

6.7 เคเบิลซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกกระทำเป็นจุด

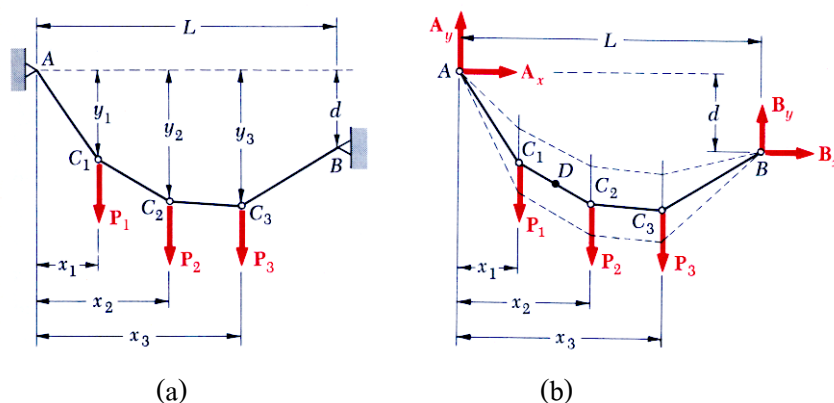
เคเบิลถูกใช้ในงานวิศวกรรม เช่น ในสะพานแขวน (suspensions bridges) สายส่งไฟฟ้าแรงสูง (transmission lines) รถรางลอยฟ้า (aerial tramways) และสายยึดโยงหอสูง (guy wires for high towers) เคเบิลอาจแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ตามลักษณะน้ำหนักบรรทุกได้แก่

1. เคเบิลซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด
2. เคเบิลซึ่งรับน้ำหนักแบบกระจาย

พิจารณาเคเบิลซึ่งถูกยึดติดกับจุดยึดตรึง (fixed points) A และ B และรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด n น้ำหนัก ได้แก่ $P_1, P_2, \dots, P_n$ รูปที่ 6.13(a) โดยมีสมมติฐานสำคัญสองข้อ คือ ให้เคเบิลดัดงอได้ (flexible) นั่นคือไม่สามารถต้านทานโมเมนต์ดัดหรือดัดได้น้อยมาก ไม่ต้องนำมาพิจารณา และน้ำหนักของตัวเคเบิลน้อยมากเทียบกับน้ำหนักบรรทุก ไม่ต้องนำมาพิจารณา จากสมมติฐานสองข้อข้างต้น จะทำให้แต่ละส่วนของเคเบิลในแต่ละช่วงน้ำหนักบรรทุกกลายเป็นชิ้นส่วนสองแรง และแรงภายในที่จุดใด ๆ ในเคเบิลจะเป็น แรงดึง 1 แรงซึ่งมีแนวกระทำไปตามเส้นเคเบิล

ให้น้ำหนักบรรทุกแต่ละน้ำหนักกระทำอยู่ในแนวตั้ง โดยรู้ระยะทางในแนวนอนจากจุดรองรับ A ไปยังจุดซึ่งน้ำหนักบรรทุกแต่ละตัว และรู้ระยะทางในแนวนอนและแนวตั้งระหว่างจุดรองรับทั้งสองข้าง

จากสมมติฐานข้างต้น จะทำให้สามารถหารูปร่างของเคเบิลได้ หรือระยะทางในแนวตั้งจากจุด A ไปยังจุดต่าง ๆ ซึ่งน้ำหนักบรรทุกกระทำที่จุด $C_1, C_2, \dots, C_n$ และยังสามารถหาแรงดึง T ในแต่ละส่วนของเคเบิลได้อีกด้วย

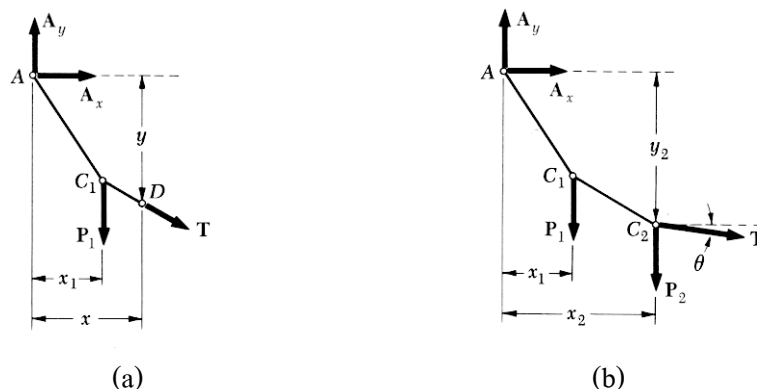


รูปที่ 6.13 (Beer, 1988: 297)

