

บทที่ 8

Infinite Series

1

Chapter 2 : Infinite Series

- 8.1 Limits of Sequences of Numbers
- 8.2 Subsequences, Bounded Sequences, and Picard's Method
- 8.3 Infinite Series
- 8.4 Series of Non-negative Terms
- 8.5 Alternating Series, Absolute and Conditional Convergence
- 8.6 Power Series
- 8.7 Taylor and Maclaurin Series

2

8.1

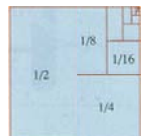
Limits of Sequences of Numbers

3

8.1 Limits of Sequences of Numbers

บางทีผลรวมของอนุกรมอนันต์ก็มีค่า เช่น

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



แต่บางทีก็หาไม่ได้ เช่น

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$$

และบางทีก็ไม่วิสูจน์ว่ามีค่าอะไร เช่น

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

จะเป็น 0 หรือ เป็น 1 ?

4

ตัวอย่างการเรียงลำดับของจำนวนเต็มที่ถูกด้วย 3

Domain	1	2	3 ...	n
	↓	↓	↓	↓
Range	3	6	9 ...	3n

นิยาม

ลำดับของจำนวนคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า n_0

การกำหนดลำดับเหมือนฟังก์ชันโดยทั่วไป

$$a(n) = \sqrt{n}, \quad a(n) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{n-1}{n}$$

5

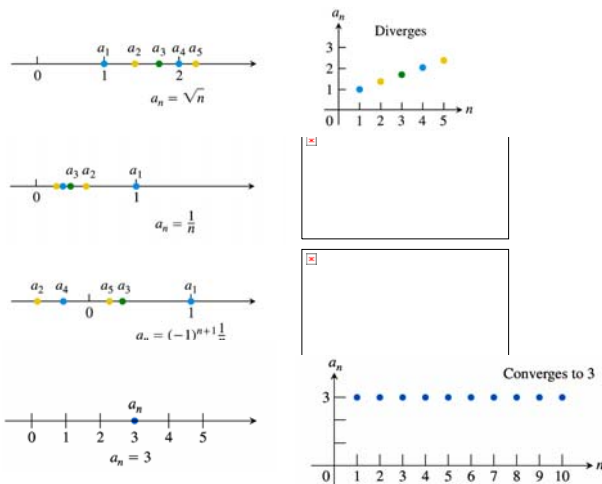
We write	For the sequence whose defining rule is
(a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{n}, \dots$	$a_n = \sqrt{n}$
(b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$	$a_n = \frac{1}{n}$
(c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$	$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$
(d) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$
(e) $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right), \dots$	$a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right)$
(f) $3, 3, 3, \dots, 3, \dots$	$a_n = 3$

Sequence ที่มีจำนวนเทอมที่สิ้นสุดลง (นับได้)

เรียกว่า **finite sequence**

Sequence ที่มีจำนวนเทอมเป็นอนันต์ เรียกว่า **infinite sequence**

6



นิยาม Converges, Diverges, Limit

ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหาค่า L เมื่อทุกค่าของจำนวน ε ที่มากกว่าศูนย์ มีจำนวนเต็ม N สำหรับทุกค่าของ n ที่ทำให้

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

ถ้าหาค่า L ไม่ได้ แสดงว่า $\{a_n\}$ ฝายออก

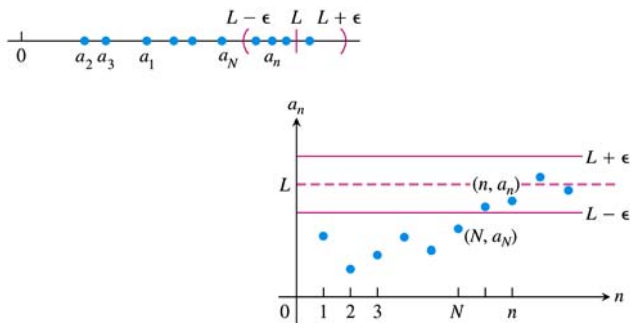
ถ้าหาก $\{a_n\}$ ลู่เข้าหา L เราเขียนได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{หรือ} \quad a_n \rightarrow L$$

เราเรียก L ว่าเป็นลิมิตของลำดับ

8

ภาพประกอบการพิสูจน์การลู่เข้า



9

ตัวอย่างที่ 2 Testing the definition พิสูจน์การลู่เข้า

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} k = k \quad (\text{any constant } k)$$

(a) ให้ $\varepsilon > 0$ เราจะต้องแสดงให้เห็นว่ามีเลขจำนวนเต็ม N ที่ทำให้

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \forall n > N$$

ถ้า N คือเลขจำนวนเต็มใดๆ ที่มีค่า $> 1/\varepsilon$ หมายความว่า จะเป็นจริงทุก $n > N$

