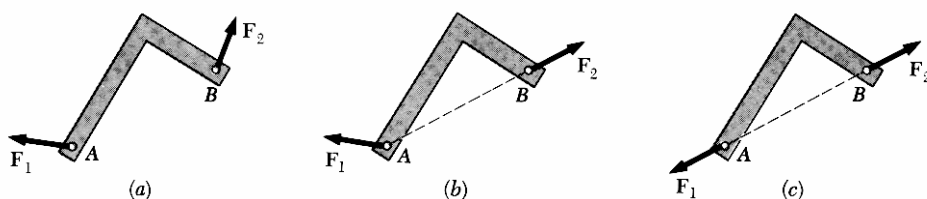


4.6 สมดุลของวัตถุทรงรูปภายใต้การกระทำของแรง 2 แรง

วัตถุทรงรูปใดซึ่งอยู่ภายใต้การกระทำของแรง 2 แรง เรียกว่า **วัตถุสองแรง** (two-force body) วัตถุสองแรงจะอยู่ในสถานะสมดุลก็ต่อเมื่อแรงทั้งสองนั้นต้องมีขนาดเท่ากัน อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และมีทิศทางตรงข้ามกัน

พิจารณาแผ่นเหล็กฉาก ซึ่งถูกกระทำด้วยแรง F_1 และ F_2 ที่จุด A และ B ตามลำดับ รูปที่ 4.8(a) แผ่นเหล็กฉากนี้จะอยู่ในสถานะสมดุลถ้าผลรวมของโมเมนต์เนื่องจากแรง F_1 และ F_2 รอบแกนใด ๆ เท่ากับศูนย์ พิจารณาผลรวมของโมเมนต์รอบ A โมเมนต์เนื่องจาก F_1 รอบ A เท่ากับศูนย์ เพราะมีแนวแรงผ่านจุดหมุน A ดังนั้นเพื่อให้ผลรวมของโมเมนต์รอบ A เท่ากับศูนย์ โมเมนต์รอบ A เนื่องจาก F_2 ต้องเท่ากับศูนย์ด้วย นั่นคือแนวแรง F_2 ต้องผ่านจุด A ด้วย รูปที่ 4.8(b) จากนั้นพิจารณาผลรวมของโมเมนต์รอบ B ซึ่งในทำนองเดียวกันจะได้แรง F_1 และ F_2 ต้องอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันคือแนว AB จากสมการ $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ จะพบว่าแรง F_1 และ F_2 ต้องมีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน รูปที่ 4.8(c)



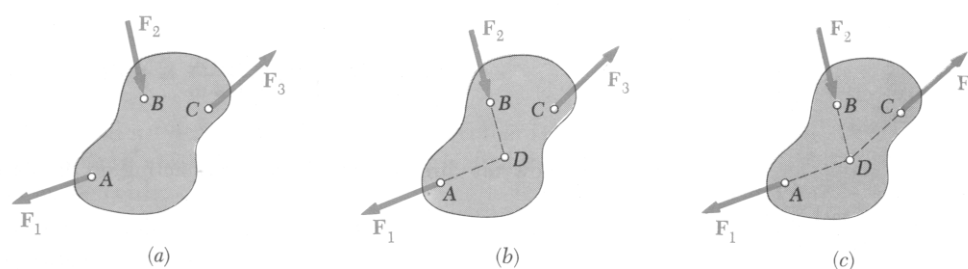
รูปที่ 4.8 (Beer, 1988: 144)

ในกรณีที่มีแรงหลายแรงมากระทำที่จุด A และ B แรงหลายแรงซึ่งกระทำที่จุด A สามารถแทนได้ด้วยแรงลัพธ์ F_1 1 แรง ในทำนองเดียวกันแรงหลายแรงซึ่งกระทำที่ B สามารถแทนได้ด้วยแรงลัพธ์ F_2 1 แรง ดังนั้นสามารถกล่าวโดยทั่วไปได้ว่า วัตถุทรงรูปซึ่งถูกกระทำด้วยแรงหลายแรง ซึ่งมีจุดกระทำเพียง 2 จุด เรียกวัตถุทรงรูปนั้นว่าเป็น **วัตถุสองแรง** ซึ่งวัตถุสองแรงนี้จะอยู่ในสถานะสมดุลก็ต่อเมื่อแรงลัพธ์ F_1 และ F_2 มีขนาดเท่ากัน อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

4.7 สมดุลของวัตถุทรงรูปภายใต้การกระทำของแรง 3 แรง

วัตถุทรงรูปใดซึ่งอยู่ภายใต้การกระทำของแรงหลายแรง โดยที่มีจุดซึ่งแรงเหล่านี้กระทำเพียง 3 จุด เรียกว่าวัตถุนี้เป็น **วัตถุสามแรง** (three-force body)

พิจารณาวัตถุทรงรูปหนึ่งซึ่งถูกกระทำด้วยระบบแรงหนึ่งซึ่งสามารถลดเหลือแรง 3 แรง F_1 , F_2 และ F_3 กระทำที่ A, B และ C ตามลำดับ รูปที่ 4.9(a) วัตถุทรงรูปนี้มีโอกาสจะสมดุลถ้าแนวแรงของแรงทั้ง 3 มาพบที่จุดเดียวกัน หรือขนานกันหมด