เริ่มด้วย การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของเคเบิลทั้งเส้นดูรูปที่ 6.13(b) เนื่องจากความชันของเคเบิล ช่วงที่ต่อเข้ากับจุด A และจุด B ยังไม่รู้ค่า แรงปฏิกิริยาที่ A และ B จึงต้องสมมติให้เท่ากับแรงองค์ประกอบ 2 แรงในแนวตั้งฉาก A_x, A_y และ B_x, B_y ซึ่งรวมเป็น 4 ตัวไม่รู้ค่า แต่มีสมการสมดุลเพียง 3 สมการเท่านั้น ทำให้หาตัวไม่รู้ค่าทั้ง 4 ออกมาได้ไม่หมด จำเป็นต้องหาสมการเพิ่ม ด้วยการพิจารณาสมดุลของวัตถุอิสระของเคเบิลช่วงใดช่วงหนึ่งซึ่งรู้ค่าพิกัด x และ y ของจุด D ซึ่งเป็นจุดหนึ่งในเคเบิล เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของส่วนของเคเบิลในช่วง AD แล้วใช้สมการ $\sum M_D = 0$ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่า A_x และ A_y ซึ่งเป็นแรงปฏิกิริยาที่จุด A เพิ่มขึ้นมาอีก 1 สมการ ดูรูปที่ 6.14(a) ทำให้มีสมการทั้งหมดเท่ากับ 4 สมการเท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่า ดังนั้นสามารถแก้หาค่าตัวไม่รู้ค่าทั้ง 4 ได้

เมื่อหาค่า A_x และ A_y ได้แล้ว จะสามารถหาระยะทางในแนวตั้งฉากจากจุด A ไปยังจุดต่าง ๆ บนเคเบิลได้ เช่นต้องการหาระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังจุด C_2 เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของเคเบิลในช่วง AC_2 ดูรูปที่ 6.14(b) ใช้สมการ $\sum M_{C_2} = 0$ จะได้ค่า y_2 ใช้สมการ $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ จะได้ค่า T_x และ T_y ซึ่งเป็นแรงองค์ประกอบของแรง T ในแกน x และ y ตามลำดับ (แรง T เป็นแรงดึงในเคเบิลในส่วนทางด้านขวาของจุด C_2)

จะพบว่า $T \cos \theta = -A_x$ ซึ่งแสดงว่าแรงองค์ประกอบในแนวราบของแรงดึงในเคเบิลที่จุดใด ๆ ในเคเบิลจะมีค่าคงตัวเท่ากับ $-A_x$ และแรงดึง T จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $\cos \theta$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือเมื่อมุม $\theta = 90^\circ$ หรือจะกล่าวได้ว่าแรงดึง T จะมีค่ามากที่สุดในช่วงที่เคเบิลมีมุมชันมากที่สุด ซึ่งได้แก่ในช่วงเคเบิลที่อยู่ใกล้จุดรองรับมากที่สุด



รูปที่ 6.14 (Beer, 1988: 298)

6.8 เคเบิลซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกแบบกระจาย

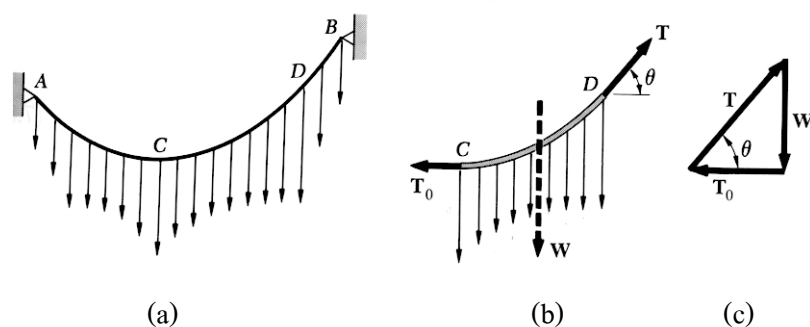
พิจารณาเคเบิลซึ่งยึดติดกับจุดยึดตรึง 2 จุด A และ B โดยมีน้ำหนักบรรทุกแบบกระจาย ดังรูปที่ 6.15(a) ตัวเคเบิลจะห้อยย้อยเป็นรูปโค้งและแรงภายในเคเบิลที่จุดใด ๆ เช่น ที่จุด D จะเป็นแรง T ซึ่งมีแนวกระทำในแนวสัมผัสกับโค้งที่จุดนั้น ถ้ากำหนดน้ำหนักบรรทุกกระจายมาให้ จะสามารถหาแรงดึงที่จุดใด ๆ ในเคเบิลได้ด้วยการเขียนแผนภาพอิสระของส่วนเคเบิลจากจุด C ซึ่งเป็นจุดที่ต่ำสุดของเคเบิลไปถึงจุด D ซึ่งเป็นจุดที่ต้องการหาแรงดึง ดังรูปที่ 6.15(b) แรงซึ่งกระทำต่อวัตถุอิสระ จะมี 3 แรงได้แก่ 1. T_0 เป็นแรงดึงที่เกิดขึ้นที่จุด C ซึ่งจะอยู่ในแนวราบ 2. แรงดึง T ซึ่งเกิดขึ้นที่จุด D มีแนวกระทำไปตามแนวสัมผัสกับเส้นโค้งเคเบิลที่จุด D และ 3. แรงลัพธ์ W ของน้ำหนักแบบกระจายในช่วง C ถึง D จากทั้งเคเบิลสมดุลทำให้ส่วนย่อยของเคเบิลต้องสมดุลด้วย ดังนั้นแรงทั้ง 3 นั้นต้องเขียนเป็นรูปสามเหลี่ยมแทนแรงได้ ดังรูปที่ 6.15(c) จากสามเหลี่ยมแทนแรงจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$T \cos \theta = T_0 \quad T \sin \theta = W \quad (6.5)$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \quad (6.6)$$