10

(b) ให้ $\varepsilon > 0$ เราจะต้องแสดงให้เห็นว่ามีเลขจำนวนเต็ม N ที่ทำให้

$$n > N \Rightarrow |k - k| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

for any N

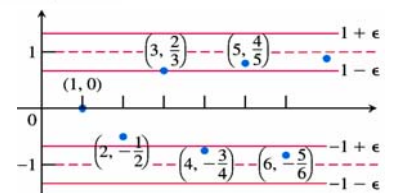
ตัวอย่างที่ 3 A divergent sequence

จงแสดงให้เห็นว่า $\{(-1)^{n+1}[(n-1)/n]\}$

ฝายออก



ไม่ลู่เข้า 1 หรือ -1 เพราะค่ากระโดดไปกระโดดมา



11

12

ทฤษฎีบท 1 Limit laws for sequences การคำนวณลิมิตของลำดับ

ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของเลขจำนวนจริง
และให้ A และ B เป็นเลขจำนวนจริง กฎต่อไปนี้จะ
ใช้ได้เมื่อ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$$

1. ผลรวม $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. ผลต่าง $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$
3. ผลคูณ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. การคูณด้วยค่าคงที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$
5. ผลหาร $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = A / B, B \neq 0$

ตัวอย่างที่ 4 Applying the limit laws

จงหาลิมิต

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) &= -1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0 \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1 \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^2} \right) &= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 5 \cdot 0 = 0 \\ \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n^6}{n^6+3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4/n^6) - 7}{1 + (3/n^6)} = \frac{0-7}{1+0} = -7 \end{aligned}$$

14

ตัวอย่างที่ 5

จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $\{k \cdot a_n\}$ ซึ่งเกิดจากลำดับหนึ่ง $\{a_n\}$ คูณด้วยค่าคงที่ k ย่อมหาย
ออก เมื่อ $\{a_n\}$ หายออก

การพิสูจน์ทำโดยเชิงขัดแย้ง (Contrary ถือว่าเหมือนแย้งว่าไม่เป็นจริง)
คือ ถ้าเราแย้งว่า $\{k \cdot a_n\}$ อยู่แล้ว แล้วเราจะได้ว่า

$$\left\{ \frac{1}{k} \cdot k a_n \right\} = \{a_n\} \Rightarrow \text{converge}$$

เพราะจากกฎของผลคูณในทฤษฎีบทที่ 1 ซึ่งมีนัยเกี่ยวกับของเดิมที่ว่า
“เมื่อ $\{a_n\}$ หายออก”

15

ทฤษฎีบท 2 The Sandwich Theorem for Sequence

ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของเลขจำนวน
จริง ถ้า $a_n \leq b_n \leq c_n$ เป็นจริงทุกค่า $n > N$ และถ้า
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

กรณีพิเศษ เช่น

$$|b_n| \leq c_n \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

16

ตัวอย่างที่ 6 Using the Sandwich Theorem

จงพิจารณาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} &= 0 \Leftarrow \left| \frac{\cos n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} &= 0 \Leftarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} &= 0 \Leftarrow \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

17

ทฤษฎีบท 3 The Continuous Function Theorem for Sequences

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของเลขจำนวนจริง ถ้า $a_n \rightarrow L$
และถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ L และหากำหนดทุก
ค่าของ n แล้ว $f(a_n) \rightarrow f(L)$

$$\text{หรือ } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(L)$$

หมายความว่า หาลิมิตของ $\{a_n\}$ ก่อน แล้วแทนค่าเป็นลิมิตของฟังก์ชัน f

18

ตัวอย่างที่ 7 Applying theorem 3

จงแสดงให้เห็นว่า $\sqrt{(n+1)/n} \rightarrow 1$

เราทราบว่า $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$

เขียนในรูปฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x}$ และ $L = 1$

ดังนั้น $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \rightarrow \sqrt{1} = 1$

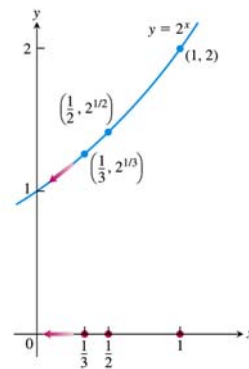


FIGURE 11.3 As $n \rightarrow \infty$, $1/n \rightarrow 0$ and $2^{1/n} \rightarrow 2^0$ (Example 6).

