

บทที่ 4

สมดุลของวัตถุทรงรูป

4.1 คำนำ

จากบทที่แล้วจะเห็นว่าแรงภายนอกซึ่งกระทำต่อวัตถุทรงรูป อาจถูกลดเป็นระบบแรงและแรงคู่ควบกระทำที่จุด O ใด ๆ

วัตถุทรงรูปจะอยู่ในสภาวะสมดุล เมื่อระบบแรงภายนอกซึ่งกระทำต่อวัตถุทรงรูปนั้นเป็นระบบแรงซึ่งสมดุลกับ ศูนย์ นั่นคือเมื่อระบบแรงภายนอกนั้นสามารถลดลงจนไม่เหลือแรงและแรงคู่ควบนั่นเอง

ให้ $\mathbf{R}$ และ $\mathbf{M}_O^R$ เท่ากับ ศูนย์ จะได้เงื่อนไขซึ่งจำเป็นและเพียงพอสำหรับสภาวะสมดุลของวัตถุทรงรูป ดังนี้

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

แยกแรงและโมเมนต์ให้เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวตั้งฉาก จะได้เงื่อนไขซึ่งทำให้วัตถุทรงรูปอยู่ในสภาวะสมดุล ในรูปของสมการสเกลาร์ 6 สมการ คือ

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (4.3)$$

สมการ (4.2) แสดงให้เห็นว่า แรงองค์ประกอบของแรงภายนอกในแกน x, y, z หักล้างกันในแต่ละแกนจนหมด ในทำนองเดียวกันกับสมการ (4.3) ซึ่งผลที่ได้จากระบบแรงภายนอกซึ่งกระทำต่อวัตถุทรงรูปโดยมีเงื่อนไขตามสมการเหล่านี้ จะไม่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบเลื่อนขนาน และจะไม่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบหมุน

4.2 แผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุทรงรูป

ในการแก้ปัญหาโจทย์ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมดุลของวัตถุทรงรูป มีความจำเป็นเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องพิจารณาแรงทั้งหมดซึ่งกระทำต่อวัตถุ ในขณะที่เดียวกันก็ต้องตัดแรงใดก็ตามซึ่งไม่ได้กระทำโดยตรงต่อวัตถุนั้น

การละเลยหรือหลงลืมแรงใดแรงหนึ่งซึ่งกระทำต่อวัตถุ หรือ การเพิ่มเติมแรงอื่นใดซึ่งไม่ได้กระทำต่อวัตถุนั้นโดยตรงจะทำให้เงื่อนไขของการสมดุลผิดเพี้ยนไป ทำให้การแก้ปัญหานั้นได้คำตอบไม่ถูกต้อง

ดังนั้นขั้นตอนแรกในการแก้ปัญหา ควรทำการ วาดแผนภาพวัตถุอิสระ ของวัตถุทรงรูปที่ต้องการพิจารณา หลังจากตัดสินใจเลือกแผนภาพวัตถุอิสระ ซึ่งจะนำมาใช้พิจารณา ให้ทำการแยกวัตถุนั้นจากพื้นหรือวัตถุอื่น ๆ ทั้งสิ้น จากนั้นพิจารณาว่ามีแรงภายนอกใดบ้างกระทำต่อวัตถุอิสระนี้ในตำแหน่งและทิศทางอย่างไร อย่างลึ้ม **น้ำหนักของวัตถุอิสระ** ต้องรวมเข้าไปในระบบด้วยโดยให้กระทำที่ศูนย์กลางของวัตถุนั้น (ยกเว้นกรณีซึ่งน้ำหนักของวัตถุน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงภายนอกอื่น ๆ) ถ้าวัตถุอิสระนั้นประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายชิ้นอยู่รวมกัน ต้องไม่รวมแรงซึ่งเกิดจากแต่ละชิ้นส่วนนั้นกระทำต่อกันเข้าไปในระบบของแรงภายนอก เนื่องจากแรงเหล่านี้ถือว่าเป็นแรงภายใน เมื่อพิจารณาวัตถุอิสระทั้งชิ้นใหญ่

ขนาดและทิศทางของแรงภายนอกที่รู้แล้ว ควรเขียนลงไปในแผนภาพวัตถุอิสระให้ชัดเจน ข้อควรระวัง ทิศทางการชี้แนวกระทำของแรงภายนอกต่าง ๆ นั้นต้องแสดงทิศทางชี้พุ่งกระทำต่อตัววัตถุอิสระ ไม่ใช่ทิศทางของแรงซึ่งกระทำออกมาจากวัตถุอิสระ ปกติแรงภายนอกซึ่งรู้แล้วจะรวมถึงน้ำหนักของวัตถุอิสระด้วย

แรงภายนอกซึ่งยังไม่รู้ค่า ได้แก่ **แรงปฏิกิริยา** หรือบางครั้งเรียกว่า **แรงต้านทาน** (constraining forces) ซึ่งเกิดจากพื้นหรือวัตถุอื่น ๆ ซึ่งพยายามต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุอิสระทำให้วัตถุอิสระนั้นยังคงอยู่ในตำแหน่งเดิม แรงปฏิกิริยานี้จะเกิดขึ้นที่จุดซึ่งวัตถุอิสระถูกรองรับ หรือ ติดต่อกับวัตถุอื่น ๆ

ในแผนภาพวัตถุอิสระ ควรแสดงมิติต่าง ๆ เนื่องจากอาจมีความจำเป็นต้องใช้ในการคำนวณโมเมนต์ของแรงต่าง ๆ ส่วนรายละเอียดอื่น ๆ ให้ละทิ้งไป

สมดุลใน 2 มิติ

4.3 ปฏิริยาที่จุดรองรับและจุดซึ่งติดต่อกันสำหรับโครงสร้าง 2 มิติ

ในกรณีนี้จะพิจารณาโดยสมมติให้ตัวโครงสร้างมี 2 มิติ แรงภายนอกซึ่งกระทำ และแรงปฏิริยาต่าง ๆ อยู่ในระนาบเดียวกันกับตัวโครงสร้าง