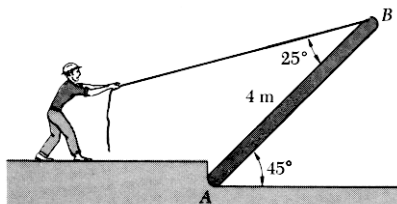
รูปที่ 4.9 (Beer, 1988: 145)

ถ้าวัตถุทรงรูปสมดุล ผลรวมของโมเมนต์เนื่องจาก F_1 , F_2 และ F_3 รอบแกนใด ๆ จะต้องเท่ากับ ศูนย์ สมมติให้แนว F_1 ตัดกับ F_2 ที่จุด D รูปที่ 4.9(b) พิจารณาผลรวมของโมเมนต์รอบจุด D เนื่องจาก F_3 ต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้นแนวแรง F_3 ต้องผ่านจุด D รูปที่ 4.9(c) นั่นคือแนวแรงทั้ง 3 ต้องมาพบที่จุดเดียวกัน มีข้อยกเว้นในกรณีที่แรงทั้ง 3 ไม่มาพบที่จุดเดียวกัน นั่นคือแนวแรงทั้ง 3 จะต้องขนานกันหมด

แม้ว่าปัญหาเกี่ยวกับวัตถุสามแรง จะสามารถใช้วิธีในหัวข้อ 4.3 ถึง 4.5 แก้ปัญหาออกมาได้ แต่จากคุณสมบัติเฉพาะตัวของมัน ทำให้สามารถแก้ปัญหามันได้ด้วยวิธีการฟิสิก หรือจากวิธีตรีโกณมิติอย่างง่าย ๆ หรือจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต

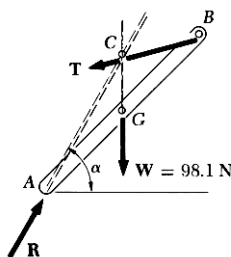
ตัวอย่าง 4.6

ชายคนหนึ่งยกท่อนไม้ 10 kg ยาว 4 m ด้วยการดึงเชือก ให้หาแรงดึง T ในเส้นเชือกและแรงปฏิกิริยาที่ A



(Beer, 1988: 146)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 146)

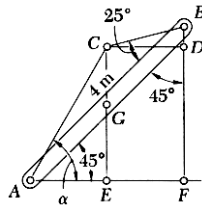
เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของท่อนไม้ พบว่ามีลักษณะเป็นวัตถุสามแรง เนื่องจากถูกกระทำด้วยแรง 3 แรงคือ น้ำหนัก W แรง T ซึ่งเกิดจากเชือก และแรง R ซึ่งเป็นแรงปฏิกิริยาจากพื้น ที่จุด A โดย

$$W = mg = (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$$

จากคุณสมบัติของวัตถุสามแรง แรงกระทำทั้ง 3 จะต้องมีความแรงไปพบที่จุดเดียวกัน เนื่องจาก T และ W รู้ทิศทางแล้ว ทำการลากแนวแรง W ให้ไปตัดกับแนวแรง T ได้จุด C ซึ่งแนวแรง R ต้องไปตัดกันที่จุด C นี้ด้วย สมมติให้แนวแรง R ดังกล่าวทำมุมกับแนวราบเป็นมุม α

ถ้าคำนวณหาค่ามุม α ได้ก็สามารถคำนวณหา T และ R ได้ จากสามเหลี่ยมแทนแรง

ลากเส้นตรงในแนวดิ่ง BF ผ่าน B และลากเส้นตรงในแนวราบ CD ผ่าน C จะได้



(Beer, 1988: 146)

$$AF = BF = (AB) \cos 45^\circ = (4 \text{ m}) \cos 45^\circ = 2.828 \text{ m}$$

$$CD = EF = AE = \frac{1}{2}(AF) = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = (CD) \cot(45^\circ + 25^\circ) = (1.414 \text{ m}) \tan 20^\circ = 0.515 \text{ m}$$

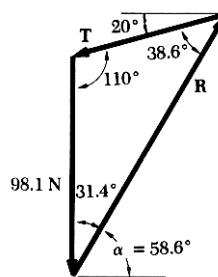
$$CE = DF = BF - BD = 2.828 \text{ m} - 0.515 \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

ได้

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313 \text{ m}}{1.414 \text{ m}} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ \quad \text{ตอบ}$$

จากสามเหลี่ยมแทนแรง ใช้กฎของไซน์ ได้



(Beer, 1988: 146)

$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$T = 81.9 \text{ N} \quad \text{ตอบ}$$

$$R = 147.8 \text{ N} \quad \nearrow 58.6^\circ \quad \text{ตอบ}$$

สมดุลในปริภูมิ (3 มิติ)

4.8 แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับและจุดซึ่งติดต่อกันสำหรับโครงสร้าง 3 มิติ

