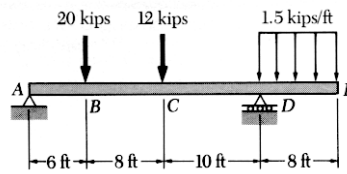


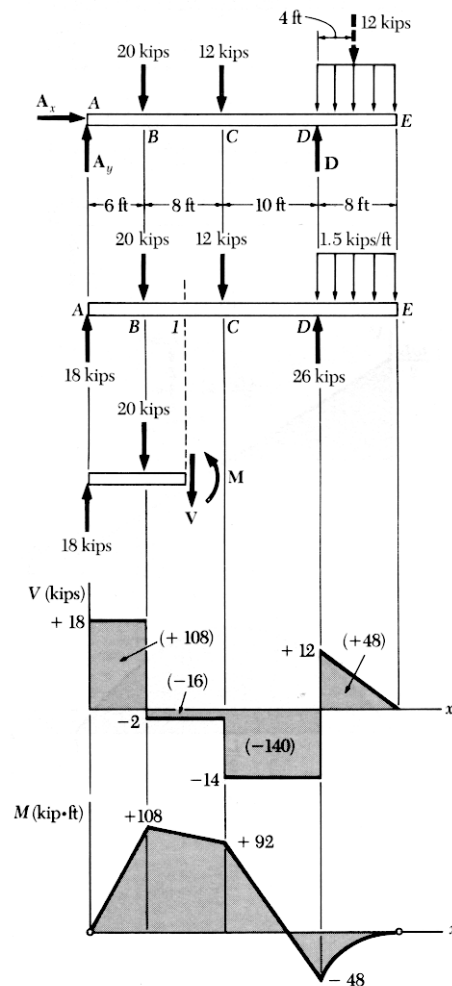
ตัวอย่าง 6.4

เขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกดังรูป



(Beer, 1988: 292)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 292)

พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระของทั้งคาน หาแรงปฏิกิริยาที่จตุรรองรับ

$$\curvearrowright \sum M_A = 0:$$

$$D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) = 0$$

$$D = +26 \text{ kips}$$

$$\mathbf{D} = 26 \text{ kips } \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$$

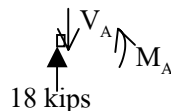
$$A_y = +18 \text{ kips}$$

$$\mathbf{A}_y = 18 \text{ kips } \uparrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad A_x = 0$$

$$\mathbf{A}_x = 0$$

พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระที่ A



จากสมการสมดุล ได้ $V_A = +18 \text{ kips}$ และ $M_A = 0$

สังเกตว่าที่ปลาย A ซึ่งเป็นจตุรรองรับแบบบานพับอยู่ปลายสุดของคาน และปลาย E ซึ่งเป็นปลายอิสระอยู่ปลายสุดของคาน โมเมนต์คัตจะมีค่าเป็นศูนย์

แผนภาพแรงเฉือน

พิจารณาช่วง A ถึง B ซึ่งไม่มีน้ำหนักบรรทุก (w เท่ากับ 0) จาก $dV/dx = -w$ ได้ $dV/dx = 0$ ดังนั้นความชันในช่วงนี้เป็นเส้นตรงในแนวนอน จะได้ V_A มีค่าคงตัวเท่ากับ +18 kips ตลอดช่วง

สังเกตว่าที่ A ซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดพุ่งขึ้น 18 kips ทำให้ค่าแรงเฉือนที่ A กระโดดขึ้น +18 kips ดังนั้นที่จุด B ซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดพุ่งลง 20 kips จะทำให้ค่าแรงเฉือนที่ B กระโดดลง 20 kips จากเดิม +18 kips ไปเป็น -2 kips และในช่วง B ถึง C ไม่มีน้ำหนักบรรทุก ดังนั้นในช่วงนี้แรงเฉือนจะมีค่าคงตัวเท่ากับ -2 kips ตลอดช่วง