ตัวอย่างที่ 8 The sequence $\{2^{1/n}\}$

เราทราบว่า $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

ให้ $a_n = \frac{1}{n}, f(x) = 2^x, L = 0$

จากทฤษฎีบท 3

$$2^{1/n} = f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow f(L) = 2^0 = 1$$

Using L'hospital's Rule

ทฤษฎีบท 4

สมมติให้ $f(x)$ หาค่าได้สำหรับทุกค่า $x \geq n_0$ และ $\{a_n\}$ คือลำดับของเลขจำนวนจริงที่ซึ่ง $a_n = f(n)$ สำหรับ $n \geq n_0$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

ตัวอย่างที่ 9 Applying L'hospital's Rule

จงแสดงให้เห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

ฟังก์ชัน $\frac{\ln x}{x}$ หาค่าได้ทุกค่า $x \geq 1$ และจะเท่ากับกับลำดับของเลขจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

จาก L'hospital's Rule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

ตัวอย่างที่ 10 Applying L'hospital's Rule

จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5n}$

เอา L'Hopital มาใช้ได้เลย จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} = \infty$$

ตัวอย่างที่ 11 Applying L'hospital's Rule to determine convergence

ลำดับซึ่งเทอมที่ n คือ $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ ฐู่เข้าหรือไม่? ถ้าฐู่เข้าจงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\ln a_n = \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \quad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2$$

$$a_n = e^{\ln a_n} \rightarrow e^2 \text{ converge}$$

Limits that arise frequently

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (\text{any } x)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\text{any } x)$

โดยที่ x เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงในขณะที่ $n \rightarrow \infty$

25

ตัวอย่างที่ 12 Limits from table

- (a) $\frac{\ln(n^2)}{n} = \frac{2 \ln n}{n} = 2 \cdot 0 = 0$
- (b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 = (1)^2 = 1$
- (c) $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n} n^{1/n} = 1$
- (d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$
- (e) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \rightarrow e^{-2}$
- (f) $\frac{100^n}{n!} \rightarrow 0$

26

8.2

Subsequences, Bounded Sequences, and Picard's Method

8.2 Subsequences, Bounded Sequence

หัวข้อนี้ยังคงเกี่ยวกับการเข้าสู่หรือหายออกของลำดับ

Subsequences

$\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ถ้าทุกๆ เทอมของลำดับ $\{a_n\}$ เป็นส่วนหนึ่งของลำดับ $\{b_n\}$ เราเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่าเป็นลำดับย่อย (subsequence) ของลำดับ $\{b_n\}$

ตัวอย่างที่ 1 ลำดับย่อยของลำดับจำนวนเต็ม

ลำดับของจำนวนคู่ 2, 4, 6, ..., 2n, ...

ลำดับของจำนวนคี่ 1, 3, 5, ..., 2n-1, ...

27

28

ความสำคัญของลำดับย่อย

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เข้าสู่ค่า L ลำดับย่อยของมันจะเข้าสู่ L เช่นกัน ทำให้เราสามารถหาขีดจำกัดจากลำดับย่อยใดก็ได้
2. ถ้าลำดับย่อยใดๆ ของลำดับ $\{a_n\}$ หายออก หรือถ้าสองลำดับย่อยมีลิมิตแตกต่างกัน $\{a_n\}$ จะหายออก

29

Monotonic and bounded sequence ลำดับทางเดียว และ ลำดับจำกัด

- Monotonic sequence คือลำดับที่เพิ่มขึ้น หรือลดลงอย่างเดียว เพิ่มก็เพิ่ม ลดก็ลด (nondecreasing) ลดก็ลดตลอด (nonincreasing)
- Bounded Sequence คือลำดับที่มีขอบเขตจำกัด (มีขอบเขตต่ำสุด-สูงสุด)

นิยาม Nondecreasing, Nonincreasing, monotonic sequence

ลำดับ $\{a_n\}$ ที่มีคุณสมบัติที่ $a_n \leq a_{n+1}$ สำหรับทุกค่า n จะเรียกว่าลำดับแบบไม่ลด (nondecreasing sequence) นั่นคือ $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ จะเรียกว่าลำดับแบบไม่เพิ่ม (nonincreasing sequence) ถ้า $a_n \geq a_{n+1}$ สำหรับทุกค่าของ n และจะเรียกว่า monotonic ถ้าเป็นลำดับแบบไม่เพิ่มหรือไม่ลด

30

ตัวอย่างที่ 2 Monotonic sequence

- (a) $1, 2, 3, \dots, n, \dots \rightarrow$ nondecreasing
- (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \rightarrow$ nondecreasing
- (c) $\frac{3}{8}, \frac{3}{9}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{3}{n+7}, \dots \rightarrow$ nonincreasing
- (d) The constant sequence (3) $\rightarrow$ nondecreasing and nonincreasing

31

ตัวอย่างที่ 3 A nondecreasing sequence

จงแสดงว่าลำดับ $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ เป็นแบบไม่ลด

วิธีที่ 1 ทุกค่า $n \geq 1, a_n \leq a_{n+1}$ นั่นคือ

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}$$

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n}{n+2}$$

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n}{n+2}$$

$$(n-1)(n+2) \leq n(n+1)$$

$$n^2 + n - 2 \leq n^2 + n$$

$$-2 \leq 0$$

$$a_n \leq a_{n+1}$$

$\{a_n\}$ เป็นลำดับแบบไม่ลด

32

วิธีที่ 2 โดยการให้ $f(n) = a_n$ และ $f'(x) \geq 0$

$$f(n) = \frac{n-1}{n+1} \text{ and}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$= \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \text{ nondecreasing}$$