สมการ (6.5) แสดงให้เห็นว่าแรงย่อย T ในแนวตั้งจะเท่ากับ W ซึ่งเป็นน้ำหนักบรรทุกทั้งหมดจากช่วงจุดต่ำสุดไปจนถึงจุดซึ่งต้องการหาแรงดึงนั้น

สมการ (6.6) แสดงให้เห็นว่าแรงดึง T จะมีค่าน้อยที่สุดที่จุดต่ำสุด และจะมีค่ามากที่สุดที่จุดรองรับข้างใดข้างหนึ่งซึ่งมีมุมความชันมากที่สุด

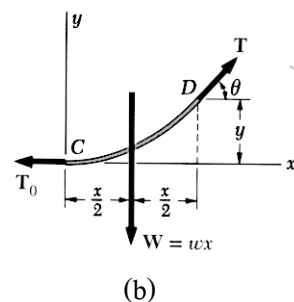
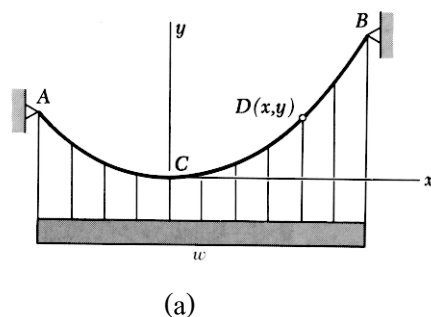


รูปที่ 6.15 (Beer, 1988: 299)

6.9 เคเบิลซึ่งเป็นรูปโค้งพาราโบลา

พิจารณาเคเบิล AB ซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบกระจายสม่ำเสมอไปตามแนวนราบ ดังรูปที่ 6.16(a) เคเบิลในสะพานแขวนจะมีน้ำหนักบรรทุกทุกในลักษณะนี้ โดยจะไม่นิยมน้ำหนักของตัวเคเบิล เนื่องจากมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับน้ำหนักของตัวสะพานและน้ำหนักของรถยนต์ที่แล่นผ่านไปมา ดังนั้นจะคิดเฉพาะน้ำหนักตัวสะพานและน้ำหนักของรถยนต์ กำหนดให้ w เป็น น้ำหนักบรรทุกต่อหน่วยความยาวในแนวนราบ มีหน่วยเป็น นิวตันต่อเมตร (N/m) หรือ ปอนด์ต่อฟุต (lb/ft) เลือกแกนพิกัดซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุด C ซึ่งเป็นจุดต่ำสุดของเคเบิล จะพบว่า W ซึ่งเป็นน้ำหนักบรรทุกทั้งหมดจากจุด C ถึงจุด D ซึ่งมีพิกัด (x, y) จะมีค่า $W = wx$ จากสมการ (6.6) จะได้ความสัมพันธ์ซึ่งสามารถใช้หาขนาดของแรงดึง T และทิศทางของแรงดึง T ในรูปมุม θ ดังนี้

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \quad \tan \theta = \frac{wx}{T_0} \quad (6.7)$$



รูปที่ 6.16 (Beer, 1988: 299)

แรงลัพธ์ W จะมีแนวกระทำผ่านจุดกึ่งกลางระหว่างระยะทางราบจาก C ถึง D

พิจารณาโมเมนต์รอบ D เท่ากับศูนย์

$$\sum M_D = 0: \quad wx \frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

