

บทที่ 3

การเคลื่อนที่ของวัตถุ

3.1 คำนำ

โครงข่ายถนนรองรับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนั้นวิศวกรรมการทาง วิศวกรขนส่ง และวิศวกรจราจรจำเป็นต้องเข้าใจเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ และการเคลื่อนที่ของวัตถุซึ่งเกี่ยวข้องกับปัจจัยเนื่องจากคนเพราะว่าคนเป็นผู้ควบคุมการเคลื่อนที่ของวัตถุ

การเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือวัตถุมีเนื้อหาอยู่ในพลศาสตร์ (dynamics)

พลศาสตร์ แบ่งออกได้เป็น 2 สาขา ได้แก่

- จลนศาสตร์ (kinematics) เป็นการศึกษาการเคลื่อนที่โดยไม่สนใจแรงซึ่งทำให้เกิดการเคลื่อนที่นั้น
- จลนพลศาสตร์ (kinetics) เป็นการศึกษาการเคลื่อนที่โดยสนใจแรงซึ่งทำให้เกิดการเคลื่อนที่นั้นด้วย

การเคลื่อนที่ของวัตถุ อาจเป็นแนวเส้นตรง หรือ เป็นแนวโค้ง ในบทนี้จะกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุเพียงหนึ่งคันทั้งเป็นแนวเส้นตรงและเป็นแนวโค้ง และการเคลื่อนที่ของวัตถุซึ่งเกี่ยวข้องกับปัจจัยเนื่องจากคน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบทางเรขาคณิตของถนน (geometric design of highway)

3.2 สมการของการเคลื่อนที่

3.2.1 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

ตำแหน่งของอนุภาค จะวัดตำแหน่งของอนุภาคในแนวเส้นตรงเป็นระยะ x จากจุดอ้างอิง

การเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ของอนุภาค คือ ความแตกต่างของตำแหน่งของอนุภาคระหว่างช่วงเวลานึง

ความเร็ว (velocity), v คือ อัตราส่วนระหว่างการเปลี่ยนตำแหน่งต่อช่วงเวลาที่เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งนั้น

ความเร็วในขณะใดขณะหนึ่ง เขียนเป็นรูปอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ดังนี้

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3.2.1)$$

อัตราเร็ว (speed) เป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งเท่ากับ ขนาดของความเร็ว
ความเร่ง (acceleration), a คือ อัตราการเปลี่ยนความเร็วเทียบกับเวลา

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (3.2.2)$$

ความเร่งอาจมีค่าเป็น บวก หรือ ลบ ความเร่งที่มีค่าเป็นลบ เรียกว่า ความหน่วง (deceleration),
ดังนั้นความหน่วง 4.88 m/s^2 จะเท่ากับ ความเร่ง -4.88 m/s^2
จากกฎลูกโซ่

$$a = \frac{dv}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

หรือ

$$a = \left(\frac{dv}{dx} \right) v$$

ได้

$$v dv = a dx \quad (3.2.3)$$

ในกรณีซึ่งอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{ค่าคงตัว}$$

แยกตัวแปรให้อยู่คนละข้างของสมการ แล้วหาปริพันธ์ จาก $t=0$ ถึง t

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

$$v = at + v_0 \quad (3.2.4)$$

ความเร็วของอนุภาคอาจแสดงในรูปฟังก์ชันของระยะทาง โดยการหาปริพันธ์ของสมการ (3.2.3) จะได้

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_o^2) = a(x - x_o) \quad (3.2.5)$$

จัดพจน์ใหม่ได้

$$(x - x_o) = \frac{v^2 - v_o^2}{2a} \quad (3.2.6)$$

สมการ (3.2.6) สามารถใช้คำนวณหาระยะทางซึ่งวัตถุเคลื่อนที่ไป ด้วยความเร่งหรือความหน่วงคงตัว จากความเร็วเริ่มต้น v_o จนถึงความเร็วสุดท้าย v

จากสมการ (3.2.1) และ (3.2.4) อาจหาปริพันธ์เพื่อแสดงค่า x ในรูปฟังก์ชันของเวลา ได้ดังนี้

$$v = at + v_o$$

$$\frac{dx}{dt} = at + v_o$$

$$\int_{x_o}^x dx = \int_0^t at dt + \int_0^t v_o dt$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_ot + x_o \quad (3.2.7)$$