33

นิยาม Bounded from above, upper bound, bounded from below, lower bound, bounded sequence

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตบน (bounded from above) ถ้ามีค่า M ที่ทำให้ $a_n \leq M$ สำหรับทุกค่า n ค่า M จะเป็นขอบเขตบน (upper bound) สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ลำดับจะมีขอบเขตล่าง (bounded from below) ถ้ามีค่า m ที่ทำให้ $m \leq a_n$ สำหรับทุกค่า n ค่า m จะเป็นขอบเขตล่าง (lower bound) สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ถ้ามีทั้งขอบเขตบนและล่างจะเรียกว่าลำดับที่มีขอบเขต (bounded sequence)

34

ตัวอย่างที่ 4 Applying the definition for boundedness

- (a) $1, 2, 3, \dots, n, \dots \rightarrow$ no upper bound
 $\rightarrow$ has lower bound ($m = 1$)
- (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \rightarrow$ upper bound ($M = 1$)
 $\rightarrow$ lower bound ($m = 1/2$)
- (c) $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n n, \dots \rightarrow$ no boundedness

35

ทุกลำดับที่มีขอบเขตไม่จำเป็นต้องมีค่า
ทุกลำดับ **monotonic** ไม่จำเป็นต้องมีค่า
แต่ถ้าลำดับมีทั้งขอบเขตและเป็น **monotonic**
จะต้องมีค่าเสมอ

ทฤษฎีบท 5 Monotonic sequence theorem

ลำดับที่มีทั้งขอบเขตและเป็น **monotonic** จะต้องมีค่าเสมอ

36

ตัวอย่างที่ 5

ก. ลำดับไม่ลด $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \rightarrow$ upper bound ($M = 1$)

จะลู่เข้า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 1$$

จะลู่เข้าและลู่เข้าที่ $L=1$

ข. ลำดับไม่เพิ่ม $\frac{1}{n+1} \rightarrow$ Lower bound ($m=0$)

จะลู่เข้าและลู่เข้าที่ $L=0$

37

8.3

Infinite series

38

8.3 Infinite Series

บ่อยครั้งในคณิตศาสตร์ที่เราเขียนฟังก์ชันในรูป **infinite polynomials** เช่น

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

ผลรวมของค่าคงที่ที่เราเรียกว่า **infinite series**

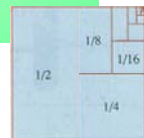
39

Series and partial sums

การหาผลบวกของ **finite sum** ของเลขจำนวนจริงจะต่างจากการหาผลบวกของ **infinite sum** ของเลขจำนวนจริง

$$1 + (2+3) = 1+5=6 \quad \text{และ} \quad (1+2)+3=3+3=6$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ?$$



40

Partial sum

First:	$s_1 = 1$	$2 - 1$
Second:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
Third:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
...	...	...
nth:	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

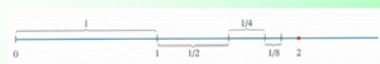
ลำดับนี้จะลู่เข้าสู่ 2

นั่นคือผลรวมของอนุกรมอนันต์นี้คือ 2

ผลรวมย่อย

41

เราสามารถหาผลรวมของอนุกรมอนันต์โดยใช้ลำดับและลิมิตช่วย



นิยาม Infinite series

ถ้าเราให้ลำดับของจำนวนเต็ม $\{a_n\}$ แสดงในรูป

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

จะเป็นอนุกรมอนันต์ ถ้า a_n คือเทอมที่ n ของอนุกรม

42

ผลรวมย่อยของอนุกรมจะเป็นลำดับ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

M

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

M

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

ถ้าเป็นอย่างอื่นจะผายออก

เมื่อ $n \rightarrow \infty$

ผลรวมย่อยจะมีลิมิต S

นั่นคืออนุกรมจะเข้าสู่ S

เราเขียนได้ว่า

ตัวอย่างที่ 1 Identifying a convergent series

อนุกรม $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$ เข้าสู่หรือไม่?

ลำดับของผลรวมย่อยเขียนในรูปเลขทศนิยม

0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, ...