แก้หาค่า y ได้

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \quad (6.8)$$

สมการที่ได้นี้เป็นสมการกำลังสอง(สมการพาราโบลา) ซึ่งมีแนวแกนตั้งและจุดยอด (vertex) อยู่ที่จุดกำเนิด นั่นคือเคเบิลซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกทุกแบบกระจายสม่ำเสมอไปตามแนวยาวจะมีลักษณะการห้อยย้อยตัวเป็นรูปโค้งพาราโบลา

ถ้าจุดรองรับ A และ B ของเคเบิลมีระดับความสูงเท่ากัน ระยะทางในแนวยาวระหว่างจุดรองรับทั้งสองนี้เรียกว่า ช่วงความยาว (span) L ของเคเบิลนั้น และระยะทางในแนวดิ่งระหว่างจุดรองรับกับจุดต่ำสุดเรียกว่า ระยะตกท้องช้าง (sag) h ของเคเบิล จากรูปที่ 6.17(a) ถ้ารู้ค่า ช่วงความยาว ระยะตกท้องช้าง และ W จะสามารถหาแรงดึงที่น้อยที่สุด T_0 ออกมาได้โดยการแทนค่า $x = L/2$ และ $y = h$ ลงในสมการ (6.8) ได้

$$h = \frac{w\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2T_0}$$

$$T_0 = \frac{wL^2}{8h}$$

ถ้าจุดรองรับทั้งสองมีระดับความสูงแตกต่างกัน ตำแหน่งของจุดต่ำสุดของเคเบิลจะไม่ใช่ ดังนั้นจำเป็นต้องหาพิกัดของจุด A และ B

จาก

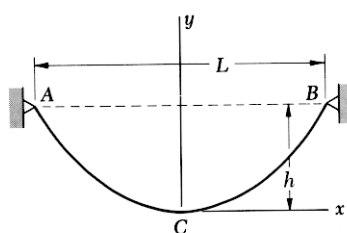
$$x_B - x_A = L \text{ และ } y_B - y_A = d$$

โดย

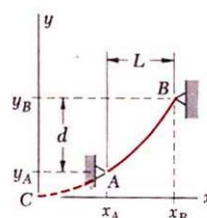
L เท่ากับ ระยะทางในแนวยาวระหว่างจุดรองรับทั้งสอง

d เท่ากับ ระยะทางในแนวดิ่งระหว่างจุดรองรับทั้งสอง

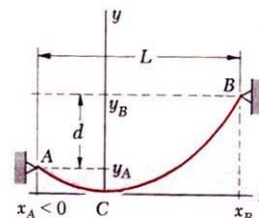
จากรูปที่ 6.17(b) และ 6.17(c)



(a)



(b)



(c)

รูปที่ 6.17 (Beer, 1988: 300)

ความยาวของเคเบิลจากจุดต่ำสุด C ไปยังจุดรองรับ B หาได้จาก $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ได้

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (6.9)$$

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2 x^2}{T_O^2}} dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{w^2 x^2}{2T_O^2} - \frac{w^4 x^4}{8T_O^4} + \dots\right) dx$$

$$s_B = x_B \left(1 + \frac{w^2 x_B^2}{6T_O^2} - \frac{w^4 x_B^4}{40T_O^4} + \dots\right)$$

และเนื่องจาก $w x_B^2 / 2T_O = y_B$ จะได้

$$s_B = x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \dots\right] \quad (6.10)$$

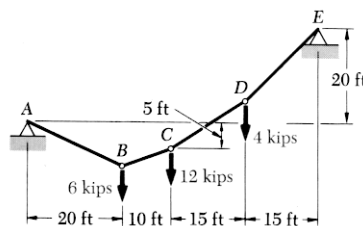
อนุกรมนี้จะลู่เข้า (converges) สำหรับค่าของอัตราส่วน y_B/x_B ซึ่งน้อยกว่า 0.5 และส่วนใหญ่แล้วอัตราส่วนนี้จะมีค่าน้อยมาก ดังนั้นในการคำนวณจะใช้เพียง 2 พจน์แรกของอนุกรมเท่านั้น

ตัวอย่าง 6.8

เคเบิล AE ถูกบรรทุกด้วยน้ำหนักในแนวโค้งดังรูป ให้จุด C อยู่ต่ำจากจุดรองรับด้านซ้ายเท่ากับ 5 ft ให้ความหา

ก. ความสูงของจุด B และ D

ข. ความชันสูงสุด และ แรงดึงสูงสุด ซึ่งเกิดขึ้นในเคเบิลนี้



(Beer, 1988: 301)