แรงปฏิกิริยาในโครงสร้าง 3 มิติ มีตั้งแต่ เป็นแรง 1 แรงซึ่งรู้ทิศทางซึ่งเกิดจากผิวลื่น (frictionless surface) จนถึง ระบบแรงและแรงคู่ควบ ซึ่งเกิดจากจุดรองรับแบบยึดตรึง (fixed support) จำนวนตัวไม่รู้ค่าซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับหรือจุดต่อในปัญหาซึ่งเกี่ยวข้องกับโครงสร้าง 3 มิติ มีจำนวนตั้งแต่ 1 ตัวไปจนถึง 6 ตัว ในรูปที่ 4.10 แสดงชนิดของจุดรองรับและจุดต่อพร้อมทั้งแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้น

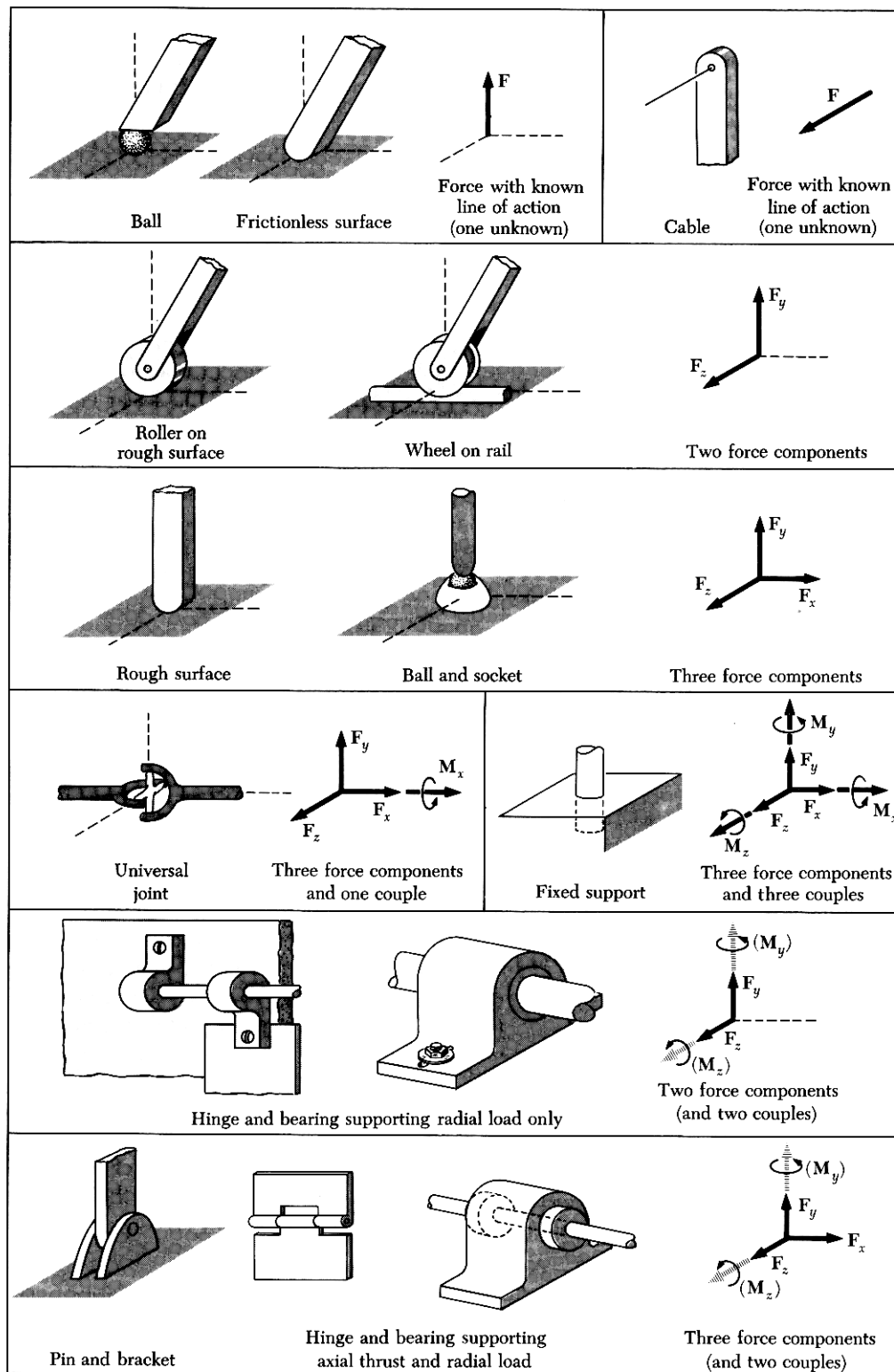
วิธีง่าย ๆ ในการหาว่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นจะเป็นแบบใดและมีจำนวนเท่าใด ทำได้โดยการพิจารณาว่าการเคลื่อนที่ใน 6 ลักษณะ ได้แก่ การเคลื่อนที่แบบเลื่อนขนานในแกน x, y, z และการหมุนรอบแกน x, y, z ที่จุดรองรับต่าง ๆ ว่าด้านการเคลื่อนที่ในลักษณะใด