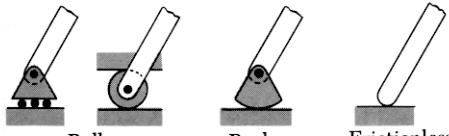
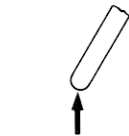
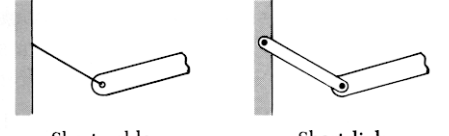
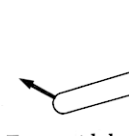
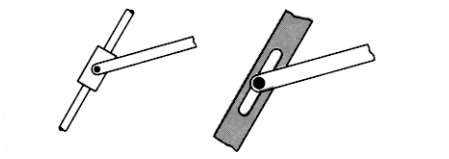
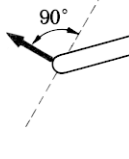
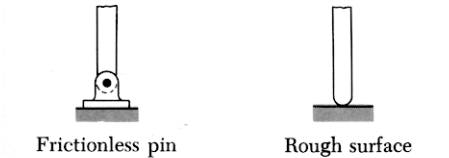
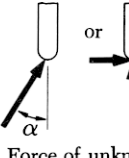
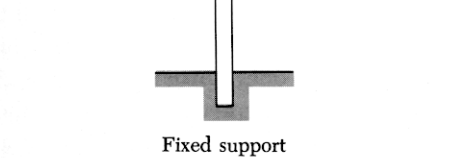
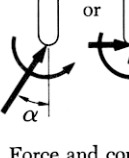
แรงปฏิริยาซึ่งกระทำต่อโครงสร้าง 2 มิติ แบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่มตามลักษณะของจุดรองรับหรือจุดติดต่อกัน ได้ดังนี้

1. แรงปฏิริยาซึ่งสมดุลกับแรง 1 แรงซึ่งรู้แนวการกระทำ

จุดรองรับหรือจุดติดต่อกัน ซึ่งทำให้เกิดแรงปฏิริยาแบบนี้คือ ลูกกลิ้งหรือลูกโยก (rollers or rocker) ผิวซึ่งไม่มีความฝืด (frictionless surfaces) เคเบิลสั้น ๆ หรือชิ้นต่อสั้น ๆ (short cable or short links) ปลอกรอบแท่งซึ่งไม่มีความฝืดหรือสลักในช่องเลื่อน (collars on frictionless rods or frictionless pins in slot) จากรูปที่ 4.1 จุดรองรับหรือจุดต่อเหล่านี้ด้านทานการเคลื่อนที่ได้ในแนวเดียวเท่านั้น แรงปฏิริยาที่เกิดขึ้นจะเป็นตัวไม่รู้ค่า 1 ตัว ซึ่งได้แก่ ขนาดของแรงปฏิริยา แนวของการกระทำของแรงปฏิริยาที่รู้ควรแสดงในแผนภาพวัตถุอิสระอย่างชัดเจน ส่วนทิศทางและแนวของการกระทำที่รู้ของแรงปฏิริยาต้องแสดงลงในแผนภาพวัตถุอิสระเช่นกัน เช่น ในกรณีผิวไม่มีความฝืดแรงปฏิริยาจะพุ่งออกและตั้งฉากกับผิวนั้น หรือในเคเบิลแรงดึงที่เกิดขึ้นจะมีแนวของการกระทำไปตามแนวของเคเบิล และมีทิศทางพุ่งออกจากจุดซึ่งเคเบิลกระทำ สำหรับลูกกลิ้งซึ่งมีรางคู่ ชิ้นต่อสั้น ๆ ปลอกรอบแท่งซึ่งไม่มีความฝืด หรือสลักในช่องเลื่อน แรงปฏิริยาอาจชี้ไปทางด้านใดด้านหนึ่งของแนวสัมผัส ส่วนลูกกลิ้งซึ่งมีรางเดี่ยวและลูกโยกโดยทั่วไปจะสมมติให้ทิศทางของแรงปฏิริยาสามารถด้านกลับในทิศตรงข้ามได้

2. แรงปฏิริยาซึ่งสมดุลกับแรง 1 แรงซึ่งไม่รู้แนวการกระทำ

จุดรองรับในกลุ่มนี้ได้แก่ หมุดลื่นหรือบานพับลื่น (frictionless pins or hinges) และผิวหยาบ (rough surfaces) ซึ่งสามารถด้านการเคลื่อนที่ของวัตถุอิสระแบบเลื่อนขนานได้ทุกทิศทาง แต่ไม่สามารถด้านการหมุนรอบจุดต่อได้ แรงปฏิริยาในกลุ่มนี้เกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่า 2 ตัวและโดยปกติจะแทนด้วยแรงองค์ประกอบในแกน x และ y ในกรณีผิวหยาบแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉากกับผิวจะต้องพุ่งชี้ออกไปจากผิวนั้น จากรูปที่ 4.1

Support or Connection	Reaction	Number of Unknowns
 Rollers Rocker Frictionless surface	 Force with known line of action	1
 Short cable Short link	 Force with known line of action	1
 Collar on frictionless rod Frictionless pin in slot	 Force with known line of action	1
 Frictionless pin or hinge Rough surface	 Force of unknown direction	2
 Fixed support	 Force and couple	3

รูปที่ 4.1 (Beer, 1988: 129)

3. แรงปฏิกิริยาซึ่งสมดุลกับแรง 1 แรงและแรงคู่ควบ 1 คู่

จุดรองรับในกลุ่มนี้ได้แก่ จุดรองรับตรึง (fixed supports) ซึ่งจะต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุอิสระได้ทุกลักษณะ นั่นคือยึดตรึงวัตถุอิสระได้อย่างสมบูรณ์ ในความเป็นจริงแล้วจุดรองรับตรึงนี้จะก่อให้เกิดแรงปฏิกิริยาโดยรอบตัวผิวสัมผัสทั้งหมด แต่เราสามารถลดระบบแรงนี้ให้เหลือเป็นแรง 1 แรง และแรงคู่ควบ 1 คู่ แรงปฏิกิริยาในกลุ่มนี้จะเกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว ซึ่งประกอบด้วยแรงองค์ประกอบ 2 แรง ของแรง 1 แรง และโมเมนต์ของแรงคู่ควบ 1 คู่ ดูรูปที่ 4.1

เมื่อทิศทางของแรงและแรงคู่ควบที่จุดรองรับแบบนี้ยังไม่รู้ได้อย่างชัดเจน ให้สมมติทิศทางขึ้นมา ก่อน ถ้าคำตอบออกมาเป็นบวกแสดงว่าทิศทางที่สมมตินั้นถูกต้องแล้ว แต่ถ้าผลออกมาเป็นลบ แสดงว่ามีทิศทางตรงข้ามกับที่สมมติไว้