วิธีทำ

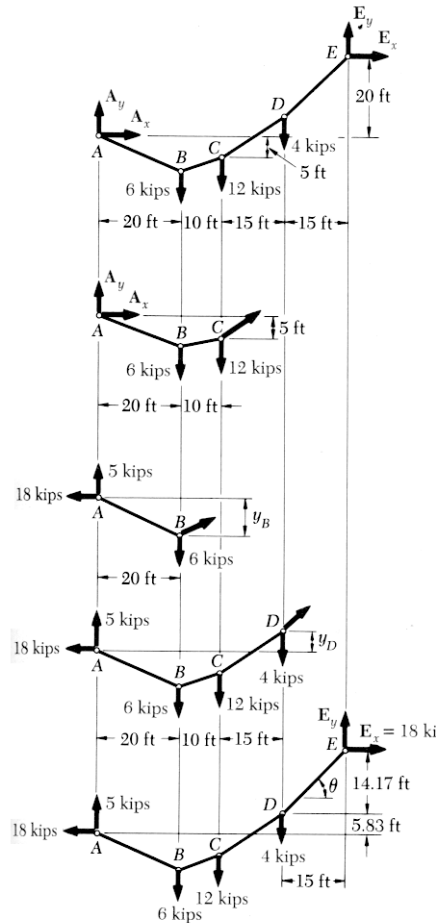
หาแรงปฏิกิริยา A_x และ A_y ดังนี้

พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระของเคเบิลทั้งหมด

$$\sum M_E = 0:$$

$$A_x(20 \text{ ft}) - A_y(60 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(40 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(30 \text{ ft}) + (4 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

$$20A_x - 60A_y + 660 = 0 \quad (1)$$



(Beer, 1988: 301)

พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระ ABC

$$\sum M_C = 0: -A_x(5 \text{ ft}) - A_y(30 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(10 \text{ ft}) = 0$$

$$-5A_x - 30A_y + 60 = 0 \quad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) จะได้

$$A_x = -18 \text{ kips} \quad \mathbf{A_x = 18 \text{ kips} \leftarrow}$$

$$A_y = +5 \text{ kips} \quad \mathbf{A_y = 5 \text{ kips} \uparrow}$$

หาระดับความสูงของจุด B พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระ AB

$$\curvearrowright \sum M_B = 0: (18 \text{ kips}) y_B - (5 \text{ kips})(20 \text{ ft}) = 0$$

$$y_B = 5.56 \text{ ft อยู่ใต้ A} \quad \text{ตอบ}$$

หาระดับความสูงของจุด D พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระ ABCD

$$\curvearrowright \sum M_D = 0:$$

$$-(18 \text{ kips}) y_D - (5 \text{ kips})(45 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(25 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

$$y_D = 5.83 \text{ ft อยู่เหนือ A} \quad \text{ตอบ}$$

ความชันสูงสุด และ แรงดึงสูงสุด

ความชันสูงสุดเกิดในช่วง DE

จากรูป

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{14.17 \text{ ft}}{15 \text{ ft}} \right) = 43.4^\circ$$

$$\theta = 43.4^\circ \quad \text{ตอบ}$$

เนื่องจากองค์ประกอบในแนวราบของแรงดึง T มีค่าคงตัวเท่ากับ 18 kips

$$T(\cos \theta) = 18 \text{ kips}$$

ค่าแรงดึงจะมากที่สุดเมื่อ $\cos \theta$ มีค่าน้อยที่สุด และค่า $\cos \theta$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อมุม θ มีค่ามากที่สุด หรือ ความชันมีค่ามากที่สุด แทนค่า θ ซึ่งเท่ากับ 43.4° ซึ่งเป็นมุมที่มีค่ามากที่สุดลงไป จะได้แรงดึงซึ่งมากที่สุด

$$T_{\max} = \frac{18 \text{ kips}}{\cos \theta}$$

$$T_{\max} = 24.8 \text{ kips} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 6.9

เคเบิลคังรูปมีมวลต่อหน่วยความยาวของเคเบิล 0.75 kg/m ห้อยย้อยอยู่ในสมดุล ให้หา

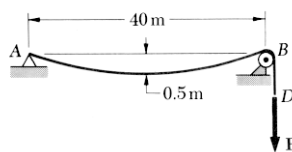
ก. ขนาดของน้ำหนักบรรทุก P

ข. ความชันของเคเบิลที่จุด B

ค. ความยาวทั้งหมดของเคเบิลจากจุด A ถึง B

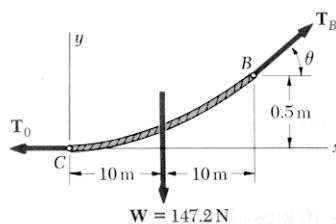
เนื่องจากอัตราส่วนของค่า ระยะตกท้องข้าง/ช่วงความยาว (h/L) มีค่าน้อยมาก $= 0.5/40 = 0.0125$