เช่นจุดรองรับแบบ ลูกบอล (ball) ผิวลื่น (frictionless surfaces) เคเบิล (cables) ด้านการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเพียง 1 แนวเท่านั้น ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงเดี่ยว 1 แรงซึ่งรู้ทิศทางแต่ไม่รู้ขนาด นั่นคือมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ 1 ตัว คือขนาดของแรงปฏิกิริยานั้น

ลูกกลิ้งบนผิวหยาบ (rollers on rough surfaces) และลูกล้อซึ่งอยู่บนราง (wheels on rails) ด้านการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง 2 ทิศทาง ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงเดี่ยว 2 แรงซึ่งรู้ทิศทาง แต่ไม่รู้ขนาดของแรงทั้งสอง นั่นคือมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ 2 ตัวคือขนาดของแรงปฏิกิริยาของแรงทั้งสอง

ผิวหยาบ (rough surface) และ ลูกบอลในกระเปาะ (ball-and-socket) ด้านการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงทั้ง 3 ทิศทาง ตัวไม่รู้ค่าจะมี 3 ตัวคือขนาดของแรงปฏิกิริยาทั้งสาม

จุดรองรับบางชนิดด้านการเคลื่อนที่แบบหมุนได้ด้วย ซึ่งจะทำให้มีแรงปฏิกิริยาซึ่งเป็นแบบแรงคู่ควบด้วย เช่น จุดรองรับแบบยึดตรึง (fixed support) สามารถด้านการเคลื่อนที่ได้ทั้ง 6 ลักษณะ ดังนั้นตัวไม่รู้ค่าจะมี 6 ตัว (แรงในแนวเส้นตรง 3 ตัว และแรงคู่ควบอีก 3 คู่) ข้อต่อ universal joint ยอมให้เกิดการหมุนฟรีได้เพียง 2 แกนเท่านั้น ดังนั้นตัวไม่รู้ค่าจะมีอยู่ 4 ตัว (แรงในแนวเส้นตรง 3 แรง และแรงคู่ควบอีก 1 คู่)



รูปที่ 4.10 (Beer, 1988: 151)

บานพับและแบร็ริงซึ่งรองรับน้ำหนักบรรทุกในแนวรัศมีเท่านั้น (hinges and bearings supporting radial load only) ไม่สามารถต้านแรงในแนวแกนเพลลา และไม่สามารถต้านแรงคู่ควบซึ่งหมุนรอบแกนเพลลาได้ ดังนั้นตัวไม่รู้ค่าจะมี 4 ตัว (แรงในแนวเส้นตรง 2 แรง และแรงคู่ควบอีก 2 คู่)

หมุดลิ้นและเหล็กประกบ (pin-and-bracket supports) บานพับและแบร็ริงซึ่งรองรับน้ำหนักบรรทุกในแนวรัศมีและในแนวแกนได้ด้วย (hinges and bearings supporting axial thrust and radial load) ไม่สามารถต้านการหมุนรอบแกนเพียงแกนเดียว ดังนั้นตัวไม่รู้ค่าจะมี 5 ตัว (แรงในแนวเส้นตรง 3 แรง และแรงคู่ควบอีก 2 คู่)

อย่างไรก็ตาม จุติรองรับในสองกลุ่มสุดท้ายนี้จะไม่ออกแรงคู่ควบต้านออกมาภายใต้สภาพการใช้งานตามปกติ ดังนั้นควรเขียนเฉพาะแรงองค์ประกอบเท่านั้นเข้าไปในแผนภาพวัตถุอิสระ ยกเว้นกรณีที่พบว่าจำเป็นต้องใช้แรงคู่ควบเพื่อให้วัตถุทรงรูปคงอยู่ในสภาวะสมดุล หรือ กรณีที่ได้ออกแบบไว้โดยเฉพาะให้เกิดแรงคู่ควบต้านออกมา

4.9 สมดุลของวัตถุทรงรูปในปริภูมิ

เพื่อให้วัตถุทรงรูปในปริภูมิอยู่ในสภาวะสมดุล จำเป็นต้องใช้เงื่อนไข (สมการสเกลาร์) ทั้ง 6 ข้อ จากหัวข้อ 4.1 ได้แก่

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (4.3)$$

สมการทั้ง 6 นี้ใช้แก้ปัญหาซึ่งมีตัวไม่รู้ค่าได้ไม่เกิน 6 ตัว ในการแก้ปัญหาลักษณะใหญ่นั้นจะเป็นการสะดวกกว่าถ้าเขียนอยู่ในรูปเวกเตอร์ก่อนในตอนแรก ดังนี้

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

และเขียนแรง $\mathbf{F}$ และเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ อยู่ในรูปพสมระหว่างปริมาณสเกลาร์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จากนั้นหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ทั้งหมด แล้วให้สัมประสิทธิ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแต่ละตัวเป็น ศูนย์ จะได้สมการสเกลาร์ทั้ง 6 ออกมาเพื่อใช้แก้หาตัวไม่รู้ค่า ถ้ามีจำนวนแรงปฏิกิริยาซึ่งไม่รู้ค่าเกิน 6 ตัว แรงปฏิกิริยาบางตัวซึ่งไม่สามารถหาค่าออกมาได้ด้วยสมการสมดุลเรียกว่าเป็นแรงปฏิกิริยาซึ่งไม่สามารถหาได้ด้วยสมการสมดุล (statically indeterminate)