ตัวอย่างที่ 3.1 กรณีซึ่งวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

รถคันหนึ่งแล่นเข้าสู่ทางแยกด้วยความเร็ว 48 km/h ขณะเวลา $t = 0$ เริ่มลดความเร็วด้วย

ความหน่วงคงตัว $d = 4.88 \text{ m/s}^2$

ก. ให้คำนวณหาเวลาที่ใช้ไปจนกระทั่งรถหยุด และให้หาว่ารถสามารถหยุดก่อนถึงเส้นหยุดหรือไม่ ถ้าขณะที่รถเริ่มลดความเร็วรถอยู่ห่างจากเส้นหยุด 17 m

ข. ให้ลงจุด (plot) ความสัมพันธ์ระหว่างความเร่ง ความเร็ว และตำแหน่งของรถ เทียบกับเวลา และความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและตำแหน่ง

วิธีทำ

ก. แปลงหน่วยความเร็ว 48 km/h ให้เป็น m/s ก่อน เพื่อให้หน่วยในสมการสอดคล้องกัน

$$\left(48 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 48 \left(\frac{1}{3.6}\right) \text{ m/s} = 13.3 \text{ m/s}$$

สรุปได้ว่า ในการแปลงหน่วย km/h ให้เป็น m/s ให้หารด้วย 3.6

ให้ทิศทางบวกของแกน x ชี้ไปตามทิศทางของการเคลื่อนที่ของรถ โดยให้จุดกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งรถเริ่มลดความเร็ว ดังนั้นที่เวลา $t = 0$, $x_o = 0$, $v_o = 13.3 \text{ m/s}$ และ $a = -4.88 \text{ m/s}^2$ และกรณีซึ่งค่าความเร่งคงตัว เวลาที่ใช้ไปจนกระทั่งรถหยุด หาได้จากสมการ (3.2.4) ดังนี้

$$v = at + v_o$$

แทนค่าลงในสมการ ได้

$$0 = -4.88t + 13.3$$

$$t = 2.73 \text{ s}$$

ระยะทางซึ่งรถเคลื่อนที่ไปจนกระทั่งหยุด (นั่นคือความเร็วสุดท้าย $v = 0$) อาจคำนวณได้จากสมการ (3.2.6) หรือ (3.2.7) ในกรณีนี้ควรใช้สมการ (3.2.6) เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้ค่า t จากที่คำนวณได้ เพราะถ้าค่า t ที่คำนวณได้ผิด ค่าระยะทางที่ได้จะผิดด้วย

จากสมการ (3.2.6)

$$(x - x_o) = \frac{v^2 - v_o^2}{2a}$$

แทนค่าลงในสมการ ได้

$$(x - 0) = \frac{0 - 13.3^2}{2(-4.88)}$$

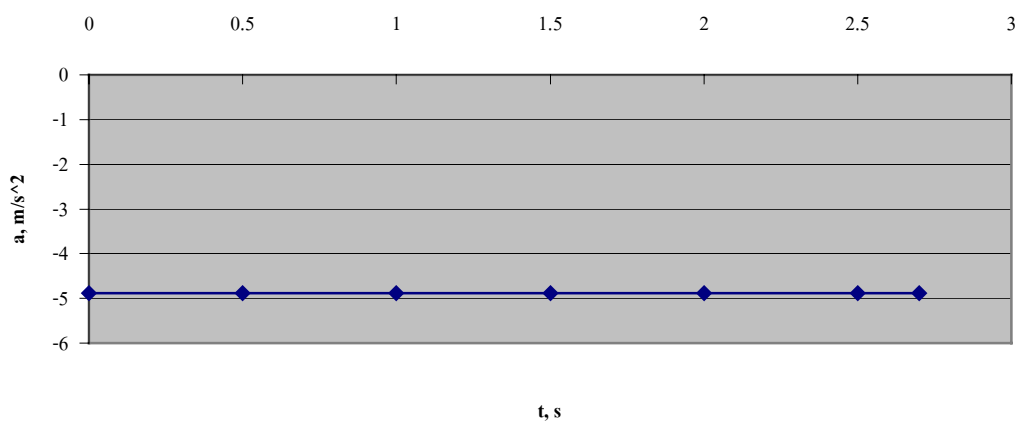
$$x = 18.1 \text{ m}$$

เนื่องจากระยะทางซึ่งรถเคลื่อนที่ได้จนกระทั่งหยุดมีค่ามากกว่า 17 m ดังนั้นรถคันนี้ไม่สามารถหยุดได้ทันก่อนถึงเส้นหยุด นั่นคือรถคันนี้จะล่าช้าไปในทางแยก