จึงสมมติให้เคเบิลนี้มีรูปร่างเป็นโค้งแบบพาราโบลา และไม่คิมน้ำหนักเคเบิลช่วง BD



(Beer, 1988: 302)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 302)

ก. หาน้ำหนักบรรทุก P

ให้ C เป็นจุดที่ต่ำที่สุด เขียนแผนภาพวัตถุอิสระส่วนเคเบิล CB สมมติให้น้ำหนักเคเบิลเป็นแบบกระจายสม่ำเสมอไปตามแนวราบ

$$w = (0.75 \text{ kg/m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.36 \text{ N/m}$$

น้ำหนักทั้งหมดในช่วงระหว่าง C ถึง B

$$W = wx_B = (7.36 \text{ N/m})(20 \text{ m}) = 147.2 \text{ N}$$

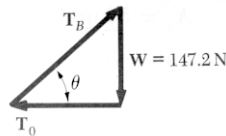
ซึ่งจะกระทำผ่านจุดกึ่งกลางระหว่างจุด B และ C

$$\curvearrowright \sum M_B = 0: (147.2 \text{ N})(10 \text{ m}) - T_O(0.5 \text{ m}) = 0 \quad T_O = 2944 \text{ N}$$

จากสามเหลี่ยมแทนแรง ได้

$$T_B = \sqrt{T_O^2 + W^2}$$

$$T_B = \sqrt{(2944 \text{ N})^2 + (147.2 \text{ N})^2} = 2948 \text{ N}$$



(Beer, 1988: 301)

เนื่องจากแรงดึงในแต่ละข้างของลูกกรอกซึ่งไ้ความฝืดมีขนาดเท่ากัน ดังนั้น

$$P = T_B = 2948 \text{ N} \quad \text{ตอบ}$$

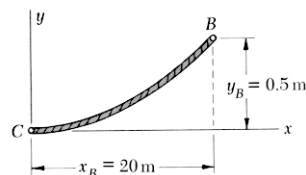
ข. ความชันของเคเบิลที่จุด B

จากสามเหลี่ยมแทนแรง

$$\tan \theta = \frac{W}{T_O} = \frac{147.2 \text{ N}}{2944 \text{ N}} = 0.05$$

$$\theta = 2.9^\circ \quad \text{ตอบ}$$

ค. ความยาวทั้งหมดของเคเบิลจากจุด A ถึง B



(Beer, 1988: 301)

จากสมการ (6.10)

$$s_B = x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 + \dots \right]$$

$$s_B = (20 \text{ m}) \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{0.5 \text{ m}}{20 \text{ m}} \right)^2 + \dots \right]$$

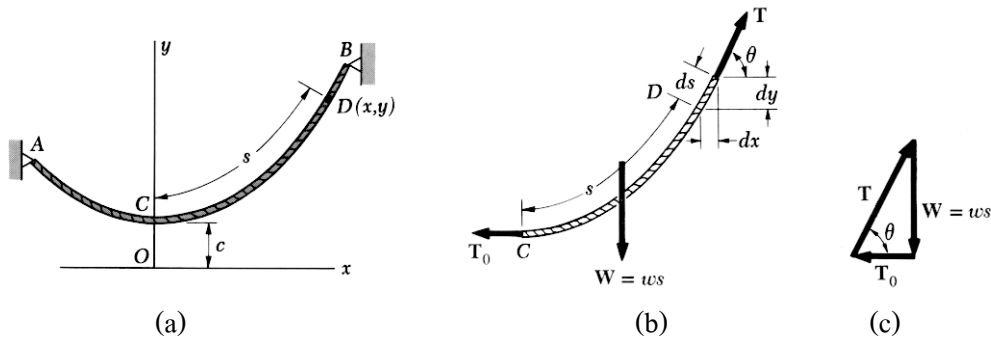
$$s_B = 20.00833 \text{ m}$$

ความยาวของเคเบิลทั้งหมดจาก A ถึง B เป็น 2 เท่าของค่าข้างบน

$$L_{AB} = 2s_B = 40.0167 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

6.10 เคเบิลแบบ Catenary

เคเบิลแบบ catenary เป็นเคเบิลซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบสม่ำเสมอไปตามความยาวของตัวเคเบิลเอง ดังรูปที่ 6.18(a) เคเบิลซึ่งห้อยย้อยด้วย น้ำหนักของตัวเอง จะมีน้ำหนักบรรทุกทุกในลักษณะนี้



รูปที่ 6.18 (Beer, 1988: 306)