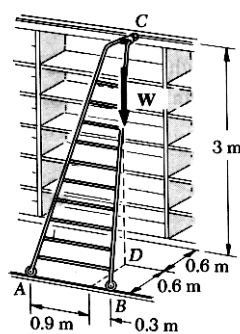
ถ้ามีจำนวนแรงปฏิกิริยาซึ่งไม่รู้ค่าน้อยกว่า 6 ตัว จะมีจำนวนสมการสมดุลมากกว่าจำนวนตัวไม่รู้ค่า และสมการสมดุลบางสมการจะไม่เป็นจริงภายใต้สภาพน้ำหนักบรรทุกโดยทั่วไป เรียกวัตถุทรงรูปนั้นว่ามีสภาพเป็นแบบสามารถต้านทานการเคลื่อนที่ได้บางส่วน (partially constrained) ซึ่งวัตถุทรงรูปดังกล่าวจะอยู่ในสภาวะสมดุลในบางสภาพลักษณะบรรทุกเท่านั้น

ถ้ามีจำนวนแรงปฏิกิริยาซึ่งไม่รู้ค่ามากกว่า 6 ตัว แต่ก็ยังทำให้วัตถุทรงรูปนั้นไม่สมดุลในบางสภาพลักษณะบรรทุก สภาพเช่นนี้เรียกว่า การจัดตำแหน่งของแรงต้านทานไม่เหมาะสม (improperly constrained) ซึ่งส่วนใหญ่มักจะเกิดขึ้นในกรณีที่แรงปฏิกิริยาทั้งหมดมีทิศทางขนานกันหมดหรือมีแรงปฏิกิริยาทั้งหมดมาตัดที่จุดเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.7

บันไดซึ่งมีมวล 20 kg มีจุดรองรับที่ A และ B เป็นแบบลูกล้อที่มีปีก (flanged wheel) วางอยู่บนราง และที่ C เป็นแบบลูกล้อธรรมดา (unflanged wheel)

ชายคนหนึ่งมีมวล 80 kg ยืนอยู่บนบันไดและเอนตัวไปทางขวามือ แนวแรงกระทำของแรงรวมซึ่งเกิดจากน้ำหนักชายคนนี้กับน้ำหนักบันไดไปตัดกับพื้น ที่จุด D ให้หาแรงปฏิกิริยาที่ A, B และ C ในรูปแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก



(Beer, 1988: 153)

วิธีทำ

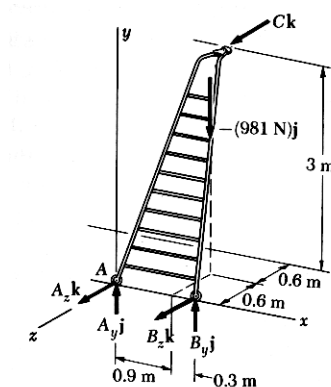
เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของบันได แรงกระทำได้แก่ แรงรวมของน้ำหนักชายคนนี้กับน้ำหนักบันได

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j}$$

$$\mathbf{W} = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981 \text{ N})\mathbf{j}$$

แรงปฏิกิริยาทั้งหมดจะมี 5 ตัว ที่ A และ B มีจุดละ 2 ตัว ส่วนที่ C มี 1 ตัว ซึ่งทำให้บันไดนี้มีสภาพเป็นแบบสามารถต้านทานการเคลื่อนที่ได้บางส่วน โดยจะสามารถเลื่อนไถลไปได้ตามแนวราบ

แต่อย่างไรก็ตาม บันไดนี้จะอยู่ในสภาวะสมดุลภายใต้สภาพน้ำหนักบรรทุกที่กำหนดให้ เนื่องจากสมการ $\sum F_x = 0$ เป็นจริง เพราะไม่มีแรงกระทำในแนวแกน x



(Beer, 1988: 153)

จากสมการสมดุล

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} = 0: \quad & A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} - (981 \text{ N}) \mathbf{j} + C \mathbf{k} = 0 \\ & (A_y + B_y - 981 \text{ N}) \mathbf{j} + (A_z + B_z + C) \mathbf{k} = 0 \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \\ 1.2 \mathbf{i} \times (B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) + (0.9 \mathbf{i} - 0.6 \mathbf{k}) \times (-981 \mathbf{j}) + (0.6 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} - 1.2 \mathbf{k}) \times C \mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

คำนวณหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ ได้

$$\begin{aligned}1.2 B_y \mathbf{k} - 1.2 B_z \mathbf{j} - 882.9 \mathbf{k} - 588.6 \mathbf{i} - 0.6 C \mathbf{j} + 3 C \mathbf{i} = 0 \\ (3C - 588.6) \mathbf{i} - (1.2 B_z + 0.6 C) \mathbf{j} + (1.2 B_y - 882.9) \mathbf{k} = 0 \quad (2)\end{aligned}$$