ที่จุด C ซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดพุ่งลง 12 kips จะทำให้ค่าแรงเฉือนที่ C กระโดดลง 12 kips จากเดิม -2 kips ไปเป็น -14 kips และในช่วง C ถึง D ไม่มีน้ำหนักบรรทุก ดังนั้นในช่วงนี้แรงเฉือนจะมีค่าคงตัวเท่ากับ -14 kips ตลอดช่วง

ที่จุด D ซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุดพุ่งขึ้น 26 kips จะทำให้ค่าแรงเฉือนที่ D กระโดดขึ้น 26 kips จากเดิม -14 kips ไปเป็น +12 kips และในช่วง C ถึง D มีน้ำหนักบรรทุกคงตัว $w = 1.5$ kips/ft ดังนั้นในช่วงนี้แรงเฉือนจะมีค่าความชันคงตัวเท่ากับ -1.5 kips/ft ตลอดช่วง นั่นคือแรงเฉือนจะมีค่าลดลงจาก +12 kips ด้วยอัตรา 1.5 kips/ft ดังนั้นในระยะ 8 ft แรงเฉือนจะลดลง $1.5 \times 8 = 12$ kips ทำให้เหลือแรงเฉือนที่จุด E เท่ากับศูนย์ จะได้แผนภาพแรงเฉือนดังรูป

แผนภาพโมเมนต์ดัด

จากความแตกต่างระหว่างโมเมนต์ดัดของจุด 2 จุด เท่ากับ พื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือนระหว่างจุดทั้ง 2 นั้น

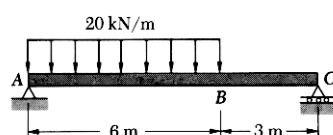
เพื่อความสะดวกให้คำนวณหา พื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือนของแต่ละช่วงไว้ แล้วแสดงค่าไว้ดังรูป จากที่ทราบว่า $M_A = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} M_B - M_A &= +108 & M_B &= +108 \text{ kip.ft} \\ M_C - M_B &= -16 & M_C &= +92 \text{ kip.ft} \\ M_D - M_C &= -140 & M_D &= -48 \text{ kip.ft} \\ M_E - M_D &= +48 & M_E &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากทราบก่อนหน้านี้แล้วว่า $M_E = 0$ ดังนั้นคำตอบที่ได้นี้ถูกต้อง

จาก $dM/dx = V$ ในช่วง AB, BC และ CD ค่าแรงเฉือนแต่ละช่วงมีค่าคงตัว ดังนั้นความชันในแต่ละช่วงจะเป็นเส้นตรงเอียง ดังนั้นให้ลากเส้นตรงเอียงต่อเชื่อมค่า M ที่จุด A, B, C และ D สำหรับช่วง CD แรงเฉือนเป็นเส้นตรงเอียง(สมการกำลังหนึ่ง)โมเมนต์ดัดจะเป็นเส้นโค้งพาราโบลา(สมการกำลังสอง)โดยความชันของเส้นโค้งโมเมนต์ดัดจะมากที่สุดที่จุด D เท่ากับ +12 จากนั้นจะค่อย ๆ ลดลงอย่างสม่ำเสมอไปจนมีค่าความชันเป็นศูนย์ที่จุด E

ตัวอย่าง 6.5 ให้เขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคานซึ่งถูกบรรทุกน้ำหนักดังรูป

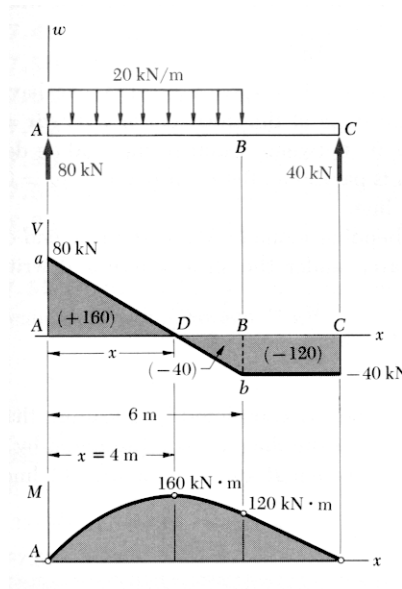


(Beer, 1988: 293)