ให้ w เป็นน้ำหนักบรรทุกต่อหน่วยความยาวไปตามเส้นเคเบิล มีหน่วยเป็นนิวตันต่อเมตร (N/m) หรือ ปอนด์ต่อฟุต (lb/ft)

ขนาด W ของน้ำหนักบรรทุกทั้งหมดในช่วงจากจุดต่ำสุด D ซึ่งมีความยาวเคเบิล s จะมีค่า $W = ws$ แทนค่า W นี้ลงไปสมการ (6.6) จะได้แรงดึงที่จุด D ดังนี้

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2}$$

เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น กำหนดให้ค่าคงตัว $c = T_0/w$ จะได้

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = w\sqrt{c^2 + s^2} \quad (6.11)$$

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของเคเบิลช่วง CD ดังรูปที่ 6.18(b)

ในกรณีของเคเบิลแบบ catenary แนวกระทำของน้ำหนัก W ไม่ได้ผ่านกึ่งกลางระหว่างจุด C และ D จำเป็นต้องหาระยะ x โดยการพิจารณาช่วงความยาวเล็ก ๆ ของเคเบิล ds โดย $dx = ds \cos \theta$

จาก สามเหลี่ยมแทนแรง ในรูปที่ 6.18(c) ได้

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{wc \, ds}{w\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

เลือกจุดกำเนิด O ของแกนพิกัด ให้อยู่ที่ระยะ c ต่ำลงมาจากจุด C จากรูปที่ 6.18(a) แล้ว หาปริพันธ์จากจุด $C (0,C)$ ไปยังจุด $D (x,y)$ ได้

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+s^2/c^2}} = c \left[\sinh^{-1} \frac{s}{c} \right]_0^s = c \sinh^{-1} \frac{s}{c}$$

สมการนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาว s ของส่วนเคเบิล CD และระยะราบ x และอาจเขียนอยู่ในรูป

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (6.15)$$

หาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y จาก

$$dy = dx \tan \theta$$

จากรูปที่ 6.18(c) $\tan \theta = W/T_o$

$$dy = \frac{W}{T_o} dx$$

จากสมการ (6.11) แทนค่า W, T_o ลงไปได้

$$dy = \frac{ws}{wc} dx = \frac{s}{c} dx$$

จากสมการ (6.15) แทนค่า (s/c) ลงไป

$$dy = \sinh \frac{x}{c} dx$$

หาปริพันธ์จาก $C (0,C)$ ถึง $D (x,y)$ ได้

$$\begin{aligned}
 y - c &= \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \left[\cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = c \left(\cosh \frac{x}{c} - 1 \right) \\
 y - c &= c \cosh \frac{x}{c} - c \\
 y &= c \cosh \frac{x}{c}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

สมการที่ได้เป็นสมการของเคเบิลแบบ catenary โดยค่าพิกัด c ซึ่งอยู่ต่ำจากจุด C ลงไป นั้นเรียกว่า พารามิเตอร์ (parameter) ของเคเบิลแบบ catenary ยกกำลังสองสมการ (6.15) และ (6.16) ได้

$$s^2 = c^2 \sinh^2(x/c) \tag{1}$$

$$y^2 = c^2 \cosh^2(x/c) \tag{2}$$

(2) - (1) ได้

$$\begin{aligned}
 y^2 - s^2 &= c^2 [\cosh^2(x/c) - \sinh^2(x/c)] \\
 y^2 - s^2 &= c^2
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

จากสมการ (6.17)

$$\begin{aligned}
 y^2 &= c^2 + s^2 \\
 y &= \sqrt{c^2 + s^2}
 \end{aligned}$$

แทนค่าลงในสมการ (6.11) จะได้ ความสัมพันธ์ใหม่นี้

$$T_o = wc \quad W = ws \quad T = wy \tag{6.18}$$

สมการ T เท่ากับ wy แสดงให้เห็นว่า แรงดึงที่จุด D ใด ๆ ในเคเบิลจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ ระยะทางในแนวดิ่งจากแกน x ไปยังจุด D นั้น

ถ้าจุดรองรับ A และ B ของเคเบิลมีระดับความสูงเท่ากัน ระยะทางในแนวนอน L ระหว่างจุดรองรับทั้งสองนี้เรียกว่า ช่วงความยาวของเคเบิล และ ระยะทางในแนวดิ่ง h จากจุดรองรับทั้งสองไปยังจุดต่ำสุด C เรียกว่า ระยะตกท้องช้างของเคเบิล