4.4 สมดุลของวัตถุทรงรูปใน 2 มิติ

เงื่อนไขของการสมดุลของวัตถุทรงรูปจะง่ายขึ้นในกรณีโครงสร้าง 2 มิติ ให้แกน x และ y อยู่ในระนาบของโครงสร้าง จะได้

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_o$$

สมการสมดุล 6 สมการจะลดเหลือ 3 สมการ คือ

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_o = 0 \quad (4.4)$$

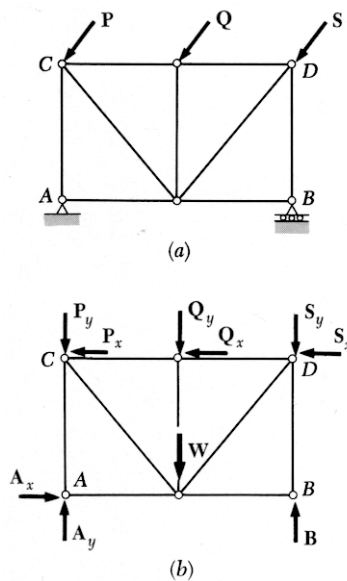
ในกรณีทั่ว ๆ ไป ผลรวมของโมเมนต์รอบจุดใด ๆ ต้องเท่ากับ ศูนย์ ด้วย ดังนั้นถ้าให้ A เป็นจุดใด ๆ ในระนาบของโครงสร้างที่พิจารณา จะเขียนสมการ (4.4) อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad (4.5)$$

จากข้อจำกัดของจำนวนสมการของการสมดุลซึ่งมีเพียง 3 สมการ ทำให้ใช้แก้ปัญหาซึ่งมีตัวไม่รู้ค่าได้ไม่เกิน 3 ตัว

โดยปกติ แรงซึ่งไม่รู้ค่า จะได้แก่ แรงปฏิกิริยา ซึ่งจะมีจำนวนมากหรือน้อยขึ้นกับชนิดลักษณะของจุดรองรับหรือจุดต่อ

พิจารณาตัวอย่างโครงข้อหมุนหรือโครงถัก (truss) รูปที่ 4.2(a) ซึ่งอยู่ภายใต้การกระทำของแรง P, Q และ S โครงข้อหมุนนี้ถูกยึดอยู่กับที่ด้วยหมุดลื่น ที่ A และลูกกลิ้งที่ B



รูปที่ 4.2 (Beer, 1988: 130)

หมุดลื่นป้องกันไม่ให้จุด A เคลื่อนที่โดยการออกแรงกระทำต่อโครงข้อหมุน ซึ่งอาจแยกเป็นแรงองค์ประกอบ 2 แรงได้แก่ A_x และ A_y

ลูกกลิ้งป้องกันโครงข้อหมุนจากการหมุนรอบจุด A โดยการออกแรงกระทำต่อโครงข้อหมุนในแนวตั้ง 1 แรง ได้แก่ แรง B

แผนภาพวัตถุอิสระของโครงข้อหมุนแสดงในรูปที่ 4.2(b) ซึ่งประกอบด้วยแรงปฏิกิริยา A_x , A_y และ B แรงกระทำได้แก่ P, Q, S และ น้ำหนักของโครงข้อหมุน W

ให้ผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งหมดในแผนภาพวัตถุอิสระรอบจุด A เท่ากับ ศูนย์ เขียนสมการ $\sum M_A = 0$ จะคำนวณหาขนาดของแรง B ออกมาได้ เนื่องจากโมเมนต์ซึ่งเกิดจาก A_x และ A_y เท่ากับ ศูนย์ เพราะว่าแนวแรงของแรงทั้ง 2 นี้ผ่านจุด A

ให้ผลรวมของแรงองค์ประกอบต่าง ๆ ในแกน x และ y เท่ากับ ศูนย์ เขียนสมการ $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ จะคำนวณหาค่าแรงองค์ประกอบ A_x และ A_y ได้ตามลำดับ

อาจจะได้สมการเพิ่มอีกหลายสมการโดยการให้ผลรวมของโมเมนต์ของแรงทั้งหมดในแผนภาพวัตถุอิสระรอบจุดอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จุด A เท่ากับ ศูนย์ เช่น ให้ผลรวมโมเมนต์รอบ B เท่ากับ ศูนย์

เขียนสมการได้เป็น $\sum M_B = 0$ แต่สมการใหม่ที่ได้นี้ไม่ได้ให้ข้อมูลอะไรใหม่ขึ้นมาเลย เนื่องจากเงื่อนไข 3 ประการ $\sum M_A = 0, \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ ซึ่งได้ใช้ไปแล้วก่อนหน้านี้ให้ความหมายสมบูรณ์อยู่แล้วว่า ระบบแรงทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุอิสระที่พิจารณานั้นมีค่าสมมูลกับศูนย์ นั่นคือสมการที่ได้ขึ้นใหม่นี้ไม่ได้เป็นอิสระจาก 3 สมการเดิม จึงไม่สามารถใช้หาตัวไม่รู้ค่าตัวที่ 4 ได้ แต่สามารถใช้ประโยชน์จากสมการใหม่นี้ได้ โดยใช้ตรวจสอบคำตอบที่ได้จาก 3 สมการแรก (คำตอบที่ได้ต้องเท่ากัน)

ในขณะที่ไม่สามารถจะใช้สมการอื่นเพิ่มสอดเข้าไปในสมการสมดุล 3 สมการได้ แต่ก็สามารถใช้สมการอื่นแทนที่กันได้โดยให้คงสมการที่ใช้มีเพียง 3 สมการ เช่น ใช้ชุดของสมการดังนี้

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad (4.6)$$

ซึ่งก็ให้เงื่อนไขของการสมดุลเพียงพอ โดย 2 สมการแรกแสดงให้เห็นว่า แรงภายนอกจะต้องถูกลดเหลือแรงเดียว 1 แรง กระทำที่จุด A ในแนวตั้ง ส่วนสมการที่สาม แสดงว่าโมเมนต์เนื่องจากแรงเดียวนี้ออบจุด B ต้องเท่ากับศูนย์ แต่เนื่องจากแนวกระทำของแรงเดียวนี้ไม่ผ่านจุด B โมเมนต์เนื่องจากแรงนี้ออบจุด B จะเป็นศูนย์ได้ก็ต่อเมื่อแรงเดียวนี้ต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเมื่อแรงทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุทรงรูปนี้ถูกลดให้เหลือเท่ากับศูนย์ หรือแรงลัพธ์ทั้งหมดเป็นศูนย์ จะทำให้วัตถุทรงรูปอยู่ในสภาวะสมดุล ชุดสมการสมดุลชุดที่สามซึ่งสามารถใช้ได้ ได้แก่