ลำดับจะมีลิมิต 0.3 หรือ 1/3

อนุกรมจะเข้าสู่ผลรวม 1/3

43

44

Geometric series

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

a และ r คือเลขจำนวนจริงที่กำหนด $a \neq 0$

r จะเรียกว่าอัตราส่วนร่วม (common ratio)

เป็นได้ทั้งบวกและลบ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots, \left(r = \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{หรือ } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots, \left(r = -\frac{1}{3}\right)$$

กรณีที่ $|r| \neq 1$ เราสามารถหาการเข้าสู่หรือผายออกของอนุกรมได้ดังนี้

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad (r \neq 1)$$

45

46

กรณีที่ $|r| < 1$ เราได้ $r^n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ และจะได้

$$S_n \rightarrow \frac{a}{1-r}$$

กรณีที่ $|r| > 1$, $|r^n| \rightarrow \infty$ อนุกรมจะผายออก

กรณีที่ $|r| = 1$

$$S_n = a + a(1) + a(1)^2 + \dots + a(1)^{n-1} = na$$

ผายออก

สรุป

อนุกรมเรขาคณิต

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

จะเป็นอนุกรมเข้าสู่และมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$ เมื่อ $|r| < 1$

$$-1 < r < 1$$

คือช่วงของการเข้าสู่ (interval of convergence)

และเป็นอนุกรมผายออกเมื่อ $|r| \geq 1$

47

48

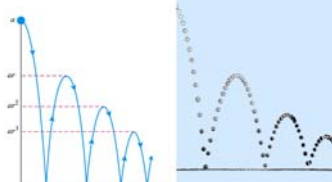
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **ตู้เข้าหรือหาขอบ?**
 $a=3, r=1/2$ **ตู้เข้า** $\frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-(1/2)} = 6$

(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \Lambda + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \Lambda$ **ตู้เข้าหรือหาขอบ?**
 $a=1, r=-1/2$ **ตู้เข้า** $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$ **ถ้าเข้าหรือผายออก?**
 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1, r = \frac{3}{5}$ **ถ้าเข้า** $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(3/5)} = \frac{5}{2}$

(d) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8} + \Lambda$ **ถ้าเข้าหรือผายออก?**
 $r = \pi/2 > 1$ **ผายออก**

ปล่อยลูกบอลสูงจากพื้น a เมตร แต่ละครั้งที่ถูกบอลกระทบพื้นภายหลังก่อนจากระยะ h จะกระดอนขึ้น rh โดย r มีค่าบวกแต่น้อยกว่า 1 จงหาระยะทางทั้งหมดที่ลูกบอลเคลื่อนที่ขึ้นลง



ระยะทางทั้งหมดคือ

$$s = a + 2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \dots = a + \frac{2ar}{1-r} = a \frac{1+r}{1-r}$$

ถ้าให้ $a=6$ m, $r=2/3$ ระยะทางทั้งหมดคือ

$$s = 6 \frac{1 + (2/3)}{1 - (2/3)} = 30m$$

จงแสดงเลขทศนิยมซ้ำ $5.23\overline{23}$ ในรูปเศษส่วน

$$\begin{aligned} 5.232323\ldots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \Lambda \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \left(\frac{1}{100} \right)^3 + \dots \right) \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left(\frac{1}{1 - 0.01} \right) = \frac{518}{99} \end{aligned}$$

จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

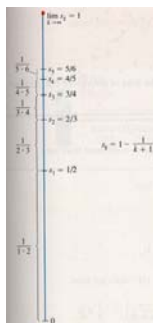
โดยแตกเป็นเศษส่วนย่อยในรูป $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{พหุนาม}_k &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \Lambda + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$S_k \rightarrow 1 \text{ เมื่อ } k \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$



ตัวอย่างที่ 6 Identifying a divergent series

อนุกรม $1-1+1-1+1-1+\dots$ ลู่เข้าหรือไม่?

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$ វិវេក

ที่ถูกผลรวมย่อยควรจะเป็น 1,0,1,0,1,0,1,...

ลำดับนี้จะไม่มีลิมิต อนุกรมไม่มีผลรวม มันจึงผายออก

nth-term test for divergence

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ รั่วเข้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ จะต้องเท่ากับ 0

ตัวอย่าง $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
เป็นผลรวมย่อยที่ n

ถ้า n มากขึ้น ทั้ง S_n และ S_{n-1} จะมีค่าเข้าใกล้ S
ผลต่างของมันจะเข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือ

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow S - S = 0$$

ทฤษฎีบท 6 Limit of the nth term of a convergent series

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ กระจาย แล้ว $a_n \rightarrow 0$

ตัวอย่างที่ 8 Applying the nth-term test

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ ฝายออกเพราะ $n^2 \rightarrow \infty$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ ฝายออกเพราะ $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ ฝายออกเพราะ $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$ ไม่นิ

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ หารอดอกพหุคูณ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n}{2n+5} \right) = -\frac{1}{2}$

Adding or deleting terms

เราสามารถที่จะรวมหรือตัดเทอมของอนุกรมได้โดยไม่
ทำให้การลู่เข้าหรือผายออกเปลี่ยนไป

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้าสำหรับ

ค่า k ใดๆที่ >1 และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

ในทางกลับกัน

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ตู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะตู่เข้าเช่นกัน