วิธีทำ

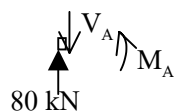
พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระของทั้งคาน หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ ได้

$$R_A = 80 \text{ kN} \uparrow \quad R_B = 40 \text{ kN} \uparrow$$



(Beer, 1988: 293)

พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระที่ A



จากสมการสมดุล ได้ $V_A = +80 \text{ kN}$ และ $M_A = 0$

แผนภาพแรงเฉือน

จากความแตกต่างของค่าแรงเฉือนของจุด 2 จุด เท่ากับ - พื้นที่ใต้เส้นโค้งนำหน้ากับบรรทัดระหว่างจุดทั้ง 2 นั้น

$$V_B - V_A = -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN}$$

$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN}$$

ความชันของเส้นโค้งแรงเฉือน ในช่วง A ถึง B มีค่าคงตัว $dv/dx = -w$ หรือ $dv/dx = -20$ ดังนั้นแรงเฉือนในช่วงนี้เป็นเส้นตรงเอียงลง จากค่าแรงเฉือนที่ A เท่ากับ $+80$ kN มีค่าลดลง $20 \times 6 = 120$ kN เหลือแรงเฉือนที่ B เท่ากับ -40 kN ส่วนในช่วง B ถึง C ไม่มีน้ำหนักบรรทุก ดังนั้นแรงเฉือนจะมีค่าคงตัว -40 kN ตลอดช่วงนี้

แผนภาพโมเมนต์ดัด

สังเกตว่าที่ปลาย A ซึ่งเป็นจุดรองรับแบบบานพับอยู่ปลายสุดของคาน และปลาย C ซึ่งเป็นจุดรองรับแบบลูกกลิ้งอยู่ปลายสุดของคาน โมเมนต์ดัดจะมีค่าเป็นศูนย์

หาโมเมนต์ดัดที่มากที่สุด จากความรู้ที่ว่าโมเมนต์ดัดจะมีค่ามากที่สุดที่จุดซึ่งค่าแรงเฉือนเท่ากับศูนย์ ในกรณีนี้คือจุด D พิจารณาแผนภาพแรงเฉือนในระหว่าง A ถึง B พบว่า สามเหลี่ยม “DAa” คล้ายกับสามเหลี่ยม “DBb” ดังนั้น

$$\frac{x}{80 \text{ kN}} = \frac{6-x}{40 \text{ kN}} \quad \text{ได้ } x = 4 \text{ m}$$

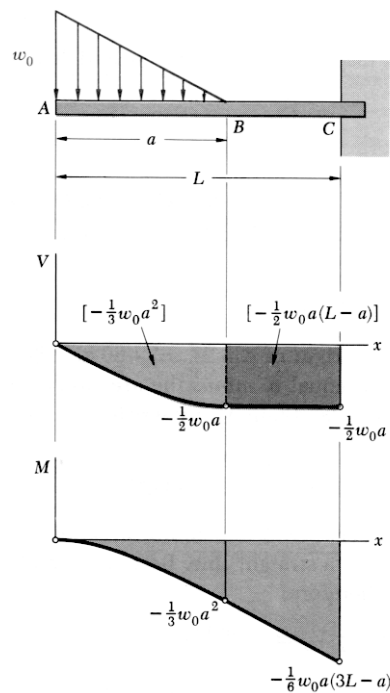
หาพื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือนในแต่ละช่วง แสดงอยู่ในแผนภาพแรงเฉือนดังรูป