$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0 \quad (4.7)$$

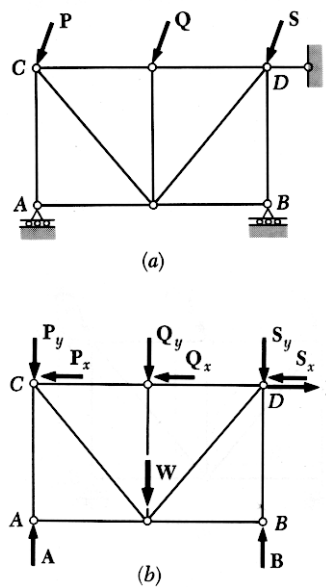
ในทางปฏิบัติ ควรเลือกสมการสมดุลที่มีตัวไม่รู้ค่าเพียง 1 ตัวซึ่งทำให้สามารถหาตัวไม่รู้ค่านั้นได้ทันที เช่น เลือกใช้สมการ $\sum M = 0$ รอบจุดซึ่งมีแนวแรงของตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว มาตัดกัน แต่ถ้าแนวแรงของ 2 ตัวไม่รู้ค่า ขนานกันก็ควรเลือกใช้สมการ $\sum F = 0$ ในแนวซึ่งตั้งฉากกับแนวแรงของ 2 ตัวไม่รู้ค่า

ตัวอย่างเช่น ในกรณีโครงข้อหมุนดังรูปที่ 4.3 ถูกยึดติดกับที่ด้วยลูกกลิ้ง 2 ตัวที่ A และ B และข้อต่อสั้น ที่ D

แรงปฏิกิริยาที่ A และ B จะถูกกำจัดไป โดยการรวมแรงองค์ประกอบในแกน x

แรงปฏิกิริยาที่ A และ D จะถูกกำจัดไป โดยรวมโมเมนต์รอบจุด C

แรงปฏิกิริยาที่ B และ D จะถูกกำจัดไป โดยการรวมโมเมนต์รอบ D



รูปที่ 4.3 (Beer, 1988: 131)

ดังนั้นชุดของสมการสมดุลที่ต้องการใช้ ได้แก่

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_C = 0 \quad \sum M_D = 0$$

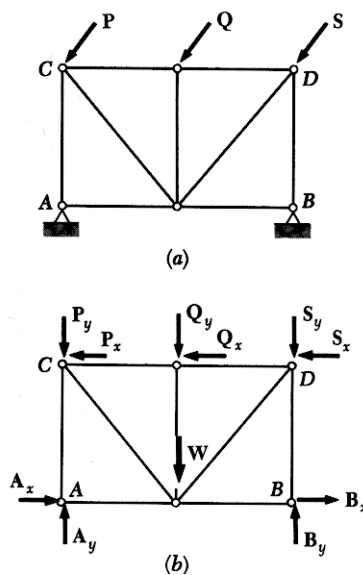
แต่ละสมการจะมีตัวไม่รู้ค่าเพียง 1 ตัวเท่านั้น

4.5 แรงปฏิกิริยาซึ่งไม่สามารถหาได้ด้วยสมการสมดุล (statically indeterminate reactions)

ในตัวอย่างเกี่ยวกับโครงข้อหมุน 2 ตัวอย่างในหัวข้อ 4.4 จุตรองรับซึ่งทำให้วัตถุคงรูปไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ ภายใต้สภาพน้ำหนักบรรทุกที่กำหนดให้ หรือ ภายใต้สภาพน้ำหนักบรรทุกซึ่งมีลักษณะอย่างไรก็ตาม ในกรณีเช่นนี้เรียกวัดถุคงรูปนั้นว่ามีลักษณะเป็นแบบสามารถต้านทานการเคลื่อนที่ได้อย่างสมบูรณ์ (completely constrained) และแรงปฏิกิริยาซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่า 3 ตัวนั้นสามารถหาออกมาโดยใช้สมการสมดุล 3 สมการ เรียกแรงปฏิกิริยาเหล่านี้ว่าเป็นแรงปฏิกิริยาซึ่งสามารถหาได้ด้วยสมการสมดุล (statically determinate reactions)

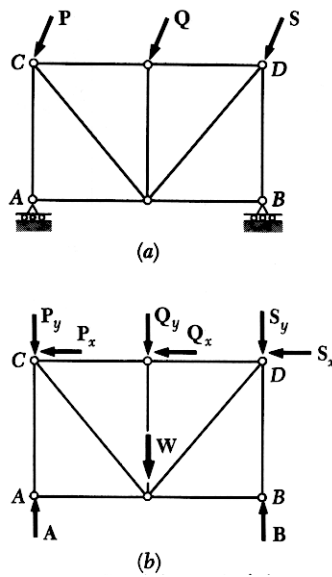
คราวนี้ พิจารณาโครงข้อหมุนในรูปที่ 4.4(a) ซึ่งถูกยึดติดด้วยหมุดลื่นที่ A และ B จุตรองรับเหล่านี้ทำให้มีจำนวนการต้านทานการเคลื่อนที่ของโครงข้อหมุนนี้มากเกินไปจนเกินไป ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกที่กำหนดให้หรือน้ำหนักบรรทุกใดๆ ก็ตาม จากแผนภาพวัตถุอิสระในรูปที่ 4.4(b) พบว่า

มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว ซึ่งมีมากกว่าจำนวนสมการสมดุลซึ่งมีอยู่เพียง 3 สมการ ทำให้ไม่สามารถหาค่าตัวไม่รู้ค่าทั้งหมดได้ จากสมการ $\sum M_A = 0$ และ $\sum M_B = 0$ จะคำนวณหาแรงองค์ประกอบในแนวดิ่ง B_y และ A_y ได้ตามลำดับส่วนสมการ $\sum F_x = 0$ จะให้เพียงผลรวม $A_x + B_x = 0$ ไม่สามารถหาค่าของแต่ละตัวออกมาได้โดยการใช้สมการสมดุล A_x และ B_x นี้ เป็นแรงปฏิกิริยาซึ่งไม่สามารถหาได้ด้วยสมการสมดุล (statically indeterminate) แต่แรงปฏิกิริยาทั้ง 2 ตัวนี้สามารถหาออกมาได้ โดยการพิจารณาการเปลี่ยนรูปของโครงข้อหมุนภายใต้สภาวะที่แน่นอนจนกระทั่งกำหนดให้ นั่นคือต้องพิจารณาโครงข้อหมุนในลักษณะที่ไม่เป็นวัตถุทรงรูป ซึ่งนักศึกษาจะได้ศึกษาต่อไปในวิชากลศาสตร์ของวัสดุ (Mechanics of Materials)



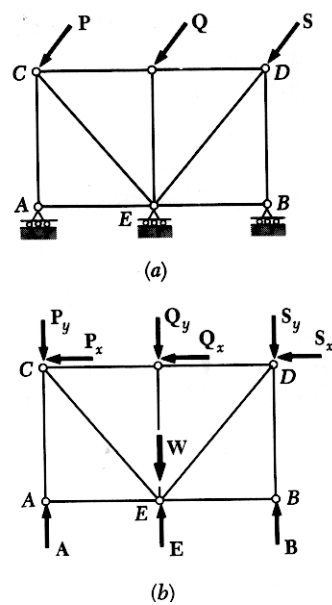
รูปที่ 4.4 (Beer, 1988: 132)

พิจารณาโครงข้อหมุนในรูปที่ 4.5 ซึ่งมีจุดรองรับที่ A และ B เป็นลูกกลิ้ง จะเห็นว่าจุดรองรับในลักษณะนี้ให้จำนวนการต้านทานการเคลื่อนที่ของโครงข้อหมุนไม่เพียงพอ โดยสามารถต้านทานการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง แต่ไม่สามารถต้านทานการเคลื่อนที่ในแนวนอนได้ โครงข้อหมุนในลักษณะนี้เรียกว่ามีลักษณะเป็นแบบสามารถต้านทานการเคลื่อนที่ได้บางส่วน (partially constrained) พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระในรูปที่ 4.5(b) จะเห็นว่าแรงปฏิกิริยาเพียง 2 ตัวที่ A และ B ซึ่งทำให้ตัวไม่รู้ค่ามีจำนวนน้อยกว่าจำนวนสมการสมดุล และมีสมการสมดุล 1 สมการซึ่งไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่ต้องการ ในขณะที่สมการ $\sum M_A = 0$ และ $\sum M_B = 0$ เป็นจริงได้โดยการเลือกขนาดของแรงปฏิกิริยาที่ A และ B ซึ่งเหมาะสม ส่วนสมการ $\sum F_x = 0$ จะไม่เป็นไปตามเงื่อนไขถ้าผลรวมในแนวราบของแรงองค์ประกอบของแรงกระทำทั้งหมดไม่เท่ากับศูนย์ นั่นคือโครงข้อหมุนนี้ไม่สามารถอยู่ในสภาวะสมดุลได้ภายใต้สภาวะที่แน่นอนจนกระทั่งโดยทั่วไป



รูปที่ 4.5 (Beer, 1988: 132)

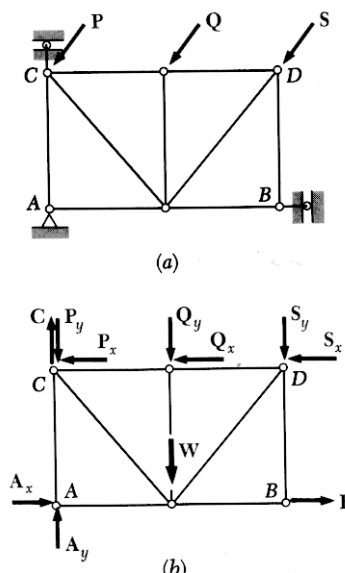
สรุปได้ว่าวัตถุทรงรูปหนึ่งจะมีลักษณะเป็นแบบสามารทด้านทานการเคลื่อนที่ได้อย่างสมบูรณ์ และแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับจะสามารถหาได้ด้วยสมการสมดุลนั้น จะต้องมีย่านวนตัวไม่รู้ค่าเท่ากับจำนวนสมการสมดุล แต่เงื่อนไขนี้ก็ได้เป็นหลักประกันเสมอไปทุกกรณี พิจารณาตัวอย่างโครงข้อหมุนในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 (Beer, 1988: 133)

เป็นโครงข้อหมุนซึ่งถูกยึดไว้ด้วย ลูกกลิ้งที่ A, B และ E แม้จะมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าอยู่ 3 ตัว A, B และ E แต่พบว่าสมการ $\sum F_x = 0$ จะไม่เป็นจริงตามเงื่อนไขถ้าผลรวมของแรงองค์ประกอบของแรงกระทำทั้งหมดในแนวราบไม่เท่ากับศูนย์ ในกรณีนี้มีจำนวนแรงด้านพอยเพียงแต่การจัดตำแหน่งของแรงด้านเหล่านี้ไม่เหมาะสม ทำให้โครงข้อหมุนนี้สามารถเคลื่อนที่ในแนวราบได้อย่างอิสระ เรียกโครงข้อหมุนนี้ว่ามีลักษณะเป็นแบบจัดตำแหน่งของแรงด้านทานไม่เหมาะสม (improperly constrained) และเนื่องจากเหลือสมการที่จะใช้หาตัวไม่รู้ค่าเพียง 2 สมการในขณะที่มีตัวไม่รู้ค่าถึง 3 ตัว ดังนั้นการจัดตำแหน่งของแรงด้านที่ไม่เหมาะสมจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาซึ่งไม่สามารถหาได้ด้วยสมการสมดุลได้เช่นกัน