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$$

Combining series

เมื่อเรามี 2 อนุกรมที่รู้ค่า เราสามารถบวก ลบ เทอม
ต่อเทอม หรือคูณด้วยค่าคงที่เพื่อสร้างอนุกรมรู้ค่า
ใหม่

ทฤษฎีบท 7 Properties of convergent series

ถ้า $\sum a_n = A$ และ $\sum b_n = B$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว

1. Sum Rule : $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. Difference Rule : $\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. Const. mult Rule : $\sum ka_n = k \sum a_n = kA$

ตัวอย่างที่ 11 Applying theorem 7

จัดหาผลบวกของอนุกรม

$$\begin{aligned} (a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} \\ &= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

ผลคูณหรือหาร

สำหรับอนุกรมผายออกใดๆ เมื่อเขาค่าคงที่ที่คูณ
อนุกรมจะยังผายออก

ผลรวม

ถ้า $\sum a_n$ ลู่เข้าและ $\sum b_n$ กระจายออก แล้ว

$$\frac{\sum(a_n + b_n)}{\sum(a_n - b_n)} \quad \text{จะผ่ายออก}$$

8.4

Series of Non-negative Terms

61

8.4 Series of Nonnegative Terms

ถ้าเรามีอนุกรม $\sum a_n$ เราจะมีคำถาม 2 คำถาม

1. อนุกรมลู่เข้าหรือไม่?
2. ถ้าลู่เข้า จะมีค่าผลรวมเท่าไร?

หัวข้อนี้จะศึกษาอนุกรมที่ไม่มีเทอมเป็นลบ

จะมีลักษณะ **nondecreasing sequences**

และถ้ามีขอบเขตบนจะลู่เข้า

62

ผลพวงจากทฤษฎีบท 5

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ของเทอมที่ไม่เป็นลบจะลู่เข้าถ้า
ผลรวมย่อยมีขอบเขตบน

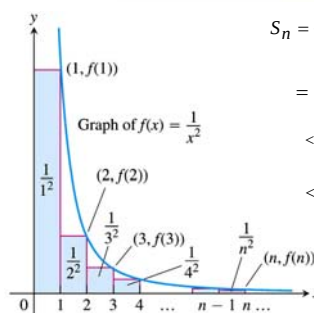
Integral test

ตัวอย่างที่ 1 Applying corollary of Theorem 5

จงแสดงให้เห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$
ลู่เข้า

63

เราจะหาการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ โดยเทียบกับ $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$



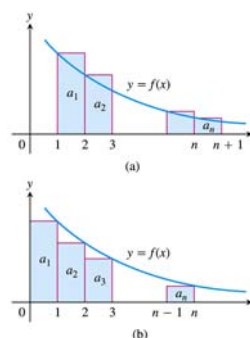
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) \\ &< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \\ &< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

ผลรวมย่อยมีขอบเขตบนและลู่เข้า

The integral test

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของเทอมบวก สมมติว่า $a_n = f(n)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันลด ที่เป็นบวกและต่อเนื่องของ x สำหรับทุกค่า x ที่ $x \geq N$ (N คือเลขจำนวนเต็มบวก) แล้วอนุกรม $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ และปริพันธ์ $\int_N^{\infty} f(x) dx$ จะลู่เข้าหรือผายออกทั้งคู่

65

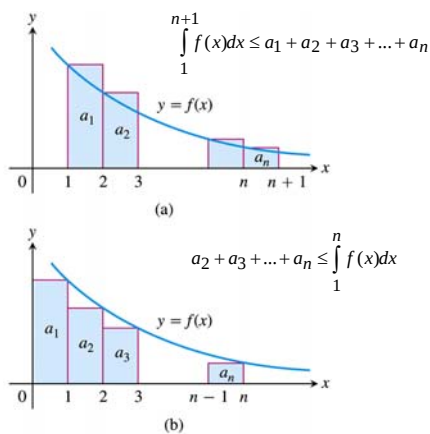


ให้ $N=1$ และให้ f เป็นฟังก์ชันลดโดยที่ $f(n) = a_n$ สำหรับทุกค่าของ n จากรูปพื้นที่ที่ $a_1, a_2, \dots, a_n$ จะมีพื้นที่มากกว่าพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y=f(x)$ จาก $x=1$ ถึง $x=n+1$ นั่นคือ

FIGURE 11.8 Subject to the conditions of the Integral Test, the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and the integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ both converge or both diverge.

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

66



67

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

ดังนั้น

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

ถ้า $\int_1^\infty f(x)dx$ finite $\sum a_n$ จะ finite ด้วย

ถ้า $\int_1^\infty f(x)dx$ infinite $\sum a_n$ จะ infinite ด้วย

68

อนุกรมและปริพันธ์จะจำกัดหรือไม่จำกัดทั้งคู่
ตัวอย่างที่ 2 Applying the integral test

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$ เข้าหรือไม่?