จากความแตกต่างระหว่างโมเมนต์ดัดของจุด 2 จุด เท่ากับ พื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือนระหว่างจุดทั้ง 2 นั้น

$$\begin{aligned} M_D - M_A &= +160 \text{ kN.m} & M_D &= +160 \text{ kN.m} \\ M_B - M_D &= -40 \text{ kN.m} & M_B &= +120 \text{ kN.m} \\ M_C - M_B &= -120 \text{ kN.m} & M_C &= 0 \end{aligned}$$

แผนภาพโมเมนต์ดัดจะประกอบด้วยโค้งพาราโบลาในช่วง A ถึง B และเป็นเส้นตรงเอียงในช่วง B ถึง C

ตัวอย่าง 6.6 ให้เขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ำของคานซึ่งถูกน้ำหนักบรรทุกดังรูป



(Beer, 1988: 294)

วิธีทำ

พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระที่ A

$$\downarrow V_A \quad \curvearrowright M_A$$

จากสมการสมดุล ได้ $V_A = 0$ และ $M_A = 0$

แผนภาพแรงเฉือน

ที่ A ค่า $V_A = 0$

พื้นที่ใต้เส้นโค้งน้ำหนักบรรทุก ระหว่าง A ถึง B เท่ากับ $\frac{1}{2} w_0 a$

จากความแตกต่างของค่าแรงเฉือนของจุด 2 จุด เท่ากับ - พื้นที่ใต้เส้นโค้งน้ำหนักบรรทุกระหว่างจุดทั้ง 2 นั้น ได้

$$V_B - V_A = -\frac{1}{2} w_0 a$$

$$V_B = -\frac{1}{2} w_0 a$$

ช่วง B ถึง C ไม่มีน้ำหนักบรรทุก ดังนั้น $V_C = V_B$

ที่ A ค่า $w = w_0$ ดังนั้นความชันของเส้นโค้งแรงเฉือนที่ A เท่ากับ $dV/dx = -w_0$ ส่วนช่วง B ถึง C ค่า $w = 0$ ดังนั้นความชันของเส้นโค้งแรงเฉือนช่วงนี้เท่ากับ $dV/dx = 0$

ช่วง A ถึง B เส้นโค้งน้ำหนักบรรทุกเป็นเส้นตรงเอียง(สมการกำลังหนึ่ง) เส้นโค้งแรงเฉือนจะเป็นเส้นโค้งพาราโบลา(สมการกำลังสอง)

ช่วง B ถึง C เส้นโค้งน้ำหนักบรรทุกเป็นศูนย์ เส้นโค้งแรงเฉือนจะเป็นเส้นตรงในแนวนอน

แผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่ A ค่า $M_A = 0$ (ข้อสังเกต ที่ A เป็นปลายอิสระ ไม่สามารถต้านโมเมนต์)

หาพื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือนในแต่ละช่วง แสดงอยู่ในแผนภาพแรงเฉือน ดังรูป

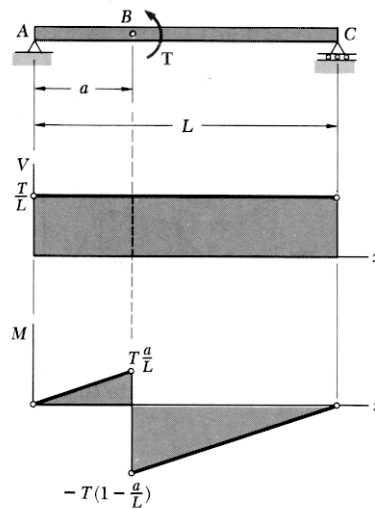
จากความแตกต่างระหว่างโมเมนต์ดัดของจุด 2 จุด เท่ากับ พื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือนระหว่างจุดทั้ง 2 นั้น

$$\begin{aligned} M_B - M_A &= -\frac{1}{3} w_0 a^2 & M_B &= -\frac{1}{3} w_0 a^2 \\ M_C - M_B &= -\frac{1}{2} w_0 a (L - a) \\ M_C &= -\frac{1}{6} w_0 a (3L - a) \end{aligned}$$