ข. ความสัมพันธ์ระหว่างความเร่ง ความเร็ว และตำแหน่งของรถ เทียบกับเวลา และความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและตำแหน่ง

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร่ง a เทียบกับเวลา t

เนื่องจาก $a = -4.88 \text{ m/s}^2$ มีค่าคงตัว ดังนั้นค่า a จะไม่ขึ้นกับ t กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง a และ t จะเป็นเส้นนอน ดังรูป



ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v เทียบกับเวลา t

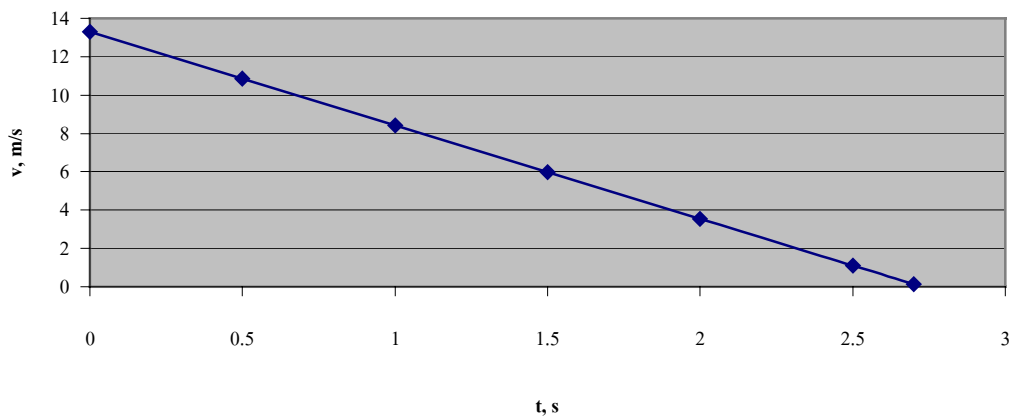
จาก

$$v = at + v_0$$

แทนค่า a และ v_0 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v และเวลา t ดังนี้

$$v = -4.88t + 13.3$$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง v และ t ดังรูป



ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของรถ x เทียบกับเวลา t

จาก

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

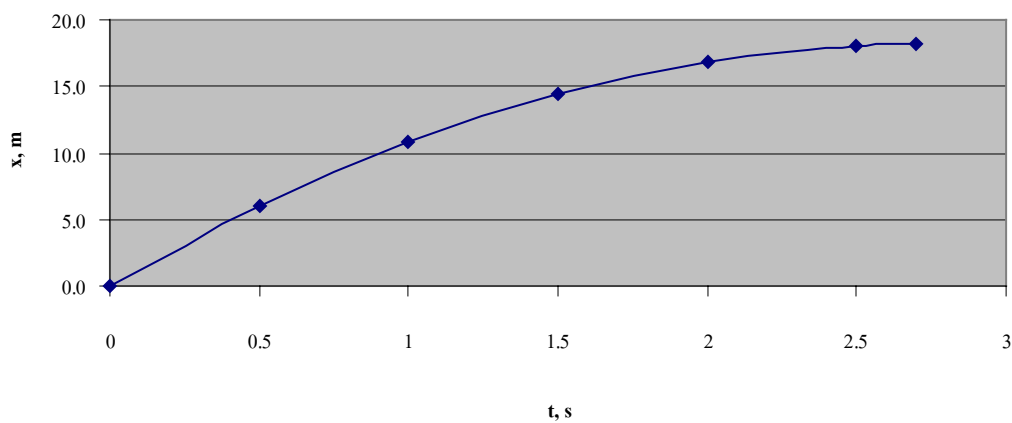
แทนค่า a, v_0 และ x_0 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของรถ x และเวลา t ดังนี้

$$x = \frac{1}{2}(-4.88)t^2 + 13.3t$$

ได้

$$x = -2.44t^2 + 13.3t$$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง x และ t ดังรูป



ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v และตำแหน่ง x

จาก

$$(x - x_o) = \frac{v^2 - v_o^2}{2a}$$

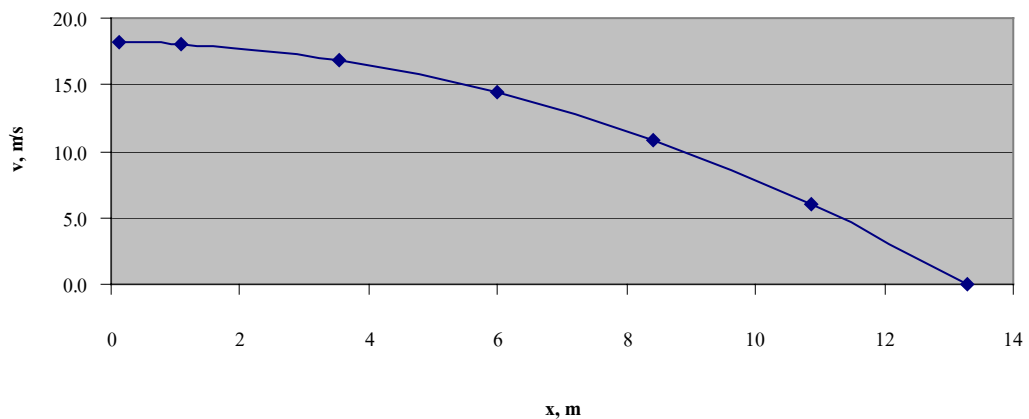
แทนค่า x_o , v_o และ a จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v และตำแหน่ง x ดังนี้

$$x = \frac{v^2 - (13.3)^2}{2(-4.88)}$$

ได้

$$v^2 = (13.3)^2 - 9.76x$$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง v และ x ดังรูป



ตัวอย่างที่ 3.2 กรณีซึ่งวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งไม่คงตัว

รถคันหนึ่งแล่นด้วยความเร็ว 32 km/h คนขับต้องการเร่งแซงรถข้างหน้า ให้ความเร่งของรถคันนี้เป็นฟังก์ชันของความเร็ว ดังนี้

$$a = \frac{dv}{dt} = A - Bv \quad (3.2.8)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัว โดย $A = 0.91$, $B = 0.04$ และ v มีหน่วย m/s สมมติว่าที่ $t = 0$, $x_0 = 0$ ให้หา

ก. ความเร่งของรถคันนี้เมื่อเวลาผ่านไป 2, 3, 10 และ 120 s

ข. อัตราเร็วสูงสุดที่รถคันนี้ทำได้

ค. เวลาที่ความเร่งของรถคันนี้เข้าสู่ศูนย์

ง. ระยะทางซึ่งรถคันนี้เคลื่อนที่ได้เมื่อเวลาผ่านไป 120 s

วิธีทำ ในกรณีนี้ความเร่งมีค่าไม่คงตัว จึงไม่สามารถใช้สมการเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 3.1

ดังนั้นต้องหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ ใหม่ ด้วยการแยกตัวแปรในสมการ (3.2.8) ให้อยู่คนละข้างของสมการแล้วหาปริพันธ์ ดังนี้

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{A - Bv} = \int_0^t dt$$

หรือ

$$\left(\frac{-1}{B}\right) \ln(A - Bv) \Big|_{v_0}^v = t$$

ได้

$$\frac{A - Bv}{A - Bv_0} = e^{-Bt}$$

แก้สมการ ได้ v เป็นฟังก์ชันของ t ดังนี้

$$v = \left(\frac{A}{B}\right)(1 - e^{-Bt}) + v_0 e^{-Bt}$$

แทนค่า v ลงในสมการ (3.2.8) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง a และ t ดังนี้

$$a = (A - Bv_0)e^{-Bt}$$

แทนค่า $v = \frac{dx}{dt}$ ลงในสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง v และ t แล้วหาปริพันธ์ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ t ดังนี้

$$x = \left(\frac{A}{B}\right)t - \left(\frac{A}{B^2}\right)(1 - e^{-Bt}) + \frac{v_0}{B}(1 - e^{-Bt})$$