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ เป็นฟังก์ชันลด ที่เป็นบวกและต่อเนื่องของ x สำหรับทุกค่า $x > 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k x^{-3/2} dx$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[-2x^{-1/2} \right]_1^k$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{k}} + 2 \right)$$

$$= 2.$$

เนื่องจากปริพันธ์มีค่าเข้า อนุกรมจึงเข้าด้วย

69

Harmonic series and p-series

Integral test สามารถใช้หาการเข้าของอนุกรมใดๆในรูปของ $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^p}\right)$ ได้โดย p เป็นค่าคงที่ที่เป็นเลขจำนวนจริง อนุกรมนี้เรียกว่า **p-series**

The p-Series

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

(p a real constant) converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.

p-series ที่ $p=1$ จะเป็น harmonic series

70

Comparison tests

เราสามารถทดสอบอนุกรมชนิดอื่นโดยเปรียบเทียบ กับ p-series

The direct comparison test

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่ไม่มีเทอมลบ

(a) $\sum a_n$ จะเข้าถ้ามีอนุกรมเข้า $\sum c_n$ โดยที่ $a_n \leq c_n$ สำหรับทุกค่า $n > N$ โดย N เป็นเลขจำนวนเต็ม

The direct comparison test

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่ไม่มีเทอมลบ

(b) $\sum a_n$ จะหายออกถ้ามีอนุกรมหายออก $\sum d_n$ โดยที่ $a_n \geq d_n$ สำหรับทุกค่า $n > N$ โดย N เป็นเลขจำนวนเต็ม

71

ตัวอย่างที่ 4 Applying the direct comparison test

อนุกรมต่อไปนี้อยู่เข้าหรือไม่?

$$5 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$$

เราจะ 4 เทอมแรกและเปรียบเทียบเทอมที่เหลือกับอนุกรมเรขาคณิตที่เข้า $\sum_{n=1}^\infty (1/2^n)$ จะเห็นว่า

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

อนุกรมอยู่เข้าโดย direct comparison test

เราต้องมีอนุกรมที่อยู่เข้าหรือหายออกเพื่อใช้เปรียบเทียบ

72

สรุป

Convergent series	Divergent series
Geometric series with $ r < 1$	Geometric series with $ r \geq 1$
Telescoping series like $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	The harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
The series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	Any series $\sum a_n$ for which $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ does not exist or $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$
Any p -series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ with $p > 1$	Any p -series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ with $p \leq 1$

73

The limit comparison test

ถ้า $a_n > 0$ และ $b_n > 0$ สำหรับทุกค่า $n \geq N$ (N เป็นเลขจำนวนเต็มบวก)

- ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, 0 < c < \infty$ แล้ว $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ จะเข้าหรือหายออกทั้งคู่
- ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum b_n$ เข้าแล้ว $\sum a_n$ จะเข้าเช่นกัน
- ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum b_n$ หายออกแล้ว $\sum a_n$ จะหายออกเช่นกัน

74

ตัวอย่างที่ 5 Using the limit comparison test

(a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$

เข้าหรือหายออก?

ให้ $a_n = \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$

เมื่อ n ใหญ่ขึ้น $a_n = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$

ให้ $b_n = \frac{1}{n}$ และเนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ หายออก

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2$ หายออก

75

(b) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ เข้าหรือหายออก?

ให้ $a_n = \frac{1}{2^n-1}$

เมื่อ n ใหญ่ขึ้น $a_n = \frac{1}{2^n}$ ให้ $b_n = \frac{1}{2^n}$

และเนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เข้า

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-(1/2^n)} = 1$ เข้า

76

(c) $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

เข้าหรือหายออก?

ให้ $a_n = \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

เมื่อ n ใหญ่ขึ้น $a_n = \frac{\ln n}{n}$

ให้ $b_n = \frac{1}{n}$ และเนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ หายออก

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2 \ln n}{n^2+5} = \infty$ หายออก

77

Ratio and root tests

Ratio test เป็นการวัดอัตราเพิ่มหรือลด

The ratio test

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวกและสมมติว่า

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$

แล้ว

(a) อนุกรมจะเข้าถ้า $p < 1$

(b) อนุกรมจะหายออกถ้า $p > 1$ หรือ p เป็นอนันต์

(c) ไม่สามารถสรุปได้ถ้า $p = 1$

78

ตัวอย่างที่ 6 Applying the ratio test

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5}$$

$$= \frac{2}{3} \quad \text{ผู้เข้า}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}$$

$$= 4 \quad \text{ผายออก}$$

79

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!n!}$$

$$= 1 \quad \text{ไม่สามารถบอกได้}$$

แต่ $a_1 = 2$ จึงสรุปว่าผายออก

80

The nth-root test

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมโดยที่ $a_n \geq 0$ สำหรับ $n \geq N$
และสมมติว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$

- แล้ว
- (a) อนุกรมจะผู้เข้าถ้า $p < 1$
 - (b) อนุกรมจะผายออกถ้า $p > 1$ หรือ p เป็นอนันต์
 - (c) ไม่สามารถสรุปได้ ถ้า $p = 1$

81

ตัวอย่างที่ 7 Applying the nth-root test

ให้

$$a_n = \begin{cases} n!2^n, & n \text{ odd} \\ 1/2^n, & n \text{ even} \end{cases}$$

ผู้เข้าหรือไม่?