จาก $dM/dx = V$ ในช่วง A ถึง B เส้นโค้งแรงเฉือนเป็นเส้นโค้งพาราโบลา(สมการกำลังสอง) เส้นโค้งโมเมนต์ดัดจะเป็นเส้นโค้งสมการกำลังสาม โดยความชันของเส้นโค้งโมเมนต์ดัดจะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ A จากนั้นจะมีค่าติดลบมากขึ้นจนเท่ากับ $dM/dx = V_B = -\frac{1}{2} w_0 a$ ที่ B

ส่วนช่วง B ถึง C เส้นโค้งแรงเฉือนเป็นเส้นตรงในแนวนอน เส้นโค้งโมเมนต์ดัดจะเป็นเส้นตรงเอียง(สมการกำลังหนึ่ง) โดยมีความชันคงตัวเท่ากับ $dM/dx = V_B = V_C = -\frac{1}{2} w_0 a$

ตัวอย่าง 6.7 คาน AC ซึ่งมีจุดรองรับอย่างง่าย ถูกน้ำหนักบรรทุกแบบแรงคู่ควมขนาด T กระทำที่จุด B ให้เขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัต

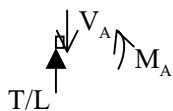


(Beer, 1988: 294)

วิธีทำ เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของทั้งคาน แล้วหาแรงปฏิกิริยาที่ A และ C ได้

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L} \uparrow \quad \text{และ} \quad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L} \downarrow$$

พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระที่ A



จากสมการสมดุล ได้ $V_A = +T/L$ และ $M_A = 0$

แผนภาพแรงเฉือน

ที่ A ถ้า $V_A = +T/L$

ระหว่าง A ถึง C ไม่มีน้ำหนักบรรทุก ดังนั้น $V_C - V_B = 0$ ได้ $V_C = V_B$ นั่นคือแรงเฉือนตลอดคานมีค่าคงตัว เท่ากับ $+T/L$

แผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่ A ค่า $M_A = 0$ (ข้อสังเกต ที่ A เป็นปลายสุดของคานและมีจุดรองรับแบบบานพับ ไม่สามารถต้านโมเมนต์)

พื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือน จาก A ถึง B มีค่าเท่ากับ $+T \frac{a}{L}$

$$M_B - M_A = +T \frac{a}{L} \quad M_B = +T \frac{a}{L}$$

ที่ B มีแรงคู่ควบมากกระทำเท่ากับ T หมุนทวนเข็มนาฬิกา จะทำให้ เส้นโค้งโมเมนต์ดัดกระโดดลงเท่ากับ T ดังนั้นที่จุดซึ่งอยู่ถัดจาก B ไปทางขวาเล็กน้อยจะมีโมเมนต์ดัดเท่ากับ $-T + T \frac{a}{L}$ หรือเท่ากับ $-T \left(1 - \frac{a}{L}\right)$

จาก $dM/dx = V$ ตลอดช่วงคานแรงเฉือนมีค่าเท่ากับ $+T/L$ ดังนั้นความชันของเส้นโค้งโมเมนต์ดัดในช่วง AB และ BC จะมีค่าเท่ากับ $+T/L$

พื้นที่ใต้เส้นโค้งแรงเฉือน จาก B ถึง C มีค่าเท่ากับ $+T \frac{L-a}{L}$ หรือเท่ากับ $+T \left(1 - \frac{a}{L}\right)$

$$\begin{aligned} M_C - M_B &= +T \left(1 - \frac{a}{L}\right) \\ M_C - \left(-T \left(1 - \frac{a}{L}\right)\right) &= +T \left(1 - \frac{a}{L}\right) \\ M_C &= 0 \end{aligned}$$

(ข้อสังเกต ที่ C เป็นปลายสุดของคานและมีจุดรองรับแบบลูกกลิ้ง ไม่สามารถต้านโมเมนต์)

