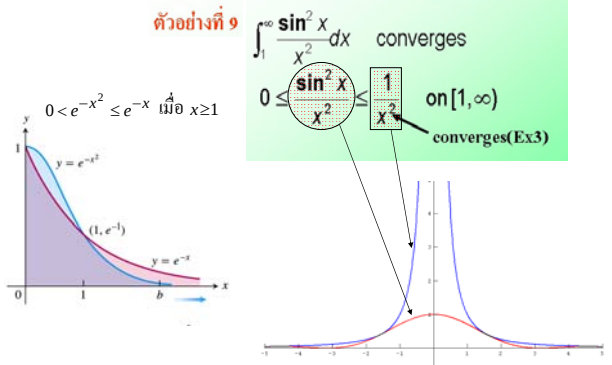
ให้ f และ g ต่อเนื่องบน $[a, \infty)$ ซึ่ง $0 \leq f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \geq a$ แล้ว

- $\int_a^\infty f(x) dx$ converges if $\int_a^\infty g(x) dx$ converges
- $\int_a^\infty g(x) dx$ diverges if $\int_a^\infty f(x) dx$ diverges

80

Using the Direct comparison test

ตัวอย่างที่ 9



$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \text{ converges}$$

$$0 < \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ on } [1, \infty)$$

converges (Ex3)

82

ทฤษฎีบท 4 Limit comparison test

ถ้าฟังก์ชันบวก f และ g ต่อเนื่องบน $[a, \infty)$ และ ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty,$$

$$\text{แล้ว } \int_a^\infty f(x) dx \text{ และ } \int_a^\infty g(x) dx$$

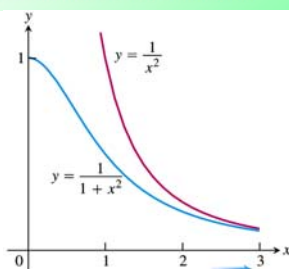
ทั้งสองอาจเป็น converge หรือ diverge

Using the Limit comparison test

ตัวอย่างที่ 10 จงแสดงว่า $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ อนุพัทธ์

เมื่อเปรียบเทียบกับ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

จงหาและเปรียบเทียบค่าปริพันธ์ทั้งสอง



83

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{4}$$

84

Types of Improper Integrals Discussed in This Section

Improper Limits or Endpoints: Type I

1. Upper limit

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2}$$


2. Lower limit

$$\int_{-\infty}^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a \frac{dx}{1+x^2}$$


3. Both limits

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^a \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a \frac{dx}{1+x^2}$$


Improper Limits or Endpoints: Type II

4. Upper endpoint

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$


5. Lower endpoint

$$\int_b^a \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_c^a \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$


6. Interior point

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} = \int_a^c \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} + \int_c^b \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$


3. Verify $\frac{dy}{dx} = \cos(x^2)$ by $y = \int_0^x \cos(t^2) dt$ (5 marks)

7/11 $y = \int_0^x \cos(t^2) dt$ $u = t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$= \frac{1}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$= -\frac{1}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$= -\frac{1}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$= -\frac{1}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$= -\frac{1}{dx} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$= \cos(x^2) \cdot \frac{1}{dx} \cdot x^2 = 2x \cdot \cos(x^2)$$

$$= \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$$

$$= \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$$

$$= \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$$