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n!2^n}, & n \text{ odd} \\ 1/2, & n \text{ even} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ผู้เข้า}$$

82

ตัวอย่างที่ 8 Applying the nth-root test

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \quad \text{ผู้เข้า}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow \frac{2}{1} > 1 \quad \text{ผายออก}$$

83

8.5

Alternating Series, Absolute and Conditional Convergence

84

8.5 Alternating Series, Absolute and Conditional Convergence

หัวข้อนี้จะพิจารณาอนุกรมที่มีเทอมลบ

Alternating Series

เป็นอนุกรมที่มีการสลับเครื่องหมาย

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \Lambda + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \Lambda$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \Lambda + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \Lambda$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \Lambda + (-1)^{n+1} n + \Lambda$$

85

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \Lambda + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \Lambda$$

Alternating harmonic series

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \Lambda + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \Lambda$$

Geometric series

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \Lambda + (-1)^{n+1} n + \Lambda$$

Diverges by the nth-term test

86

ทฤษฎีบท 8 The Alternating Series Test (Leibniz's Theorem)

อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \Lambda$$

ถ้าเข้าเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้จะเป็นจริง

1. ทุก u_n เป็นบวก
2. $u_n \geq u_{n+1}$ ถ้ารับทุกค่า n ที่ $n \geq N$
3. $u_n \rightarrow 0$

87

พิสูจน์

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่ เช่น $n=2m$ ผลบวก n เทอมแรกคือ
ผลบวกของ m เทอมไม่ลบและเป็นลำดับแบบไม่ลดลง

$$s_{2m+2} \geq s_{2m}$$

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \Lambda + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \Lambda - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

มีขอบเขตบนดังนั้น

$$s_{2m} \leq u_1 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = L \quad (1)$$

88

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ เช่น $n=2m+1$ ผลบวก n เทอมแรกคือ

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$$

เนื่องจาก $u_n \rightarrow 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$$

และ $m \rightarrow \infty$

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \rightarrow L + 0 = L \quad (2)$$

จาก (1) + (2) เราจะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$

89

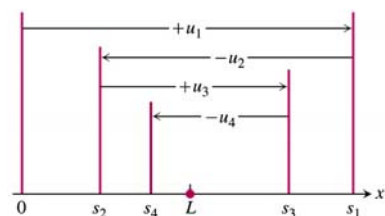


FIGURE 11.9 The partial sums of an alternating series that satisfies the hypotheses of Theorem 14 for $N = 1$ straddle the limit from the beginning.

90

Absolute convergence

นิยาม Absolute convergence

อนุกรม $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่เข้าแบบสมบูรณ์ ถ้า $\sum |a_n|$ เข้าด้วย

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \Lambda \quad \text{ที่เข้าแบบสมบูรณ์เพราะ}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \Lambda \quad \text{ที่เข้า}$$

91

นิยาม Conditional convergence

อนุกรมที่เข้า แต่ไม่เป็นที่เข้าแบบสมบูรณ์เราเรียกว่า ที่เข้าแบบมีเงื่อนไข

ตัวอย่างที่ 3 Absolute and conditional convergence

อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมแบบที่เข้าสมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข หรือหายออก

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \Lambda$$

92

ตัวอย่างที่ 3 Absolute and conditional convergence

อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมแบบที่เข้าสมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข หรือหายออก

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \Lambda$$

$$\text{ที่เข้าเพราะ } \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \text{ และ } \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ หายออก}$$

ดังนั้นจึงเป็น ที่แบบมีเงื่อนไข

93

$$(b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 - \Lambda$$

หายออก เป็นไปตาม nth-term test

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x \neq 0$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \Lambda$$

ไม่เป็นอนุกรมสลับแต่ที่เข้าแบบสมบูรณ์

94

ทฤษฎีบท 10 The absolute convergence test

ถ้าอนุกรม $\sum |a_n|$ ที่เข้าแล้ว $\sum a_n$ จะเข้าเช่นกัน

ตัวอย่างที่ 4 Applying the absolute convergence test

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \Lambda$$

ที่เข้าแบบสมบูรณ์เพราะ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \Lambda \quad \text{ที่เข้า}$$

95

ตัวอย่างที่ 5 Applying the absolute convergence test

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \Lambda$$

ที่เข้าโดยการเปรียบเทียบ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

96

ขั้นตอนการสู่เข้า