จากสมการที่ (2) ให้สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ เท่ากับ ศูนย์ จะได้สมการสเกลาร์ 3 สมการ ซึ่งแสดงว่าผลรวมของโมเมนต์ในแต่ละแกนต้องเท่ากับ ศูนย์ ดังนี้

$$3C - 588.6 = 0 \quad \text{ได้} \quad C = +196.2 \text{ N}$$

$$1.2B_z + 0.6C = 0 \quad \text{ได้} \quad B_z = -98.1 \text{ N}$$

$$1.2B_y - 882.9 = 0 \quad \text{ได้} \quad B_y = +736.0 \text{ N}$$

$$\mathbf{B} = +(736 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \quad \mathbf{C} = +(196.2 \text{ N})\mathbf{k} \quad \text{ตอบ}$$

จากสมการที่ (1) ให้สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{j}$ ของ $\mathbf{k}$ เท่ากับ ศูนย์ จะได้สมการสเกลาร์ 2 สมการ ซึ่งแสดงว่าผลรวมของแรงในแกน y และ z ต้องเท่ากับ ศูนย์ แทนค่า B_y , B_z และ C ที่คำนวณได้ออกมาแล้ว จะได้ค่า A_y และ A_z ออกมาดังนี้

$$A_y + B_y - 981 = 0 \quad \text{ได้} \quad A_y + 736 - 981 = 0 \quad \text{ได้} \quad A_y = +245 \text{ N}$$

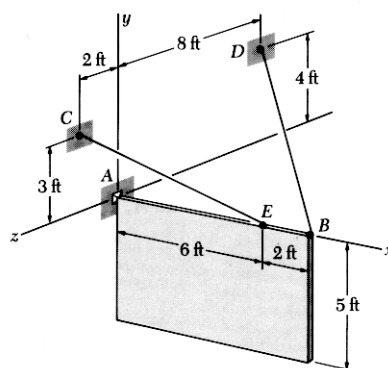
$$A_z + B_z + C = 0 \quad \text{ได้} \quad A_z - 98.1 + 196.2 = 0 \quad \text{ได้} \quad A_z = -98.1 \text{ N}$$

สรุปได้ว่า แรงปฏิกิริยาที่ A คือ

$$\mathbf{A} = +(245 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 4.8

ป้ายโฆษณาขนาด 5×8 ft มีความหนาแน่นสม่ำเสมอหนัก 270 lb ถูกรองรับด้วยลูกบอลและกระเปาะที่ A และมีเคเบิล 2 เส้นผูกยึดติดกับจุด B และ E ให้หาแรงดึงในเคเบิลทั้งสองและแรงปฏิกิริยาที่ A

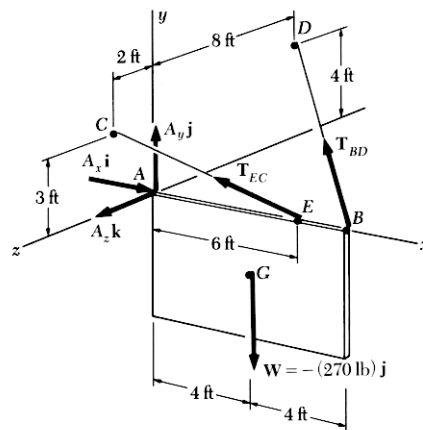


(Beer, 1988: 154)

วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของป้าย ให้แรงดึงในเคเบิลทั้งสองมีขนาด T_{BD} และ T_{EC} มีทิศทางไปตามแนวเส้นเคเบิลทั้งสองตามลำดับ ส่วนแรงปฏิกิริยาที่ A เป็นแรง 1 แรงซึ่งไม่รู้ทิศทางแทนด้วยแรงองค์ประกอบ 3 แรงในแนวตั้งฉาก

แรงปฏิกิริยาทั้งหมดมีเพียง 5 ตัว ดังนั้นปัญหานี้จะมีลักษณะเป็นแบบสามารถต้านทานการเคลื่อนที่ได้บางส่วน โดยปัญหานี้สามารถหาค่าได้โดยอิสระรอบแกน y แต่อย่างไรก็ตามปัญหานี้จะอยู่ในสถานะสมดุลภายใต้สภาพน้ำหนักบรรทุกที่กำหนดให้ เนื่องจากสมการ $\sum M_y = 0$ เป็นจริง เนื่องจากไม่มีความพยายามที่จะทำให้ปัญหานี้หมุนรอบแกน y



(Beer, 1988: 154)

เขียนแรง T_{BD} และ T_{EC} ในรูปเวกเตอร์

$$\overline{BD} = -(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (4 \text{ ft})\mathbf{j} - (8 \text{ ft})\mathbf{k} \quad \text{และ} \quad BD = 12 \text{ ft}$$

$$\overline{EC} = -(6 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} + (2 \text{ ft})\mathbf{k} \quad \text{และ} \quad EC = 7 \text{ ft}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{\overline{BD}}{BD} \right) = T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \left(\frac{\overline{EC}}{EC} \right) = T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right)$$

จากสมการสมดุล

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} = 0: \quad & A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0 \\ & (A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ lb})\mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum \mathbf{M}_A = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$(8 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) + (6 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right) + (4 \text{ ft})\mathbf{i} \times (-270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

คำนวณหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ ได้

$$(2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080)\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})\mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