อีกตัวอย่างหนึ่งในการจัดตำแหน่งของแรงด้านทานที่ไม่เหมาะสม พิจารณาโครงข้อหมุนในรูปที่ 4.7 ซึ่งถูกยึดไว้ด้วยหมุดลื่นที่ A และลูกกลิ้งที่ B และ C ทำให้เกิดตัวไม่รู้ค่ารวมเป็น 4 ตัวซึ่งมากกว่าจำนวนสมการสมดุลที่มีอยู่ แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับเหล่านี้ก็จะ เป็นแบบไม่สามารถหาได้ด้วยสมการสมดุล ส่วนในอีกแห่งหนึ่งจะพบว่าไม่สามารถใช้สมการ $\sum M_A = 0$ ได้ทุกสภาพลักษณะน้ำหนักบรรทุกทุกโดยทั่วไป เนื่องจากแนวแรงปฏิกิริยาที่ B และ C ถูกเงื่อนไขจากลักษณะจุดรองรับที่เป็นลูกกลิ้งบังคับให้มีแนวผ่านจุด A เท่านั้น ทำให้หาได้น้ำหนักบรรทุกทุกโดยทั่วไป ถ้าผลรวมของแรงกระทำไม่เท่ากับศูนย์ โครงข้อหมุนนี้จะสามารถหมุนรอบจุด A ได้ โครงข้อหมุนนี้เรียกว่ามีลักษณะเป็นแบบจัดตำแหน่งของแรงด้านทานไม่เหมาะสม

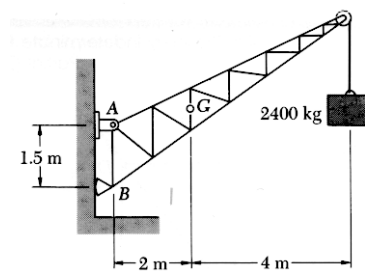


รูปที่ 4.7 (Beer, 1988: 133)

สรุปได้ว่า วัตถุทรงรูปจะมีลักษณะเป็นแบบจัดตำแหน่งของแรงต้านทานไม่เหมาะสม ถ้าจุดรองรับถูกจัดในลักษณะที่ทำให้แรงปฏิกิริยาทั้งหมดมีแนวแรงมาตัดกันจุดเดียวกัน หรือ มีแนวแรงขนานกันหมด แม้ว่าจุดรองรับเหล่านั้นจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาที่มีจำนวนมากเพียงพอก็ตาม

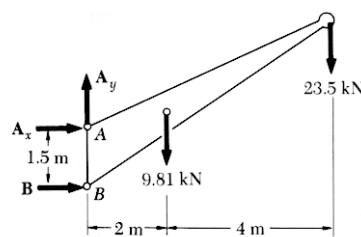
ตัวอย่าง 4.1

ปั้นจั่นตริง 1 ตัว มีมวล 1000 kg ใช้ยกหีบ 2400 kg ซึ่งถูกตรึงอยู่กับที่ด้วยหมุดลื่น ที่ A และลูกโยก ที่ B ศูนย์ถ่วงของปั้นจั่นอยู่ที่จุด G ให้หาแรงองค์ประกอบของแรงปฏิกิริยาที่ A และ B



(Beer, 1988: 134)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 134)

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของตัวปั้นจั่น

หาน้ำหนักของปั้นจั่น

$$W = mg = 9.81 \times 1000 = 9810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$$

$$\text{หาน้ำหนักของหีบ} = 9.81 \times 2400 = 23500 \text{ N} = 23.5 \text{ kN}$$

แรงปฏิกิริยาที่ A เป็นแรง 1 แรง ซึ่งไม่รู้ทิศทาง สมมติอยู่ในรูปแรงองค์ประกอบ A_x , A_y

แรงปฏิกิริยาที่ B ต้องตั้งฉากกับผิวลูกโยก ดังนั้นแรง B จะอยู่ในแนวราบ

สมมติทิศทางของ A_x , A_y และ B ดังรูป

หา B

เพื่อจะกำจัด A_x , A_y ออกไปให้คงเหลือเฉพาะ **B** พิจารณาผลรวมของโมเมนต์รอบจุด A ให้เป็นศูนย์ โมเมนต์ของแต่ละแรงหาได้จากผลคูณของขนาดของแรงนั้นกับระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังแนวแรงนั้น จะได้

$$\sum M_A = 0: +B(1.5 \text{ m}) - (9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$

$$B = +107.1 \text{ kN} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{B = 107.1 \text{ kN} \rightarrow} \quad \text{ตอบ}$$

(เนื่องจากค่าของ **B** ที่ได้ออกมาเป็นบวก แสดงว่าทิศทางของ **B** ถูกต้องตามสมมติ)

หา A_x

ขนาดของ A_x หาได้จากพิจารณา ผลรวมของแรงองค์ประกอบทั้งหมดในแนวราบให้เท่ากับศูนย์

$$\sum F_x = 0: A_x + B = 0$$

$$A_x + 107.1 \text{ kN} = 0$$

$$A_x = -107.1 \text{ kN} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{A_x = 107.1 \text{ kN} \leftarrow} \quad \text{ตอบ}$$

(เนื่องจากค่าของ A_x ที่ได้ออกมาเป็นลบ แสดงว่าทิศทาง A_x ตรงข้ามกับที่สมมติ)

หา A_y

พิจารณาให้ ผลรวมของแรงองค์ประกอบในแนวตั้งเท่ากับศูนย์

$$\sum F_y = 0: A_y - 9.81 \text{ kN} - 23.5 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33.3 \text{ kN} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{A_y = 33.3 \text{ kN} \uparrow} \quad \text{ตอบ}$$

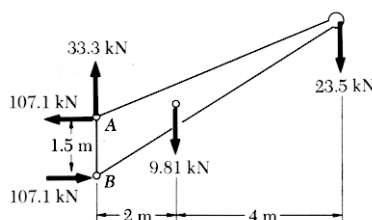
รวมแรงองค์ประกอบ A_x , A_y แบบเวกเตอร์จะได้แรงปฏิกิริยา $\mathbf{A = 112.2 \text{ kN} \searrow 17.3^\circ}$

ตรวจสอบคำตอบ

พิจารณาให้ผลรวมของโมเมนต์รอบจุดอื่น ให้เท่ากับศูนย์ เลือกจุด B จะได้

$$\sum M_B = -(9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107.1 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) = 0$$

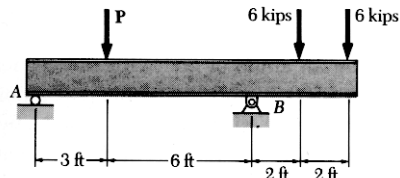
ปรากฏว่าเป็นจริงแสดงว่าคำตอบถูกต้องแล้ว



(Beer, 1988: 134)