เนื่องจากในกรณีเคเบิลแบบ catenary เรากำหนดแกน x ให้อยู่ต่ำจากจุดต่ำที่สุด C เป็นระยะเท่ากับ c ดังนั้น ระยะตกท้องข้าง h ของเคเบิลแบบ catenary จะเป็น

$$h = y_A - c \quad (6.19)$$

ข้อสังเกต

จากสมการของเคเบิลแบบ catenary

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

และ

$$h = y_A - c$$

จะทำให้การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเคเบิลแบบ catenary ต้องใช้วิธีลองค่า (trial and error) ดูตัวอย่าง 6.10 ซึ่งการคำนวณจะยุ่งยากเสียเวลามาก ดังนั้นถ้าเคเบิลค่อนข้างมีลักษณะเป็นเส้นตรงหรือ h/L มีค่าน้อยมาก อาจจะมีสมมติให้น้ำหนักบรรทุก (น้ำหนักตัวเคเบิล) เป็นแบบ กระจายสม่ำเสมอไปตามแนวนอน ซึ่งจะทำให้สามารถใช้สมการของเคเบิลซึ่งมีรูปโค้งพาราโบลาแทนได้ โดยคำตอบที่ได้จะมีคลาดเคลื่อนจากความจริงเพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่ประโยชน์ที่ได้คือการคำนวณจะง่ายและรวดเร็วกว่ามาก

ถ้าจุดรองรับ A และ B มีระดับความสูงแตกต่างกัน จะทำให้ตำแหน่งต่ำสุดของเคเบิลยังไม่รู้ การแก้ปัญหาก็คือวิธีซึ่งคล้ายกับการแก้ปัญหาคานเคเบิลซึ่งมีรูปโค้งพาราโบลาโดยกำหนดให้

$$x_B - x_A = L \quad \text{เป็นระยะทางในแนวนอนระหว่างจุดรองรับทั้งสอง}$$

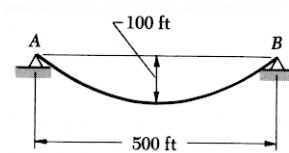
$$y_B - y_A = d \quad \text{เป็นระยะทางในแนวตั้งระหว่างจุดรองรับทั้งสอง}$$

ตัวอย่าง 6.10

เคเบิลเส้นโตสมำเสมอเส้นหนึ่งมี น้ำหนัก 3 lb/ft ถูกห้อยแขวนอยู่ระหว่างจุด A และ B ให้หา

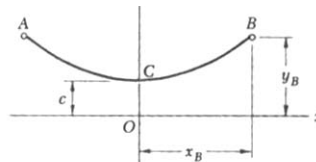
ก. หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของแรงดึง

ข. หาความยาวของเคเบิล



(Beer, 1988: 309)

วิธีทำ



(Beer, 1988: 309)

กำหนดจุดกำเนิด O ให้อยู่ต่ำจากจุด C เป็นระยะเท่ากับ c และจากสมการของเคเบิลแบบ catenary สมการ (6.16)

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

ค่าพิกัดของจุด B ได้แก่

$$x_B = 250 \text{ ft} \text{ และ } y_B = 100 + c$$

แทนค่าพิกัดนี้ลงไปในสมการของเคเบิลแบบ catenary ได้

$$100 + c = c \cosh \frac{250}{c}$$

$$\frac{100}{c} + 1 = \cosh \frac{250}{c}$$

หาค่า c ออกมาโดยการลองค่า ดังตารางต่อไปนี้

c	$\frac{250}{c}$	$\frac{100}{c}$	$\frac{100}{c} + 1$	$\cosh \frac{250}{c}$
300	0.833	0.333	1.333	1.367
350	0.714	0.286	1.286	1.266
330	0.758	0.303	1.303	1.301
328	0.762	0.305	1.305	1.305

แทนค่า c เท่ากับ 328 ได้

$$y_B = 100 + c = 428 \text{ ft}$$

ก. หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของแรงดึง ใช้สมการ (6.18)

$$T_{\min} = T_O = wc = (3 \text{ lb/ft})(328 \text{ ft})$$

$$T_{\min} = 984 \text{ lb} \quad \text{ตอบ}$$

$$T_{\max} = T_B = wy_B = (3 \text{ lb/ft})(428 \text{ ft})$$

$$T_{\max} = 1284 \text{ lb} \quad \text{ตอบ}$$

ข. หาคความยาวของเคเบิล ความยาวครึ่งหนึ่งของเคเบิลหาได้จาก สมการ (6.17)

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2$$

$$s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (428)^2 - (328)^2$$

$$s_{CB} = 275 \text{ ft}$$

ดังนั้นความยาวของเคเบิลทั้งหมด คือ

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2(275 \text{ ft})$$

$$s_{AB} = 550 \text{ ft} \quad \text{ตอบ}$$