จากสมการ (2) ให้สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{k}$ และ $\mathbf{j}$ เท่ากับศูนย์

จะได้สมการสเกลาร์ 2 สมการ ซึ่งสามารถแก้หาค่า T_{BD} และ T_{EC} ออกมาได้เป็น

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \quad \text{และ} \quad T_{EC} = 315 \text{ lb} \quad \text{ตอบ}$$

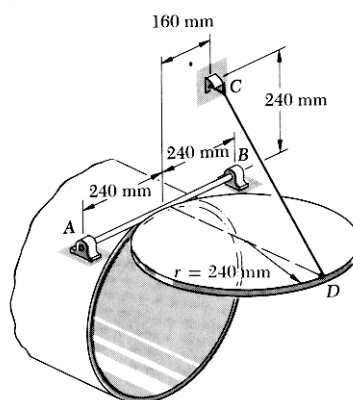
จากสมการ (1) ให้ สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ เท่ากับศูนย์

จะได้สมการสเกลาร์ 3 สมการ แทนค่า T_{BD} และ T_{EC} ลงไป แก้หาค่า $\mathbf{A}$ ในรูปแรงองค์ประกอบ
ได้

$$\mathbf{A} = +(338 \text{ lb})\mathbf{i} + (101.2 \text{ lb})\mathbf{j} - (22.5 \text{ lb})\mathbf{k} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 4.9

ฝาปิดที่มีความหนาสม่ำเสมอ มีรัศมี $r = 240 \text{ mm}$ มีมวล 30 kg ถูกยึดโยงให้อยู่ในแนวราบด้วย
เคเบิล CD ให้เบร้งที่ B ไม่สามารถต้านแรงในแนวแกนได้ ส่วนเบร้งที่ A สามารถต้านแรงใน
แนวแกนได้ จงหาแรงดึงในเคเบิลและแรงปฏิกิริยาที่ A และ B ในรูปแรงองค์ประกอบ



(Beer, 1988: 155)

จากสมการสมดุล

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} = 0: \quad & A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + \mathbf{T} - (294 \text{ N}) \mathbf{j} = 0 \\ & (A_x + B_x - \frac{6}{7}T) \mathbf{i} + (A_y + B_y + \frac{3}{7}T - 294 \text{ N}) \mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{7}T) \mathbf{k} = 0\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M}_B = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \\ 2r\mathbf{k} \times (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-\frac{6}{7}T \mathbf{i} + \frac{3}{7}T \mathbf{j} - \frac{2}{7}T \mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294 \text{ N}) \mathbf{j} = 0\end{aligned}$$

ได้

$$(-2A_y - \frac{3}{7}T + 294 \text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \frac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\frac{6}{7}T - 294 \text{ N})r\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

จากสมการ (2) ให้สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ เท่ากับศูนย์

จะได้สมการสเกลาร์ 3 สมการ ซึ่งสามารถแก้หาค่า T , A_x และ A_y ได้ดังนี้

$$A_y = +73.5 \text{ N} \quad A_x = +49.0 \text{ N} \quad T = 343 \text{ N} \quad \text{ตอบ}$$

จากสมการ (1) ให้สัมประสิทธิ์ของ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ เท่ากับศูนย์

จะได้สมการสเกลาร์ 3 สมการ แทนค่า T , A_x และ A_y ลงไปจะสามารถแก้หาค่า A_z , B_x และ B_y ได้ดังนี้

$$A_z = +98.0 \text{ N} \quad B_x = +245 \text{ N} \quad B_y = +73.5 \text{ N}$$

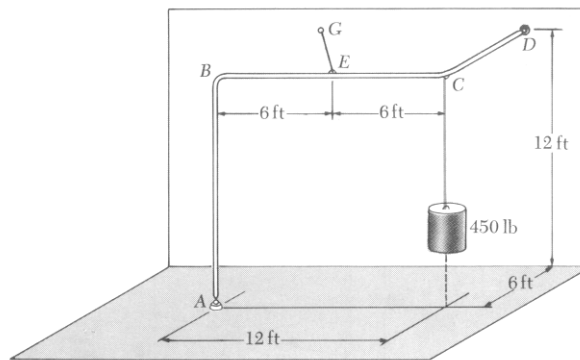
ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่ A และ B เป็นดังนี้

$$\mathbf{A} = +(49.0 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j} + (98.0 \text{ N})\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = +(245 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 4.10

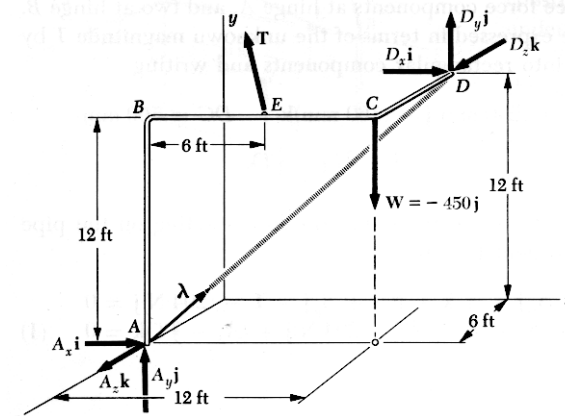
มีน้ำหนัก 450 lb ห้อยที่จุด C ของท่อ ABCD ซึ่งถูกค้ำดังรูป โดยมีจุด A และ D เป็นจุดรองรับแบบลูกบอลและกระเปาะ และมีเคเบิล EG ช่วยยึดโยงไว้ให้หา