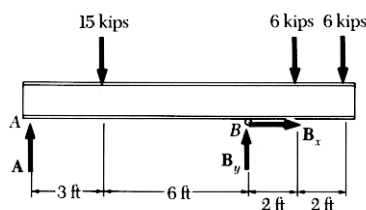
ตัวอย่าง 4.2

น้ำหนักบรรทุกทุก 3 น้ำหนักกระทำต่อกาน ดังรูป กานถูกรองรับด้วยลูกกลิ้ง ที่ A และหมุดลื่น ที่ B โดยไม่คิมน้ำหนักของกาน ให้หาแรงปฏิกิริยาที่ A และ B เมื่อ $P = 15$ kips



(Beer, 1988: 135)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 135)

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของกาน โดยมีแรงปฏิกิริยาที่จุด A อยู่ในแนวตั้งให้เท่ากับ A แรงปฏิกิริยาที่จุด B เขียนในรูปแรงองค์ประกอบ 2 แรง คือ B_x และ B_y โดยมีทิศทางดังรูป

ใช้สมการสมดุล เพื่อหาแรงปฏิกิริยา ดังนี้

$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad B_x = 0$$

$$B_x = 0 \quad \text{ตอบ}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0: \quad -(15 \text{ kips})(3 \text{ ft}) + B_y(9 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(11 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(13 \text{ ft}) = 0$$

$$B_y = +21.0 \text{ kips} \quad B_y = 21.0 \text{ kips} \uparrow \quad \text{ตอบ}$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0: \quad -A(9 \text{ ft}) + (15 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(2 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(4 \text{ ft}) = 0$$

$$A = +6.00 \text{ kips} \quad A = 6.00 \text{ kips} \uparrow \quad \text{ตอบ}$$

ตรวจสอบ ว่าผลรวมของแรงองค์ประกอบในแนวตั้งเท่ากับศูนย์หรือไม่

$$+\uparrow \sum F_y = +6.00 \text{ kips} - 15 \text{ kips} + 21 \text{ kips} - 6 \text{ kips} - 6 \text{ kips} = 0$$

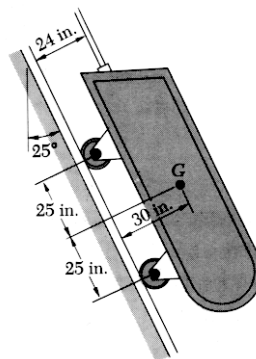
หมายเหตุ

ในปัญหานี้ แรงปฏิกิริยาที่ A และ B ต่างก็อยู่ในแนวตั้งนั้น มีเหตุผลซึ่งแตกต่างกัน ดังนี้ ที่ A จุกรอบรับเป็นลูกกลิ้ง ดังนั้นจึงทำให้ไม่มีแรงปฏิกิริยาอยู่ในแนวนอน ส่วนที่ B แรงองค์ประกอบในแนวราบของแรงปฏิกิริยาเป็นศูนย์ เพราะเงื่อนไขของสมการสมดุล $\sum F_x = 0$ ประกอบกับไม่มีแรงกระทำต่อคานในแนวราบ

เราอาจจะสังเกตพบแต่แรกแล้วว่าแรงปฏิกิริยาที่ B ต้องอยู่ในแนวตั้งพร้อมทั้งอาจจะละเอียดที่จะคำนึงถึงแรงองค์ประกอบในแนวราบ B_x ไปตั้งแต่แรก ซึ่งการปฏิบัติเช่นนั้นอาจจะทำให้ลืมนึกถึงแรงองค์ประกอบ B_x ในกรณีที่สภาพน้ำหนักบรรทุกเปลี่ยนไป เช่นเมื่อน้ำหนักบรรทุกในแนวราบด้วย

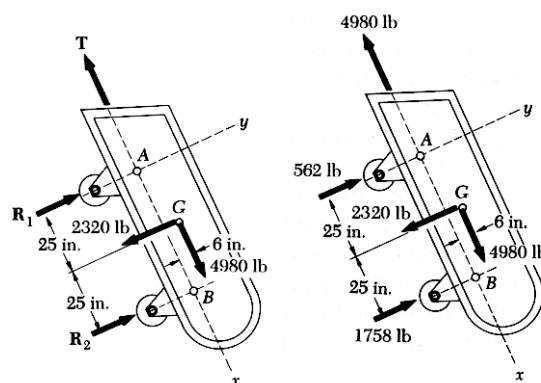
ตัวอย่าง 4.3

รถบรรทุกของอยู่นิ่งบนพื้นซึ่งเอียงทำมุมกับแนวดิ่ง 25° น้ำหนักทั้งหมดของรถและของเท่ากับ 5500 lb และให้กระทำที่จุดซึ่งอยู่ห่างจากพื้น 30 นิ้ว ในแนวกึ่งกลางของแกนเพลาล้อทั้ง 2 รถนี้ถูกยึดไว้ด้วยเคเบิลซึ่งอยู่ห่างจากพื้น 24 นิ้ว ให้หาแรงดึงในเคเบิลและแรงปฏิกิริยาที่ล้อแต่ละคู่



(Beer, 1988: 136)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 136)

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของรถ โดยมีแรงปฏิกิริยาที่แต่ละล้ออยู่ในแนวตั้งฉากกับพื้น ส่วนแรงดึง T อยู่ในแนวนอนกับพื้น

ในกรณีนี้จะเป็นการสะดวก ถ้าเลือกแกน x ให้นานกับพื้นและแกน y ตั้งฉากกับพื้น เนื่องจากแรงส่วนใหญ่อยู่ในแนวตั้ง 2 นี้

แยกแรงซึ่งเกิดจาก น้ำหนักรถให้อยู่ในแกน x และ y

$$W_x = +(5500 \text{ lb}) \cos 25^\circ = +4980 \text{ lb}$$

$$W_y = -(5500 \text{ lb}) \sin 25^\circ = -2320 \text{ lb}$$

ใช้สมการสมดุล พิจารณาโมเมนต์รอบจุด A เพื่อจะกำจัดแรง T และ R_1 ให้เหลือเฉพาะ R_2 และ W

$$\sum M_A = 0: \quad -(2320 \text{ lb})(25 \text{ in}) - (4980 \text{ lb})(6 \text{ in}) + R_2(50 \text{ in}) = 0$$

$$R_2 = +1758 \text{ lb} \quad \mathbf{R_2 = 1758 \text{ lb} \nearrow} \quad \text{ตอบ}$$