ก. ความเร่งของรถคันนี้เมื่อเวลาผ่านไป 2, 3, 10 และ 120 s

แปลงหน่วยความเร็วเริ่มแรก v_0 จาก 32 km/h ให้เป็น m/s

$$32 \left(\frac{1}{3.6} \right) \text{ m/s} = 8.89 \text{ m/s}$$

จาก

$$a = (A - Bv_0) e^{-Bt}$$

แทนค่า A, B และ v_0 ลงในสมการ จะได้

$$a = (0.91 - 0.04 \times 8.89) e^{-0.04(t)}$$

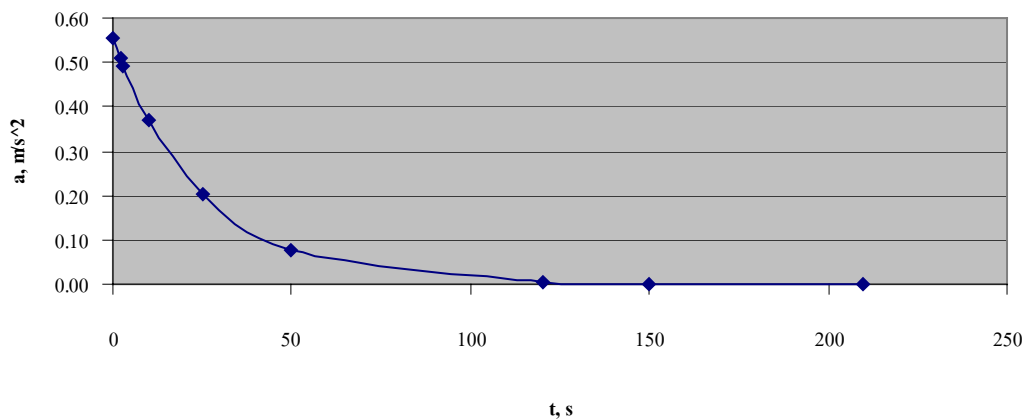
$$\text{เมื่อ } t = 2 \text{ s} \quad a = 0.512 \text{ m/s}^2$$

$$\text{เมื่อ } t = 3 \text{ s} \quad a = 0.492 \text{ m/s}^2$$

$$\text{เมื่อ } t = 10 \text{ s} \quad a = 0.372 \text{ m/s}^2$$

$$\text{เมื่อ } t = 120 \text{ s} \quad a = 0.005 \text{ m/s}^2$$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง a และ t จะเป็นดังนี้



ข. อัตราเร็วสูงสุดที่รถคันนี้ทำได้

อัตราเร็วสูงสุดเกิดขึ้นเมื่อความเร่งเป็นศูนย์ ดังนั้นให้ความเร่งเป็นศูนย์จะได้อัตราเร็วสูงสุด ดังนี้

$$a = A - Bv = 0$$

ได้

$$v_{\max} = \frac{A}{B}$$

แทนค่า A และ B ได้

$$v_{\max} = \frac{0.91}{0.04}$$

$$v_{\max} = 22.75 \text{ m/s}$$

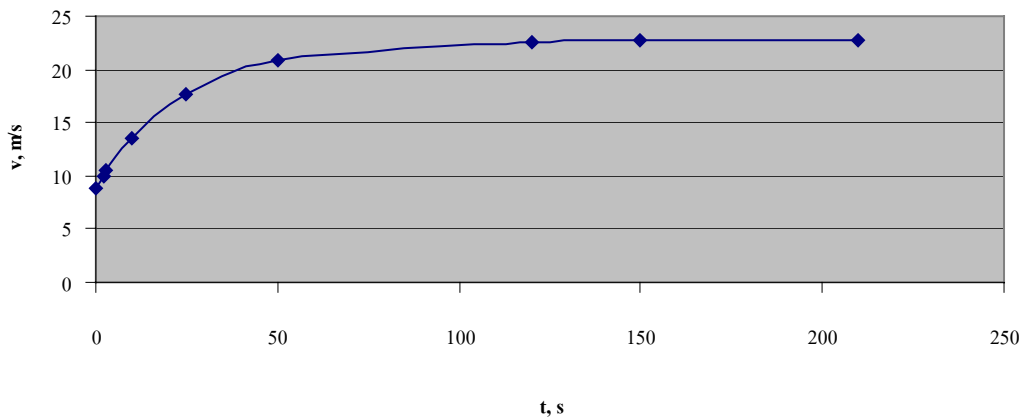
แปลงหน่วย m/s กลับไปเป็น km/h ให้คูณด้วย 3.6 ได้