- ก. ตำแหน่งของจุด G ซึ่งทำให้แรงดึงในเคเบิลน้อยที่สุด
- ข. ขนาดของแรงดึงในเคเบิลซึ่งน้อยที่สุดนั้น



(Beer, 1988: 156)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 156)

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของท่อ

แรงกระทำ ได้แก่ น้ำหนักซึ่งห้อยที่จุด C $\mathbf{W} = -450\mathbf{j}$

แรงปฏิกิริยาที่ A และ D อยู่ในรูปแรงองค์ประกอบ 3 แรงตั้งฉากกัน ส่วนแรงดึงในเคเบิล T มีทิศทางไปตามแนวเคเบิล

ในกรณีนี้ต้องการหาขนาดและทิศทางของ T ดังนั้นควรใช้สมการสมดุลผลรวมโมเมนต์รอบแกน AD เท่ากับศูนย์ $\sum M_{AD} = 0$ เพื่อกำจัดแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ D ออกไปจากการคำนวณ กำหนดให้ λ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว AD

$$\sum M_{AD} = 0: \quad \lambda \bullet (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) + \lambda \bullet (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = 0 \quad (1)$$

จากสมการ (1) พจน์ที่สองคำนวณได้ดังนี้

$$\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W} = (12\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \times (-450\mathbf{j}) = -5400\mathbf{k}$$

$$\lambda = \left(\frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right) = \frac{12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{18} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\lambda \bullet (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \right) \bullet (-5400\mathbf{k}) = +1800$$

แทนค่าที่ได้ลงในสมการที่ (1) ได้

$$\lambda \bullet (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) = -1800 \text{ lb.ft} \quad (2)$$

หาขนาดแรงดึง T ซึ่งน้อยที่สุด

จากคุณสมบัติของผลคูณของสามเวกเตอร์ ซึ่งสามารถเขียนเวียนลำดับวนแทนที่กันได้ ดังนั้น

$$\lambda \bullet (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) = \mathbf{T} \bullet (\lambda \times \overrightarrow{AE})$$

จะได้

$$\mathbf{T} \bullet (\lambda \times \overrightarrow{AE}) = -1800 \text{ lb.ft} \quad (3)$$

จากสมการ (3) แสดงให้เห็นว่าภาพฉายของแรง T บนแนวเวกเตอร์ $\lambda \times \overrightarrow{AE}$ มีค่าคงตัว

จากนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์ ซึ่งเท่ากับผลคูณของขนาดของสองเวกเตอร์นั้นกับค่า $\cos \theta$ นั่นคือขนาดของ $\mathbf{T}$ คูณกับขนาดของ $\lambda \times \overrightarrow{AE}$ คูณด้วย $\cos \theta$ มีค่าเท่ากับ -1800 ขนาดของ $\mathbf{T}$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\cos \theta$ มีค่ามากที่สุด และ $\cos \theta$ มีค่ามากที่สุดเมื่อ $\theta = 0^\circ$ ($\cos 0^\circ = 1$)

ดังนั้นขนาดของ $\mathbf{T}$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\mathbf{T}$ มีแนวแรงขนานกับแนวของเวกเตอร์ $\lambda \times \overrightarrow{AE}$

$$\lambda \times \overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \times (6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

ให้ $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\lambda \times \overrightarrow{AE}$

$$\mathbf{u} = \frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})}{6} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

จากที่รู้ว่าแนวแรง $\mathbf{T}$ ที่น้อยที่สุดต้องมีแนวแรงขนานกับ $\lambda \times \overrightarrow{AE}$ ดังนั้นจะเขียน $\mathbf{T}$ ในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\mathbf{T}_{\min} = T \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \quad (4)$$

แทนค่า $\mathbf{T}$ และ $\lambda \times \overrightarrow{AE}$ ลงในสมการ (3) ได้

$$T \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) \cdot (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = -1800$$

$$T \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right) = -1800$$

$$T = -300 \text{ lb}$$

แทนค่า T ลงในสมการ (4) ได้

$$\mathbf{T}_{\min} = -300 \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{\min} = -200\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 200\mathbf{k} \quad \text{ขนาดของ } T_{\min} = 300 \text{ lb} \quad \text{ตอบ}$$

หาตำแหน่งของจุด G

เนื่องจากเวกเตอร์ $\overrightarrow{EG}$ และแรง $T_{\min}$ มีทิศทางเดียวกัน องค์ประกอบของเวกเตอร์ทั้งสองต้องเป็นสัดส่วนต่อกัน ให้จุด G มีพิกัด $(x, y, 0)$ จะได้

$$\frac{x-6}{-200} = \frac{y-12}{+100} = \frac{0-6}{-200}$$

ซึ่งจะหาค่า x และ y ออกมาได้ดังนี้

$$x = 0 \text{ และ } y = 15 \text{ ft} \quad \text{ตอบ}$$