พิจารณาโมเมนต์รอบจุด B เพื่อจะกำจัดแรง T และ R_2

$$\sum M_B = 0 \quad (2320 \text{ lb})(25 \text{ in}) - (4980 \text{ lb})(6 \text{ in}) - R_1(50 \text{ in}) = 0$$

$$R_1 = +562 \text{ lb} \quad \mathbf{R_1 = 562 \text{ lb} \nearrow} \quad \text{ตอบ}$$

พิจารณาผลรวมของแรงองค์ประกอบในแกน x จะได้ค่า T

$$\sum F_x = 0: \quad +(4980 \text{ lb}) - T = 0$$

$$T = +4980 \text{ lb} \quad \mathbf{T = 4980 \text{ lb} \nwarrow} \quad \text{ตอบ}$$

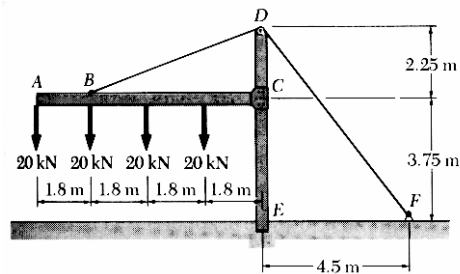
ตรวจสอบ

$$\sum F_y = +(562 \text{ lb}) + (1758 \text{ lb}) - (2320 \text{ lb}) = 0$$

หรืออาจใช้สมการ $\sum M = 0$ รอบจุดอื่น นอกเหนือจาก จุด A และ จุด B ก็ได้

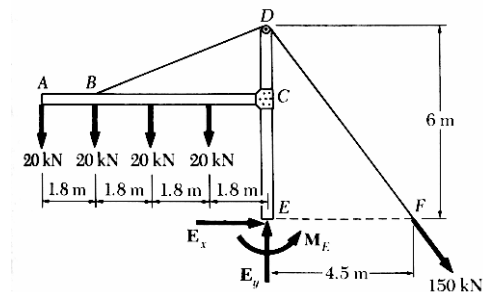
ตัวอย่าง 4.4

โครงสร้าง (frame) รองรับส่วนของหลังคาของอาคารหนึ่งดังรูป จุตรองรับที่ E เป็นแบบยึดตรึง (fixed) ถ้ารู้ค่าแรงดึงในเคเบิลเท่ากับ 150 kN ให้หาแรงปฏิกิริยาที่จุตรองรับ E



(Beer, 1988: 137)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 137)

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้าง โดยมีแรงปฏิกิริยาซึ่งเกิดขึ้นที่จุตรองรับแบบยึดตรึงที่ E ดังนี้ E_x , E_y และ M_E แรงอื่นซึ่งกระทำต่อวัตถุอิสระได้แก่ แรง 20-kN 4 แรง และ แรง 150-kN ซึ่งกระทำที่ปลาย F ของเคเบิล

ใช้สมการสมดุล สังเกตว่า $DF = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 7.5 \text{ m}$

$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad E_x + \left(\frac{4.5}{7.5}\right)(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

$$E_x = 90.0 \text{ kN} \leftarrow \quad \text{ตอบ}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0: \quad E_y - 4(20 \text{ kN}) - \left(\frac{6}{7.5}\right)(150 \text{ kN}) = 0$$

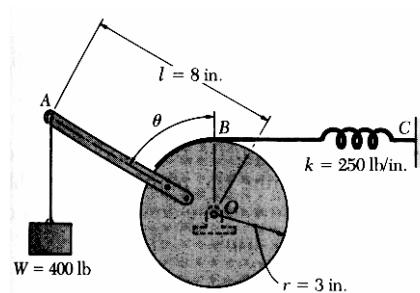
$$E_y = +200 \text{ kN}$$

$$E_y = 200 \text{ kN} \uparrow \quad \text{ตอบ}$$

$$\begin{aligned}
 \curvearrowright \sum M_E = 0 : & \text{ (ที่เลือกจุด E เพราะจะกำจัดแรง } E_x \text{ และ } E_y \text{ ออกจากการคำนวณ)} \\
 & (20 \text{ kN})(7.2 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5.4 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(3.6 \text{ m}) \\
 & + (20 \text{ kN})(1.8 \text{ m}) - \left(\frac{6}{7.5} \right) (150 \text{ kN})(4.5 \text{ m}) + M_E = 0 \\
 M_E = +180.0 \text{ kN} & \qquad \qquad M_E = 180.0 \text{ kN} \curvearrowright \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

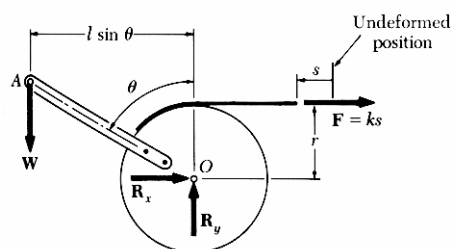
ตัวอย่าง 4.5

น้ำหนัก 400 lb ถูกยึดติดกับก้านคันโยก (lever) AO ค่าคงตัวของสปริง BC, $k = 250 \text{ lb/in}$ และสปริงอยู่สภาพไม่ถูกยืด เมื่อ $\theta = 0^\circ$ ให้หาตำแหน่งซึ่งทำให้เกิดสภาวะสมดุลขึ้นในระบบนี้



(Beer, 1988: 137)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 137)

เขียน แผนภาพวัตถุอิสระ ดังรูป

ให้ s = ระยะที่สปริงยืดตัวจากจุดเมื่ออยู่ในสภาพปกติ สังเกตว่า $s = r\theta$

แรงซึ่งเกิดจากการยืดตัวของสปริง $F = ks = kr\theta$

ใช้สมการสมดุล โดยพิจารณาโมเมนต์รอบ O จะกำจัด R_x และ R_y ซึ่งยังไม่รู้ค่าออกไปจากการคำนวณ

$$\sum M_O = 0: \quad Wl \sin \theta - r(kr\theta) = 0 \quad \sin \theta = \frac{kr^2}{Wl} \theta$$

แทนค่า W, k, r, l ลงไป ได้

$$\sin \theta = \frac{(250 \text{ lb/in})(3 \text{ in})^2}{(400 \text{ lb})(8 \text{ in})} \theta$$

$$\sin \theta = 0.703\theta$$

จากการลองค่า (trial and error) ได้

$$\theta = 0 \quad \text{และ} \quad \theta = 80.3^\circ \quad \text{ตอบ}$$