อัตราเร็วสูงสุด $v_{\max} = 81.9 \text{ km/h}$

จากความสัมพันธ์ระหว่าง v และ t

$$v = \left(\frac{A}{B} \right) (1 - e^{-Bt}) + v_0 e^{-Bt}$$

แทนค่า A, B และ v_0 จะได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง v และ t เป็นดังนี้



ค. เวลาที่ความเร่งของรถคันนี้เข้าสู่ศูนย์

จาก

$$a = (A - Bv_o)e^{-Bt}$$

แทนค่า $a = 0$ และ A, B และ v_o ลงไปในสมการ ได้

$$0 = (0.91 - 0.04 \times 8.89)e^{-0.04t}$$

แก้สมการหาค่าโดยประมาณของ t ได้

$$t = 410 \text{ s}$$

ง. ระยะทางซึ่งรถคันนี้เคลื่อนที่ได้เมื่อเวลาผ่านไป 120 s

จาก

$$x = \left(\frac{A}{B}\right)t - \left(\frac{A}{B^2}\right)(1 - e^{-Bt}) + \frac{v_o}{B}(1 - e^{-Bt})$$

แทนค่า A, B, t และ v_o ลงไปในสมการ จะได้

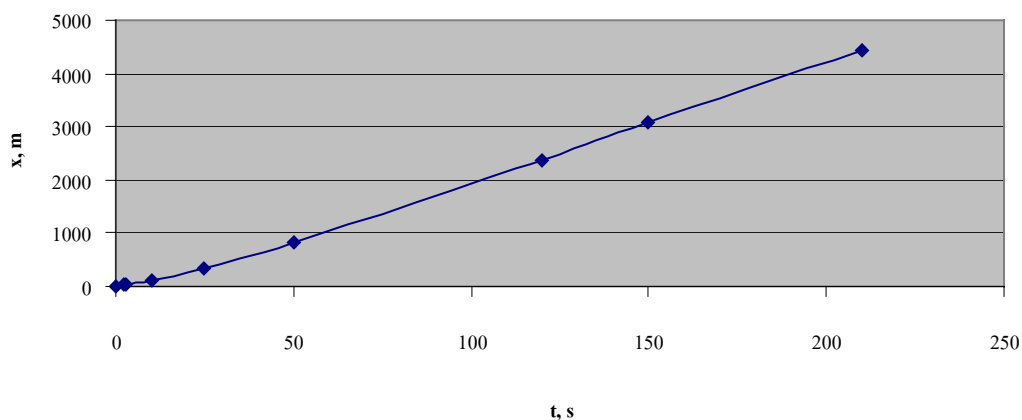
$$x = \left(\frac{0.91}{0.04}\right)(120) - \left(\frac{0.91}{0.04^2}\right)(1 - e^{-0.04(120)}) + \frac{8.89}{0.04}(1 - e^{-0.04(120)})$$

$$x = 2390 \text{ m}$$

หรือ

$$x = 2.39 \text{ km}$$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ t จะเป็นดังนี้



สมการ (3.2.8) แสดงถึงสถานะเมื่อรถแล่นด้วยความเร็วเริ่มแรก แล้วพยายามเร่งความเร็วให้เร็วมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ พิจารณาค่าความเร่งเมื่อ $t = 0$ จะเห็นว่าค่าความเร่งขึ้นกับค่าความเร็วเริ่มแรก ค่า A เป็นค่าความเร่งที่มากที่สุดซึ่งรถสามารถเร่งได้จะเกิดในขณะรถจอดนิ่ง ($v_0 = 0$) ตามทฤษฎีค่าความเร็วสูงสุดของรถเท่ากับ A/B

ค่าของ A และ B ขึ้นกับเทคโนโลยีการออกแบบรถและสามารถวัดค่าออกมาได้จากการทดลอง จากสมการ (3.2.8) ค่า B จะมีหน่วยเป็น $1/\text{เวลา}$ สมการข้างต้นทั้งหมดมีพื้นฐานบนจลนศาสตร์ ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการศึกษาจลนพลศาสตร์เมื่อต้องเกี่ยวข้องกับ แรง มวลและความเร่ง จากกฎข้อที่สองของนิวตัน แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสาม ดังนี้

$$F = ma \quad (3.2.9)$$

เมื่อ

F = แรงซึ่งกระทำต่ออนุภาค, N

m = มวลของอนุภาค, kg

a = ความเร่งของอนุภาค, m/s^2